

都市施設の長期的最適配置過程に関する研究

OPTIMAL ALLOCATION OF URBAN ACTIVITIES OVER TIME

藤田昌久*

By Masahisa Fujita

1. はじめに

大都市は今日までたえず成長してきたし、将来もまたそうであろう。しかしながら過去の都市計画において都市はたえず成長するという事実が十分考慮に入れられていたとは言い難い。都市計画におけるこの長期的視野の欠除の結果が長期にわたる都市拡大過程で蓄積されたものが今日の大都市における混乱の大きなひとつの要因となっていると考えられる。したがって、都市問題の真の解決はきわめて長期的な視野に立った都市計画を今後続けて行くことによりはじめて可能であろう。

この観点に立ち、本論文は長期的な視野のもとにおける都市施設の最適配置過程、つまり、いづどこにどのような施設をどれだけ建設するのが長期的に見て効率的であるかを数理的に研究しようとするものである。

現実の都市はきわめて複雑なものであり、これを近似した複雑な数理モデルを解析して一般的結論を得ることはきわめて困難なことである。したがって、本論文では複雑な諸要素を導入することは避け、まず必要最小限の簡単な問題について考える。具体的には、この論文では2種類の都市施設の最適配置過程を再開発を考慮しない場合について研究する。

まず都市施設の長期的な最適配置の問題を定式化し、その問題の最適解のための必要十分条件を最大原理を応用して求める。次に最適配置過程を最初都市が2地区のみより成り立っている場合について求め、ついで一般的な多地区の場合に解を拡張する。その結果より長期的な都市施設の最適配置過程およびその双対としての地価の空間的、時間的分布状態は、現実におけるそれらとどのように異なったものであるかを分析する。また設定された問題が計画ルールとして論理的完結性を持つための条件についても途中で調べる。

2. 問題の定式化

都市施設の時間的な最適配置過程（以下、最適配置プロセスと呼ぶ）を研究するために以下のように単純化されたひとつの都市を想定する。この都市はひとつの都心を中心にして広い平野の中に位置し、近くに他の都市は存在しないものと仮定する。この都市を適当な地区に分割し、同一地区内においてはどの地点も都心からの距離は等しいと仮定する。地区は全体として n 個であり、それぞれ都心からの距離の順に、 $l=1, 2, \dots, n$ と名づける。したがって d_l を第 l 番目の地区の都心からの距離とすると次の関係にある。

$$d_1 < d_2 < \dots < d_l < \dots < d_n \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

各地区は面積 s_l を有しており、

$$s_l > 0, l=1, 2, \dots, n-1, s_n = \infty \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

とする。一方、現実の都市は多種類の都市施設より成り立っているが、単純化のためにここでは都市は2種類の施設のみから成っていると仮定し、それぞれを $i=1, 2$ で示す。たとえば $i=1$ は業務用オフィスで $i=2$ は住宅を示すと考えることができるであろう。

この問題で対象とする計画期間を $[0, T]$ とし、計画期間内の各時間における各施設の都市全体での必要量は外生的に与えられているものと仮定する。したがって、この外生的に与えられた施設 i の時間 t における必要量を $D_i(t)$ 、また、地区 l における施設 i の量を $x_{il}(t)$ 〔個〕で表わすと次の関係が各時間 t で満たされる必要がある。

$$\sum_{i=1}^n x_{il}(t) = D_i(t), i=1, 2, \dots\dots\dots(2.3)$$

初期時点でこの関係が満たされているかぎり、この条件は両辺を微分して次のように表わすこともできる。

$$\sum_{i=1}^n \dot{x}_{il}(t) = \dot{D}_i(t), i=1, 2, \dots\dots\dots(2.4)$$

ここに記号“ $\dot{\cdot}$ ”は時間 t による微分を表わし以下同

* 正会員 Ph.D. 京都大学助教授 工学部交通土木教室

様とする。上式は各時間において、各施設の全地区での増加量の合計は都市全体での必要増加量に等しくなければならないことを意味する。

各地区における各施設の量はそこでその施設を建設、破壊することにより変化する。しかしながら施設の破壊をも考慮した都市施設の最適配置プロセスの一般解を求める過程は非常に複雑であるので、まず破壊を考慮しない場合についてのみこの論文では研究する。これは計画期間の長さにくらべ、施設の破壊・移転の費用が非常に高い場合に相当する。したがって、地区 l における施設 i の時間 t における建設量〔個/時間〕を $u_{il}(t)$ とおくと、そこにおける各施設の変化は次のように表わせる。

$$\dot{x}_{il}(t) = u_{il}(t), \quad i=1, 2, l=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots(2.5)$$

一方、各施設の建設のためには対応する敷地面積を必要とする。各施設 i の単位量当りの必要面積は定数であると仮定し、これを k_i [m²/個] とおくと、各地域では次の面積制約が各時間において満たされていなければならない。

$$\sum_{i=1}^n k_i x_{il}(t) \leq s_l, \quad l=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots(2.6)$$

次に、各配置プロセスの評価要因としては、建設された施設から得られる便益と、施設の建設に要する費用が考えられる。しかしながら本論文においては地区間における建設費用の差はないと仮定するので、制約条件式(2.3)より全体としての建設費用は定数となり評価要因からははずすことができる。一方、各時間において各施設から得られる便益については、施設がオフィスであればその単位は〔円/個・時間〕であり、住宅であれば〔効用/個・時間〕であろう。しかし、本論文では両者は適当な方法により換算可能であると仮定し、その統一単位として〔円/個・時間〕を用いる。

各施設の1単位から得られる単位時間当りの便益は都心で最大であり、都心からの距離にしたがって比例的に減少すると仮定する。この仮定は「立地と土地利用」におけるアロンゾの仮定¹⁾と類似のものであるが、各施設間の直接の依存関係を考えれば厳密には妥当しないかもしれない。しかし、この仮定を現実の第1次近似として単純化のために採用する。都心からの距離に応じて便益が減少する理由として、たとえば施設がオフィスであれば都心からの距離に応じて客の不便が増大し、また住宅であれば居住者の通勤に伴う不効用などが考えられる。そこで、都心での施設 i の1単位から時間 t において得られる時間当りの便益を $B_i(t)$ 、便益の都心からの距離に対する低減率は施設の種類のみに依存し、時間および都心からの距離にかかわらず一定とし、これを r_i [円/個・時間・距離] とおくと、時間 t において都市全体の施設から得られる便益の合計は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^2 (B_i(t) - r_i d_l) x_{il}(t) \\ & = \sum_{i=1}^n B_i(t) \sum_{l=1}^n x_{il}(t) - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^2 r_i d_l x_{il}(t) \\ & \dots\dots\dots(2.7) \end{aligned}$$

ところで右辺第1項は全施設がすべて都心に立地することができた場合の便益の合計であり、これは制約条件式(2.3)より定数となる。したがって、都市全体における便益の合計を最大化することは、右辺第2項で表わされる。都心から離れて施設が立地することにより都心の場合に比べて相対的に引きおこされる不便益の合計を最小化することに等しい。よって本論文における目的関数として、相対的な不便益の計画期間全体における合計である次の値を最小化することにする。

$$\int_0^T \rho(t) \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^2 r_i d_l x_{il}(t) dt \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

ここに $\rho(t)$ は時間 t における便益に対するウェイトで、便益のウェイト関数と呼び、これは次の条件を満たすものとする。

$$\rho(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

$$\rho(t=0) = 1 \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

以上より本論文で対象とする都市施設の最適配置の問題は次のように定式化される。

問題A

計画期間全体における不便益の合計

$$\int_0^T \rho(t) \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^2 r_i d_l x_{il}(t) dt \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

を以下の制約条件および初期条件のもとに最小にする $u_{il}(t)$ の値 ($i=1, 2, l=1, 2, \dots, n, 0 \leq t \leq T$) を求めよ。

a) 施設量変化式

$$\dot{x}_{il}(t) = u_{il}(t), \quad i=1, 2, l=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots(2.12)$$

$$u_{il}(t) \geq 0, \quad i=1, 2, l=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots(2.13)$$

b) 施設量制約

$$\sum_{i=1}^n u_{il}(t) = \dot{D}_i(t), \quad i=1, 2 \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

c) 面積制約

$$\sum_{i=1}^2 k_i x_{il}(t) \leq s_l, \quad l=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

d) 初期条件

$$\left. \begin{aligned} x_{il}(t=0) &= x_{il}(0) \geq 0 \\ D_i(t=0) &= D_i(0) = \sum_{l=1}^n x_{il}(0) \\ \sum_{i=1}^2 k_i x_{il}(0) &\leq s_l \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &i=1, 2 \\ &l=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

ただし $\dot{D}_i(t)$ および $\rho(t)$ は t に関して連続な関数とする。

要するにこの問題は、各時刻において外生的に与えら

れた各施設の増加分を計画期間全体における不便益の合計が最小になるように面積制約を満たしながら各地区に配分することである。なお本論文では、現在までの大都市の経過からして、都市がたえず拡大する場合に注目しているの、特別に代りの仮定を指定しないかぎり常に次のように仮定しておく。

$$\dot{D}_i(t) > 0, 0 \leq t \leq T, i=1, 2, \dots \dots \dots (2.17)$$

また、以下の分析においては、施設 i の単位面積から得られる便益の距離に対する低減率を表わすパラメータ、 r_i/k_i の値が重要になるが、施設の符号づけは任意であるので次のように仮定しておく。

$$0 < \frac{r_2}{k_2} < \frac{r_1}{k_1} < \infty \dots \dots \dots (2.18)$$

また、この問題では施設の破壊を考えていないので、初期条件において $x_{il}(0) > 0$ であっても、これを破壊してそこに他の施設を建設することはない。よって最適解を得るに当っては $s_l - \sum_{i=1}^2 k_i x_{il}(0)$ を各地区の初期面積と考えて計算し、あとでその解に $x_{il}(0)$ を加えればよい。よって以後解を求めるに当って次のように仮定しておく。

$$x_{il}(0) = 0, i=1, 2, l=1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (2.19)$$

3. 最適配置プロセスの満たすべき条件およびその解釈

ここでは、問題Aに対する最適解の満たすべき条件をポントリヤーギンの最大原理を用いて求め、その解釈を行う。

このために、まず、計画者が直接変化させることのできない状態変数 $x_{il}(t)$ のみから成っている制約条件式(2.15)を計画者が直接変化させうる制御変数 $u_{il}(t)$ で書きなおす。この制約条件は、左辺が右辺より厳密に小的时候は、各時間における施設の地区間配分において無視されてよい。等号が成り立っている時のみ、もはやその地区に対しては施設を増加させることができないという意味で効いてくる制約である。このことより条件式(2.15)は次のように書きなおせることがわかる。

$$\sum_{i=1}^2 k_i u_{il}(t) \leq 0; \sum_{i=1}^2 k_i x_{il}(t) = s_l \text{ なるすべての } l \text{ に対して} \dots \dots \dots (3.1)$$

そうすると、問題Aでは施設の破壊を考慮していないので一度ある地区が施設で一杯となるとそれ以後常にそこは一杯であるということに注意して、参考文献 2), 3) または 4) における最大原理より、問題Aにおける最適配置プロセスの満たすべき必要条件は以下のようにとめることができる。

最適解のための条件

$u_{il}^*(t)$ ($0 \leq t \leq T, i=1, 2, l=1, 2, \dots, n$) を問題Aにおける最適配置プロセス、 $x_{il}^*(t)$ をそれに対応する解曲線とすると、これらは以下の条件を満たす。

(i) $u_{il}^*(t)$ は各時間において、ハミルトニアン関数

$$H(x^*, u, p, t) = \rho(t) \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^2 r_i d_i x_{il}^*(t) + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^2 p_{il}(t) u_{il}(t) \dots (3.2)$$

を制約条件式(2.13), (2.14) および(3.1)に従って最小化する。ここに補助変数 $p_{il}(t)$ は次の関数を満たす。

$$(ii) \dot{p}_{il}(t) = -\partial H(x^*, u, p, t) / \partial x_{il}(t) = -\rho(t) r_i d_i, i=1, 2, l=1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (3.3)$$

(iii) ハミルトニアン関数 $H(x, u, p, t)$ は最適解にそって連続である。

(iv) 最終時刻 T において次の終端条件を満たす乗数 π_i および λ_l が存在する。

$$\pi_i + k_i \lambda_i = p_{il}(T), i=1, 2, l=1, 2, \dots, n \dots (3.4)$$

$$\lambda_l \geq 0, l=1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (3.5)$$

$$\lambda_l (\sum_{i=1}^2 k_i x_{il}(T) - s_l) = 0, l=1, 2, \dots, n \dots (3.6)$$

以上は、最適解のための必要条件であるが、問題Aにおける関数はすべて線形であるので、これらは同時に十分条件であることがわかる^{5), 6)}。

以上の条件を用いて問題Aに対する最適解を探すわけであるが、そのままにこれらの条件の持つ経済的意味を以後の分析をわかりやすくするため行っておく。

まず各補助変数および乗数の意味であるが、これらは一般のプログラミング問題におけると同様に限界便益または限界費用の意味を持っており⁷⁾、ここではおのおの次のような意味を持っている。

$p_{il}(t)$: 時刻 t において地区 l における施設 i の量を1単位増大させたことによりその後の最適プロセスで最終時刻 T までにひきおこされる不便益 (= 目的関数) の増加量、つまり t において $x_{il}(t)$ を単位量増大した時将来ふえる不便益の合計。

以後 $p_{il}(t)$ を地区 l における施設 i の時間 t 後の不便益増加予想値と呼ぶ。ただし、この“不便益”は都心に立地した時に比較しての相対的な不便益で、絶対的なものではない。以下においても“不便益”という語が使われた場合、同じくこれは相対的なものであることに注意を要する。

π_i : 最終時刻 T において必要施設量 $D_i(T)$ を単位量増加したことによりひきおこされる不便益の増加量。

λ_l : 最終時刻 T における地区 l の面積制約を単位量きつしたこと、つまり s_l を $s_l - 1$ にしたことによりひきおこされる不便益の増加量。最終時刻 T においてきつされた地区 l の面積制約を守るためには、初期時

刻からそれだけ地区 l の面積が減少したものととして施設の地区間配分をしなければならない。このことを逆に解せば、 λ_l は初期時刻において地区 l の面積を 1 単位増大した時最終時刻までに減少させうる不便益の量に等しく、この意味で λ_l は地区 l の初期時刻における地価とみなせる。

以上の各乗数の意味づけをもとに各条件の解釈をしてみよう。式 (3.2) のハミルトニアン関数 H において第 1 項は既存の都市施設による不便益の増加率で、第 2 項は各地区 l における各施設 i の増加速度が $u_{il}(t)$ であることより将来最終時刻までにひきおこされる不便益の増加率である。したがって、条件 (i) が要求するように、各時刻において、 H を最小にする、つまり第 2 項の値を最小にするように $u_{il}(t)$ の値を制約条件の範囲で決めることはしごく当然のことと言える。

条件 (ii) は、式 (3.3) を次のように近似的に書きなおすとわかりやすい。

$$p_{il}(t) - p_{il}(t + \Delta t) = \rho(t) r_i d_i \Delta t \dots\dots\dots(3.7)$$

まえに説明した $p_{il}(t)$ の意味より、上式は、 $x_{il}(t)$ を時間 t で単位量増加させた時と時間 $t + \Delta t$ において単位量増加させた時の最終時刻までにひきおこされる不便益の差は、 $\rho(t) r_i d_i \Delta t$ であることを表わす。これもしごく当然のことであろう。最後に、終端条件(iv)における式 (3.4) は、最終時刻において $x_{il}(T)$ を単位量増加させることによりひきおこされる不利益の量 $p_{il}(T)$ は、そのための土地を最終時刻まで空地にしておいたことによりこうむった不便益の増加量 $k_i \lambda_l$ と $D_i(T)$ を単位量増加させたことによりおこる不便益の増加量 π_i の和に等しいことを示す。式 (3.6) は、最終時刻において地区 l の土地に空地がある時は、その土地の地価 λ_l は 0 であることを意味する。

4. いくつかの補助定理

この章では、以下の分析で必要となるいくつかの補助定理をまとめて証明しておく。このために、まず微分方程式 (3.3) を解くことにより次の関係をうる。

$$p_{il}(t) = p_{il}(T) + r_i d_i (\sigma(T) - \sigma(t)) \dots\dots\dots(4.1)$$

ここに、

$$\sigma(t) = \int_0^t \rho(\tau) d\tau \dots\dots\dots(4.2)$$

以後 $\sigma(t)$ を累積ウェイト関数と呼ぶ。式 (4.1) より不便益増加予想値 $p_{il}(t)$ は $\sigma(t)$ に関して直線的に減少する。仮定 (2.9) より $\sigma(t)$ は t に関して単調増加するので、 t に関しても $p_{il}(t)$ は単調減少し、また式 (3.3) より $\dot{p}_{il}(t) = -\rho(t) r_i d_i$ であり、仮定 (2.1) より $l \neq l'$ の時は $d_l \neq d_{l'}$ であるので、 $p_{il}(t)$ と $p_{i'l'}$

(t) とは $l \neq l'$ のかぎり計画期間中にただか 1 回しか交わらない。このことを用いて、最適配置プロセスにおいては以下の補助定理 1~6 が成り立っていることを証明する。

補助定理 1: 施設 i ($i=1$ または 2) の建設が地区 l から地区 l' にスイッチする時刻においては $p_{il}(t) = p_{i'l'}(t)$ でなければならない。

これは $\dot{D}_i(t)$ と $\rho(t)$ の連続性の仮定とハミルトニアン関数 H の連続性に関する条件 (iii) より明らかである。

補助定理 2: 施設 i ($i=1$ または 2) が地区 l と l' に計画期間中のそれぞれいずれかの時刻において建設されるとする。すると、 $l < l'$ つまり $d_l < d_{l'}$ ならば i は l' より先に l に建設される。

証明: 逆に、 $l' \rightarrow l'' \rightarrow \dots \rightarrow l$ という順序で i が l より先に l' に建設されたとしよう。すると l' に i が建設される時には l'', \dots, l にも空地が残っているので、ハミルトニアン H の最小条件より、 $p_{i'l'} < \min(p_{i'l''), \dots, p_{i'l})$ でなければならない。ところで補助定理 1 より、その後 i が l' から l'' にスイッチする時には $p_{i'l'} = p_{i'l''}$ でなければならない。しかし、式 (3.3) より、 $p_{i'l'}(t) < p_{i'l''}(t)$ 、 $p_{i'l'}(t') = p_{i'l''}(t')$ 、 $t < t'$ であることは $l' < l''$ の時のみ可能である。同様に $l' < l'' < \dots < l$ でなければならないという結論を得るが、これは最初の仮定、 $l < l'$ 、に反する。よって i が l より先に l' に建設されることはない。

補助定理 3: ある 4 つの時刻 t_{i1} と t_{i1+1} ($i=1, 2$) に対して、 $p_{i1}(t_{i1}) = p_{i1+1}(t_{i1})$ 、 $p_{i1+1}(t_{i1+1}) = p_{i2}(t_{i1+1})$ 、 $i=1, 2$ 、であったとする。そうすると、 $t_{i1} \geq t_{i1+1} \Leftrightarrow t_{21} \geq t_{21+1}$ である。

証明: たとえば、逆に $t_{21} < t_{21+1}$ のとき $t_{11} \geq t_{11+1}$ であったとしよう。ところで、 $t_{11} \geq t_{11+1}$ ならば式 (2.1) と (3.3) より、 $p_{11}(t') = p_{11+1}(t')$ 、 $t_{11+1} \leq t' \leq t_{11}$ なるひとつの t' が存在する。よって式 (4.1) より次の関数をうる。

$$p_{11}(T) - p_{11+1}(T) \leq r_1(d_{1+1} - d_1)(\sigma(T) - \sigma(t')) \dots\dots\dots(4.3)$$

$$p_{11+1}(T) - p_{11+2}(T) \geq r_1(d_{1+2} - d_{1+1}) \cdot (\sigma(T) - \sigma(t')) \dots\dots\dots(4.4)$$

$$p_{21}(T) - p_{21+1}(T) = r_2(d_{1+1} - d_1) \cdot (\sigma(T) - \sigma(t_{21})) \dots\dots\dots(4.5)$$

$$p_{21+1}(T) - p_{21+2}(T) = r_2(d_{1+2} - d_1)(\sigma(T) - \sigma(t_{21+1})) \dots\dots\dots(4.6)$$

式 (4.3) と (4.5) および式 (3.4)、また式 (4.4) と (4.6) および式 (3.4) よりそれぞれ次の関係をうる。

$$\frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1} \leq \frac{\sigma(T) - \sigma(t')}{\sigma(T) - \sigma(t_{21})},$$

$$\frac{\sigma(T) - \sigma(t')}{\sigma(T) - \sigma(t_{2l+1})} \leq \frac{r_2}{k_2} / \frac{r_1}{k_1} \dots\dots\dots(4.7)$$

よって、 $t_{2l} \geq t_{2l+1}$ でなければならないが、これは最初の仮定に矛盾する。よって $t_{2l} < t_{2l+1}$ ならば $t_{1l} < t_{1l+1}$ でなければならない。全く同様に他の場合も証明されるのでそれらは省略する。

補助定理 4: $x_{il}(T) > 0$ ($i=1$ または 2) とすると $k_1x_{1j}(T) + k_2x_{2j}(T) = s_j$, $j=1, 2, \dots, l-1$ である。つまり、最終時刻においては途中に空地があることはない。

証明: もしも $k_1x_{1j}(T) + k_2x_{2j}(T) < s_j$, $j < l$ とすれば、 l に建設された i の 1 部または全部をかわりにこの空地に建設しておけば、 $d_l > d_j$ であることから、この方がもとの配置プロセスより小さな目的関数の値を与える。よってもとの配置プロセスは最適ではありえない。

補助定理 5: $l < l'$ つまり $d_l < d_{l'}$ とする。そうすると計画期間中のいかなる区間においても、 $i=1$ が l' に建設されており $i=2$ が l に建設されているということはない。

証明: $t_1 < t < t_2$ なる期間において $i=1$ が l' に、 $i=2$ が l に建設されたとする。すると、 $t_1 < t' < t'' < t_2$ なるある期間 $[t', t'']$ において、十分小さな $\alpha > 0$ をとり、 $i=1$ の α/k_1 単位を l に $i=2$ の α/k_2 単位を l' に建設し、これ以外はもとの配置プロセスと全く同じひとつの配置プロセスが可能である。両者を比較すると、 $r_1/k_1 > r_2/k_2$, $d_l < d_{l'}$ であるから、この新しい配置プロセスがより小さな目的関数の値を与える。よってもとの配置プロセスは最適ではない。

補助定理 6: $i(i=1$ または $2)$ が最初に地区 l に建設されるためには、 $p_{il}(t=0) = \min\{p_{ij}(t=0) | j=1, 2, \dots, n\}$ でなければならない。

これはハミルトニアン H の最小条件より明らかである。

以上の補助定理を用いて、以下、2 地区の場合における問題 A の解を求め、これをもとにして一般の n 地区の場合の解を得る。

5. 2 地区の場合の最適配置プロセス

ここでは問題 A において、地区の数が 2 つ、つまり $n=2$ の場合の解を求める。この場合、仮定 (2.1) および (2.2) より、都心からより遠い地区 2 の面積は無限大であることに注意を要する。問題は、各時刻において外生的に与えられた各施設の増加分を計画期間全体における不便益の合計が最小になるように面積制約を満たしながら 2 地区間に配分することである。

さて、最適解では条件 (i) より、各時間における各施設の必要増加量 $\dot{D}_i(t)$ は各地区の面積制約のもとでハ

ミルトニアン H を最小にするよう地区間に配分される。式 (3.2) よりこのことは、 $\dot{D}_i(t)$ は空地を持つ地区のうちで不便益増加予想値 $p_{il}(t)$ の最小の地区にすべて建設されることを意味する。したがって、最適プロセスをみつめるには地区間における $p_{il}(t)$ の相対的な値が最も重要になる。ゆえに、この節での問題の一般解を求めるにあたって、 $p_{il}(t)$ の 2 地区間の相対的なパターンに注目する。

第 4 節の初めに述べたように、各施設の不便益増加予想値 $p_{i1}(t)$ と $p_{i2}(t)$ とは計画期間中にたかだか 1 回しか交わらない。よって $p_{i1}(t)$ と $p_{i2}(t)$ との相対的なパターンは次の三通りに分けることができる。

$$(a) \quad p_{i1}(t) > p_{i2}(t), \quad 0 \leq t \leq T \dots\dots\dots(5.1)$$

$$(b) \quad \left. \begin{aligned} p_{i1}(t) < p_{i2}(t), \quad 0 \leq t \leq t_i^* \\ p_{i1}(t) > p_{i2}(t), \quad t_i^* < t \leq T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.2)$$

$$(c) \quad p_{i1}(t) < p_{i2}(t), \quad 0 \leq t \leq T \dots\dots\dots(5.3)$$

また、式 (4.1) よりこれらは次の場合分けと同値である。

$$(a) \quad p_{i1}(T) - p_{i2}(T) \geq r_i(d_2 - d_1)\sigma(T) > 0 \dots\dots\dots(5.4)$$

$$(b) \quad r_i(d_2 - d_1)\sigma(T) > p_{i1}(T) - p_{i2}(T) > 0 \dots\dots\dots(5.5)$$

$$(c) \quad p_{i1}(T) - p_{i2}(T) \leq 0 \dots\dots\dots(5.6)$$

一方、終端条件 (iv) と仮定 (2.2) より次の関係うる。

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 = 0 \dots\dots\dots(5.7)$$

$$p_{i1}(T) - p_{i2}(T) = k_i \lambda_1 \geq 0, \quad i=1, 2 \dots\dots\dots(5.8)$$

したがって、不便益増加予想値 $q_{il}(t)$ の 2 地区間の相対的なパターンはそれぞれ図-1 の (a), (b) および (c) で示される。各施設について三通りのパターンがあるので、両施設をあわせて考えると全部で 9 通りのパターンが存在する。すなわち、 $i=1$ についてパターン (a), (b) および (c) をそれぞれ順に I, II および III と名付け、 $i=2$ についてそれらを順に (1), (2) および (3) と名付けると、結局、I-(1) から III-(3) までの合計 9 つのパターン名を得る。たとえば、II-(1) は $i=1$ が (b) で $i=2$ が (a) の場合である。

次に不便益増加予想値 $p_{il}(t)$ の各パターンに対応する最適配置プロセスを求めるわけであるが、9 通りすべてのパターンがそれぞれある最適配置プロセスに対応しているわけではない。実際、パターン I-(1) に従った配置プロセスでは $l=1$ に空地ができることがすぐわかり、補助定理 4 より最適ではない。また、パターン I-(2), I-(3) および II-(3) に従った配置プロセスでは、 $l=1$ に $i=2$ を配分しながら $l=2$ に $i=1$ を配分する期間があることが簡単にわかり、補助定理 5 より最適ではない。最後に、パターン III-(1) と III-(2) は終端条件式

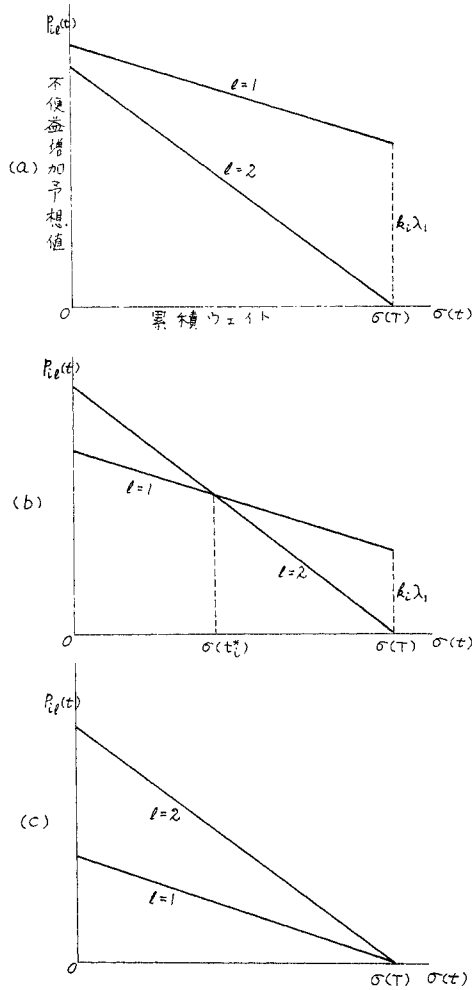


図-1 2地区の場合における $p_{ii}(t)$ のパターン

(5.8) を満たすことができない。よって、残るのはパターン II-(1), II-(2) および III-(3) のみである。したがって、以下、この3つの $p_{ii}(t)$ のパターンについて分析を行い、最適配置プロセスの一般解を求める。なお、あとでわかるように、パターン II-(1) は計画期間 T が長期の場合に相当し、パターン II-(2) および III-(3) は中期および短期の場合にそれぞれ相当している。

(1) パターン II-(1) (長期) の場合

式 (5.1) と (5.2) よりパターン II-(1) は次のように特性づけられる。

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(t) < p_{12}(t), 0 \leq t < t_1^*, p_{11}(t_1^*) = p_{12}(t_1^*) \\ p_{11}(t) > p_{12}(t), t_1^* < t \leq T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.9)$$

$$p_{21}(t) > p_{22}(t), 0 \leq t \leq T \dots\dots\dots (5.10)$$

また、式 (5.4) と (5.5) よりこれらは次のように等しく特性づけられる。

$$r_1(d_2 - d_1)\sigma(T) > p_{11}(T) - p_{12}(T) > 0 \dots\dots (5.11)$$

$$p_{21}(T) - p_{22}(T) \geq r_2(d_2 - d_1)\sigma(T) > 0 \dots\dots (5.12)$$

したがって、この場合の不便益増加予想値 $p_{ii}(t)$ は図-2 のように描ける。次に、最適解の条件 (i) より、式 (5.10) のもとでは $i=2$ はすべて $l=2$ に建設される。したがって、式 (5.9) のもとでは、補助定理1と4より、 t_1^* は $i=1$ が $l=1$ に一杯に建設されて $l=2$ にスイッチする時間に等しくなければならない。つまり

$$k_1 D_1(t_1^*) = s_1 \dots\dots\dots (5.13)$$

で t_1^* を定義すると

$$t_1^* = t_1^0 \dots\dots\dots (5.14)$$

でなければならない。一方、終端条件式 (5.8) より次の関係をうる。

$$\frac{(p_{11}(T) - p_{12}(T))}{k_1} = \frac{(p_{21}(T) - p_{22}(T))}{k_2} \dots\dots\dots (5.15)$$

また、 t_1^* の定義と式 (5.14) より次の関係をうる。

$$p_{11}(T) - p_{12}(T) = r_1(d_2 - d_1)(\sigma(T) - \sigma(t_1^*)) \dots\dots\dots (5.16)$$

よって、式 (5.12), (5.15) および (5.16) より結局次の関係がえられる。

$$\sigma(t_1^0) \leq \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) \dots\dots\dots (5.17)$$

以上より、 $p_{ii}(t)$ のパターン、II-(1) が問題Aの最適配置プロセスに対応しているためには、その問題におけるパラメータは次の条件を満たしている必要がある。

$$\left. \begin{aligned} k_1 D_1(t) = s_1 \text{ の解 } t_1^0 (0 < t_1^0 < T) \text{ が存在し,} \\ \sigma(t_1^0) \leq \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) \text{ なる関係を満たす。} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.18)$$

逆に、問題Aにおけるパラメータがこの条件を満たせば、 $p_{ii}(t)$ のパターン II-(1) はその問題における最適配置プロセスに対応していることを示そう。このため、本節における以上の分析からもわかるとおり最適解にとっては $p_{ii}(t)$ の地区間における相対的な値のみが関係するので、まず $p_{i2}(T) = 0, i=1, 2$ とおく。したがって、式 (5.13) で求められる時刻 t_1^0 において $p_{11}(t)$ と $p_{12}(t)$ とが交わり、かつ、終端条件 (5.15) を満たす $p_{ii}(t)$ として式 (4.1) より次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(t) &= r_1 d_2 (\sigma(T) - \sigma(t_1^0)) - r_1 d_1 (\sigma(t) - \sigma(t_1^0)) \\ p_{12}(t) &= r_1 d_2 (\sigma(T) - \sigma(t)) \\ p_{21}(t) &= r_2 (d_2 \sigma(T) - d_1 \sigma(t)) + k_2 (d_2 - d_1) \\ &\quad \cdot \left(\frac{r_1 (\sigma(T) - \sigma(t_1^0))}{k_1} - \frac{r_2 \sigma(T)}{k_2} \right) \\ p_{22}(t) &= r_2 d_2 (\sigma(T) - \sigma(t)) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.19)$$

ここに t_1^0 は式 (5.13) を満たす t であり、その存在は条件式 (5.18) で保証されている。条件式 (5.18) の後半よりこれらの $p_{ii}(t)$ はパターン II-(1) となってい

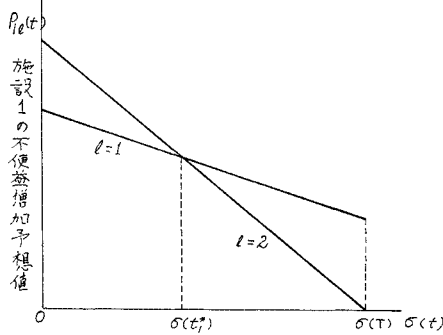


図-2 パターン II-(1) (長期) の $p_{il}(t)$

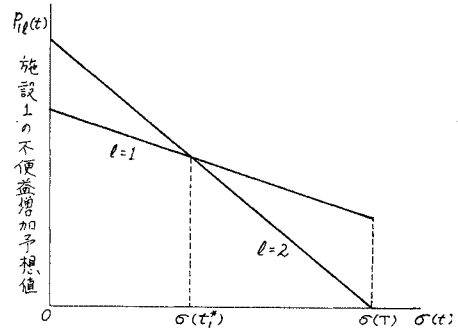
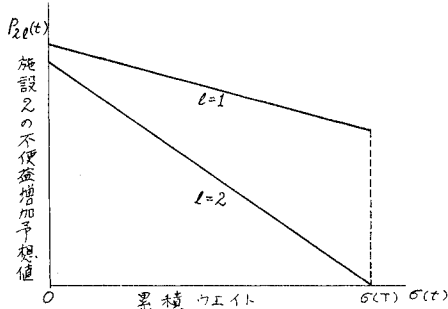
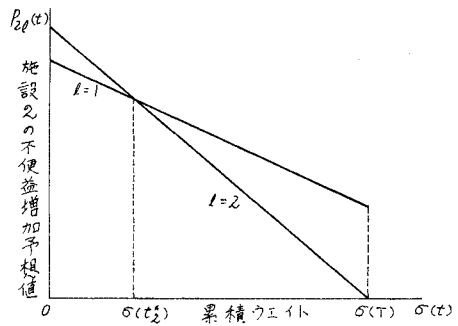


図-3 パターン II-(2) (中期) の $p_{il}(t)$



ることが簡単に確かめられる。また $t=t_1^*$ において $p_{i1}(t)=p_{i2}(t)$ となっている。よって、最適配置プロセスとして

$$\left. \begin{aligned} u_{11}(t) &= \begin{cases} \dot{D}_1(t), & 0 \leq t < t_1^* \\ 0, & t_1^* < t \leq T \end{cases} \\ u_{12}(t) &= \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1^* \\ \dot{D}_1(t), & t_1^* < t \leq T \end{cases} \\ u_{21}(t) &= 0, \quad u_{22}(t) = \dot{D}_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.20)$$

とおき、終端条件における乗数として

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 = \pi_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= r_1(d_2 - d_1)(\sigma(T) - \sigma(t_1^*)) / k_1, \quad \lambda_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.21)$$

とおけば、式 (5.19), (5.20) と (5.21) は最適解のための条件をすべて満たしている。

以上より、問題Aにおける最適配置プロセスが式 (5.20) の形をとるための必要十分条件は式 (5.18) であり、このときの補助変数および乗数は式 (5.19) と (5.21) で与えられる。また、この時の不便益増加予想値 $p_{il}(t)$ のパターンは II-(1) となっている。

(2) パターン II-(2) (中期) の場合

式 (5.21) よりパターン II-(2) は次のように特性づけられる。

$$\left. \begin{aligned} p_{i1}(t) &< p_{i2}(t), \quad 0 \leq t < t_i^*, \quad p_{i1}(t_i^*) = p_{i2}(t_i^*) \\ p_{i1}(t) &> p_{i2}(t), \quad t_i^* < t \leq T, \quad i=1, 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.22)$$

また、式 (5.5) よりこれは次のように等しく書きなおせる。

$$r_i(d_2 - d_1)\sigma(T) > p_{i1}(T) - p_{i2}(T) > 0, \quad i=1, 2 \dots\dots\dots (5.23)$$

このパターンの不便益増加予想値 $p_{il}(t)$ は図-3 のように描ける。まえと同様に、最適配置プロセスに対応する $p_{il}(t)$ のパターンが式 (5.22) のかたちをとるための必要十分条件を問題におけるパラメーターの関係としてどのように表わせるかを調べる。

まず補助定理1より $t_i^*(i=1, 2)$ は $i=1$ の建設が $l=1$ から $l=2$ にうつる (スイッチ) する時間に等しくなければならないことがわかる。よって、条件 (i) に従う配置プロセスは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_{11}(t) &= \begin{cases} \dot{D}_1(t), & 0 \leq t < t_1^* \\ 0, & t_1^* < t < T \end{cases} \\ u_{12}(t) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_1^* \\ \dot{D}_1(t), & t_1^* < t \leq T \end{cases} \\ u_{21}(t) &= \begin{cases} \dot{D}_2(t), & 0 \leq t < t_2^* \\ 0, & t_2^* < t \leq T \end{cases} \\ u_{22}(t) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_2^* \\ \dot{D}_2(t), & t_2^* < t \leq T \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.24)$$

また、補助定理4より t_1^* と t_2^* は次の関係を満たしていなければならない。

$$k_1 D_1(t_1^*) + k_2 D_2(t_2^*) = s_1 \dots\dots\dots (5.25)$$

一方、 t_i^* の定義と式 (4.1) より次の関係をうる。

$$p_{i1}(T) - p_{i2}(T) = r_i(d_2 - d_1)(\sigma(T) - \sigma(t_i^*)) \dots\dots\dots (5.26)$$

よって、式 (5.8) と (5.26) より次の条件をうる。

$$\sigma(t_i^*) = \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) + \left(\frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(t_2^*) \quad (5.27)$$

以上より、不便益増加予想値 $p_{ii}(t)$ のパターン II-(2) が問題Aの最適配置プロセスに対応しているためには、式 (5.25) と (5.27) を満たす t_i^* ($0 < t_i^* < T$)、 $i=1, 2$ が存在する必要があることがわかった。次にこのような t_i^* の存在するための条件を問題におけるパラメーターの関係として求めてみよう。このために次の2つの曲線を ($\sigma(t_1)$, $\sigma(t_2)$) 座標軸のうえで考えてみる。

$$\sigma(t_1) = \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) + \left(\frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(t_2) \quad (5.28)$$

$$k_1 D_1(t_1) + k_2 D_2(t_2) = s_1 \quad (5.29)$$

まず式 (5.29) を全微分すると次のようになる。

$$k_1 \frac{dD_1(t_1)}{dt_1} \frac{dt_1}{d\sigma(t_1)} d\sigma(t_1) + k_2 \frac{dD_2(t_2)}{dt_2} \frac{dt_2}{d\sigma(t_2)} d\sigma(t_2) = 0 \quad (5.30)$$

$d\sigma(t)/dt = \rho(t)$ であることを考慮して次の関係をうる。

$$\left. \frac{d\sigma(t_1)}{d\sigma(t_2)} \right|_{\text{曲線(5.29)}} = - \frac{k_1 \dot{D}_1(t_1) \rho(t_2)}{k_2 \dot{D}_2(t_2) \rho(t_1)} \quad (5.31)$$

ところで仮定 (2.9) と (2.17) より $\dot{D}_i(t_i) > 0$ 、 $\rho(t_i) > 0$ であるので、結局曲線 (5.29) は ($\sigma(t_1)$, $\sigma(t_2)$) 座標上で負の傾きを有している。一方式 (5.28) は、仮定 (2.18) より $\sigma(t_i)$ 軸上における切片が正の直線である。よって2つの曲線 (5.28) と (5.29) は図-4 のようにそれぞれ描ける。この図より、曲線 (5.28) と (5.29) が $0 < \sigma(t_1) < \sigma(T)$ と $0 < \sigma(t_2) < \sigma(T)$ の範

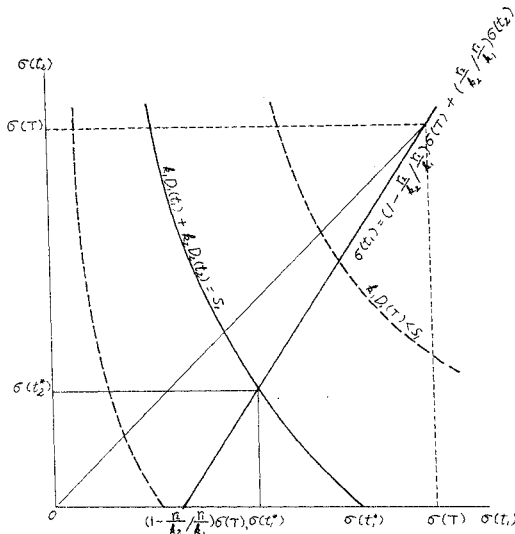


図-4 2地区の場合における t_{ii}^* の決定

囲で交わるための条件は、 $k_1 D_1(T) \geq s_1$ ならば $k_1 D_1(t_1) = s_1$ の解を t_1^* とおいたとき

$$\left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) < \sigma(t_1^*)$$

となることであり、 $k_1 D_1(T) < s_1$ ならば $k_1 D_1(T) + k_2 D_2(T) > s_1$ となることである。

逆にこのいずれかの条件が問題Aにおいて満たされていれば、その問題の最適プロセスは式 (5.24) で表わされ、それに対応する $p_{ii}(t)$ はパターン II-(2) となることが証明できるが、その方法はまえとほとんど同じであるので、ここでは省略する。

以上より、問題Aにおける最適配置プロセスが、式 (5.24) の形をとるための必要十分条件は次の2つの場合に分けられる。

- (イ) $k_1 D_1(T) \geq s_1$ ならば $\left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) < \sigma(t_1^*)$ となることである。ここに、 t_1^* は $k_1 D_1(t) = s_1$ を満たす t である。
- (ロ) $k_1 D_1(T) < s_1$ ならば $k_1 D_1(T) + k_2 D_2(T) > s_1$ となることである。

また、その最適配置プロセスに対応する不便益増加予想値 $p_{ii}(t)$ のパターンは II-(2) となる。

(3) パターン III-(3) (短期) の場合

式 (5.6) と終端条件式 (5.8) より、パターン III-(3) は結局次のように特性づけられる。

$$p_{ii}(T) = p_{i2}(T), \quad i=1, 2 \quad (5.32)$$

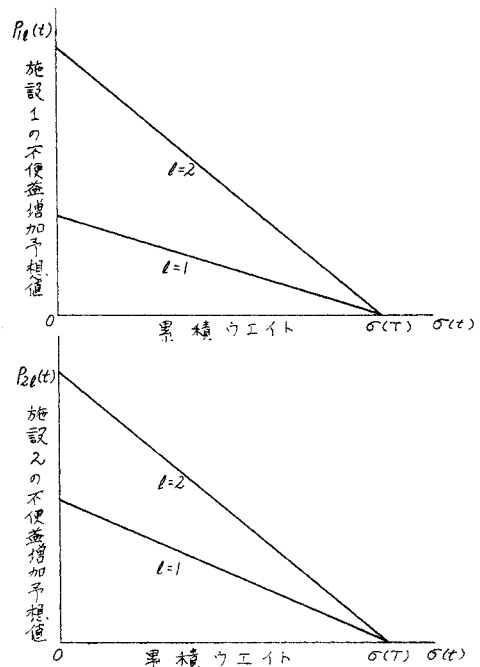


図-5 パターン III-(3) (短期) の $p_{ii}(t)$

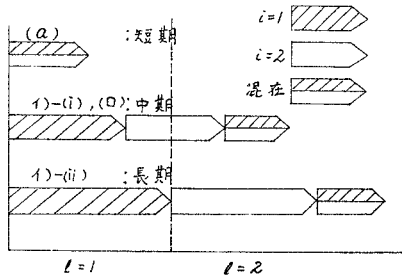


図-6 2 地区の場合の最適配置プロセス

したがって、このパターンは図-5のように示される。補助定理 1, 4 と 6 より、この時の最適配置プロセスは次のようにならないといけないことがすぐわかる。

$$\left. \begin{aligned} u_{i1}(t) &= \dot{D}_i(t), 0 \leq t < T, i=1, 2 \\ u_{i2}(t) &= 0, 0 \leq t \leq T, i=1, 2 \end{aligned} \right\} \dots (5.33)$$

このためにはもちろん次の条件が満たされている必要がある。

$$k_1 D_1(T) + k_2 D_2(T) \leq s_1 \dots (5.34)$$

逆に問題 A においてこの条件が満たされていれば、最適配置プロセスは式 (5.33) で表わされ、それに対応する不便益増加予想値 $p_{ii}(t)$ のパターンは III-(3) となることがままと同じ方法により示されるが、ここではその証明は省略する。

以上より、2 地区の場合における問題 A の一般解は次のようにまとめられる。

(a) $k_1 D_1(T) + k_2 D_2(T) \leq s_1$ のときは、 $i=1, 2$ をすべて $l=1$ に建設する。

(b) $k_1 D_1(T) + k_2 D_2(T) > s_1$ のとき；

(イ) $k_1 D_1(T) \geq s_1$ ならば、 $k_1 D_1(t) = s_1$ なる t を t_1^* とおくと；

(イ)-(i) : $\left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) < \sigma(t_1^*)$ であれば、 $i=1, 2$ はそれぞれスイッチ時刻 t_1^*, t_2^* まで $l=1$ に建設され、以後は $l=2$ に建設される。ここに t_1^* と t_2^* は連立方程式 (5.25), (5.27) の解である。

(イ)-(ii) : $\sigma(t_1^*) \leq \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T)$ であれば、 $i=1$ は $l=1$ にいっぱいになるまで建設され、その後は $l=2$ に建設される。一方、 $i=2$ は $l=2$ のみにすべて建設される。

(ロ) $k_1 D_1(T) < s_1$ ならば上の (イ)-(i) と同じパターンになる。

以上の最適配置プロセスのパターンを図に示すと図-6 のようになる。計画期間 T が短い時は両施設は地区 1 に混在して建設されるが、計画期間が長くなるに従い施設 1 と

施設 2 は分離して建設されるようになる。この場合、両施設間には長期にわたって空地が存在することになる。これらの解のパターンをもとにして次節で一般の n 地区の場合の最適配置プロセスを求める。また、解のより詳しい分析はその後まとめて行う。

6. n 地区の場合の最適配置プロセス

この章では前節で求めた 2 地区の場合の解を一般の n 地区の場合に拡張する。この場合においても前章と同様に、最適配置プロセスに対応していない不便益増加予想値 $p_{ii}(t)$ のパターンを補助定理と終端条件を用いてとりのぞき、残った $p_{ii}(t)$ のパターンから最適配置プロセスの一般解を求めるという方法をとることができる。しかしながら、このためには、まず $p_{ii}(t)$ のパターンをいくつかのより本質的なグループに分けるという手順が必要であり比較的めんどうである。そこでこの節では前節の結論に注目してそれを一般化するという、以下の方法をとる。

まず注目すべきことは、前章における 2 地区の場合の最適配置プロセスは 3 つのパターンに分けて求められたが、これらは本質的にはひとつのものであるということである。つまりどのパターンにおいても $i=1$ は都心に一番近い地区から順次建設され、結局 3 つのパターンにおける違いは $i=2$ を最初どの地区から建設しはじめるかということのみであり、その地区が問題で与えられたパラメーターにより変わるとのことである。もちろんこのことは、補助定理 2, 4 と 5 からわかることである。

同様に補助定理 2, 4 と 5 より n 地区の場合の最適配置プロセスの一般的なパターンとして図-7 のように想定できる。まず、補助定理 5 より $i=2$ が $i=1$ より都心側に同時刻において建設されていることはない。また、補助定理 2 より、同一の施設があとから都心側の地区に建設されることはない。また補助定理 5 より最終時刻において途中で空地があることはない。よって $i=1$ は最初 $l=1$ より建設されはじめられ、 $i=2$ は都心から離れたある地区より建設されはじめる。この $i=2$ の建設されはじめる地区を $l=h (h \geq 1)$ とおくとその後 i

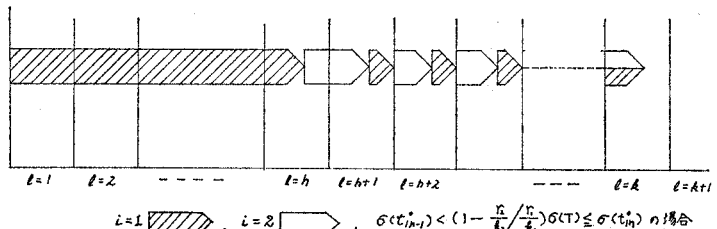


図-7 n 地区の場合における最適配置プロセス

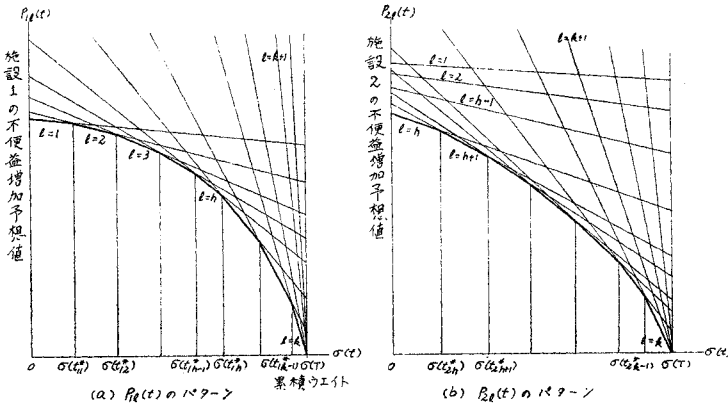


図-8 n 地区の場合における $p_{il}(t)$ のグラフ

$=2$ は $l=h$ の 1 部, $l=h+1$ の 1 部, $\dots, l=k-1$ の 1 部または全部に順次建設されて行き, 計画期間の最後に $l=k (\leq n)$ に建設される。一方, $i=1$ は最初は $l=1, l=2, \dots, l=h-1$ のすべてを順次うめつくして行き, $l=h$ にいたるとその後は $i=2$ の建設のあとに残った空地 (もしもあれば) を順次うめつくして行き, 最後に $l=k$ にいたると。地区 h より都心から離れた各地区において両施設がどのような割合で建設されるかはまだ未定である。そして, このように想定された配置プロセスが最適となりうるための必要条件を問題におけるパラメーター, $T, \rho(t), r_i, k_i, d_i, D_i(t), s_i$ の関係として求め, 次に, 逆にそのようなパラメーターの関係が満たされたならば, この想定された配置プロセスは最適であることを証明する。

まず, この配置プロセスに対応する不利益増加予想値 $p_{il}(t)$ のパターンは次のようになる。補助定理 6 より, 初期時刻 $t=0$ においては $p_{i1}(0) = \min\{p_{i1}(0) | l=1, 2, \dots, n\}$ である。また補助定理 1 より, $i=1$ の建設が $l=1$ から $l=2$ にうつる時刻 t_{11}^* には $p_{i1}(t_{11}^*) = p_{i2}(t_{11}^*)$ である。以下同様にして $p_{il}(t)$ のパターンとして図-8(a) のように描ける。 $l \geq k$ の $p_{il}(t)$ については, 式 (3.4) と (3.6) より $\lambda_i=0$ であるから $p_{il}(T) = \pi_i$ となる。しかしながら, 後でわかるように π_i は任意におけるから, 図-8(a) のように $\pi_i=0$ とおく。 $i=2$ についても, $l \geq h$ なる $p_{2l}(t)$ については $p_{2l}(t)$ のパターンと全く同じである。また, $1 \leq l \leq h$ の $p_{2l}(t)$ については補助定理 3 より $p_{21}(t=0) > p_{22}(t=0) \dots > p_{2h-1}(t=0) > p_{2h}(t=0)$ となる。したがって, $p_{2l}(t)$ は図-8(b) のようになる。これらの $p_{il}(t)$ は式 (4.1) より次のように特性づけられる。

$$p_{1l}(T) - p_{1l+1}(T) = r_1(d_{l+1} - d_l)(\sigma(T) - \sigma(t_{1l}^*)), \quad l=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots(6.1)$$

$$p_{2l}(T) - p_{2l+1}(T) \geq r_2(d_{l+1} - d_l)\sigma(T), \quad l=1, 2, \dots, h-1 \quad \dots\dots(6.2)$$

$$p_{2l}(T) - p_{2l+1}(T) = r_2(d_{l+1} - d_l)(\sigma(T) - \sigma(t_{2l}^*)), \quad l=h, h+1, \dots, n \quad \dots\dots(6.3)$$

ここに, t_{il}^* は以下の関係を満たす t の値である。

$$p_{iil}(t_{il}^*) = p_{iil+1}(t_{il}^*), \quad (i=1, l=1, 2, \dots, n), \quad (i=2, l=h, h+1, \dots, n) \quad \dots\dots(6.4)$$

$$t_{11}^* < t_{12}^* < \dots < t_{1k-1}^* < t_{1k}^* = t_{1k+1}^* = \dots = t_{1n}^* = T \quad \dots\dots(6.5)$$

$$t_{2h}^* < t_{2h+1}^* < \dots < t_{2k-1}^* < t_{2k}^* = t_{2k+1}^* = \dots = t_{2n}^* = T \quad \dots\dots(6.6)$$

また, 便宜的に次のように定義しておく。

$$t_{10}^* = 0, \quad t_{2l}^* = 0, \quad l=0, 1, 2, \dots, h-1 \quad \dots\dots(6.7)$$

これらの t_{il}^* を用いて想定された配置プロセスは次のように表わせる。

$$u_{il}(t) = \begin{cases} \dot{D}_i(t), & t_{il-1}^* \leq t < t_{il}^*, \\ 0, & \text{その他の時} \end{cases} \quad \dots\dots(6.8)$$

次に, 以上のように想定された配置プロセスとそれに対応する $p_{il}(t)$ のパターンが最適解を与えるための条件を問題におけるパラメーターの関係として求めよう。

まず t_{il}^* を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} k_l D_1(t_{1l}^*) &= \sum_{j=1}^l s_j, \quad l=1, 2, \dots, n, \quad t_{10}^* = 0 \\ k_l D_1(T) &< \sum_{j=1}^l s_j \quad \text{ならば } t_{1l}^* = \infty \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(6.9)$$

次に, 想定された配置プロセスにおいては,

$$x_{iil}(T) = x_{iil}(t_{il}^*) = \int_{t_{il-1}^*}^{t_{il}^*} \dot{D}_i(t) dt, \quad i=1, 2, l=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots(6.10)$$

となるので補助定理 4 より t_{il}^* は次の関係を満たさなければならない。

$$t_{1l}^* = t_{1l}^*, \quad l=1, 2, \dots, h-1 \quad \dots\dots(6.11)$$

$$k_l D_1(t_{1l}^*) + k_2 D_2(t_{2l}^*) = \sum_{j=1}^l s_j, \quad l=h, h+1, \dots, k-1 \quad \dots\dots(6.12)$$

また $D_i(T)$ は次の関係を満たしている必要がある。

$$\sum_{j=1}^{k-1} s_j < k_1 D_1(T) + k_2 D_2(T) \leq \sum_{j=1}^k s_j \quad \dots\dots(6.13)$$

一方終端条件式 (3.4) より次の関係をうる。

$$(p_{il}(T) - p_{iil+1}(T)) / k_i = \lambda_l - \lambda_{l+1}, \quad l=1, 2, \dots, n-1 \quad \dots\dots(6.14)$$

式 (6.1), (6.2) と (6.14) より, また, 式 (6.1), (6.3)

と (6.14) よりそれぞれ以下の関係がえられる。

$$\sigma(t_{il}^*) < \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T), \quad l=1, 2, \dots, h-1 \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t_{il}^*) &= \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) \\ &+ \left(\frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(t_{2l}^*), \quad l=h, h+1, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (6.16)$$

また仮定より $\frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1} < 1$ であるから、式 (6.16) より次の関係も得られる。

$$t_{il}^* > t_{2l}^*, \quad l=h, h+1, \dots, k-1 \quad (6.17)$$

以上より、想定した配置プロセス (6.8) が最適であるためには式 (6.5), (6.6), (6.11), (6.12), (6.15), (6.16) と (6.17) を満たす t_{il}^* が存在する必要がある。したがって、このような t_{il}^* の存在するための必要十分条件を問題におけるパラメーターの関係として求めよう。

式 (6.11) と (6.15) より次の左辺の不等式関係を、また、式 (6.9) と (6.12) より $t_{1h}^\circ \geq t_{1h}^*$ であるから式 (6.16) より次の右辺の不等式関係が得られる。

$$\sigma(t_{1(h-1)}^\circ) < \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) \leq \sigma(t_{1h}^\circ) \quad (6.18)$$

このことは t_{1l}° の定義より次のことも含んでいる。

$$k_1 D_1(T) > \sum_{j=1}^{h-1} s_j \quad (6.19)$$

こんどは逆に、式 (6.13) と (6.18) が満たされていれば、式 (6.5), (6.6), (6.11), (6.12), (6.15), (6.16) および (6.17) をすべて満たす t_{il}^* が存在することを示そう。このために次の方程式を考える。

$$k_1 D_1(t_1) + k_2 D_2(t_2) = \sum_{j=1}^l s_j, \quad l=1, 2, \dots, k-1 \quad (6.20)$$

上式の全微分より式 (5.31) と同様にして次の関係を示す。

$$\frac{d\sigma(t_1)}{d\sigma(t_2)} \Big|_{\text{曲線(6.20)}} = -\frac{k_1 \dot{D}_1(t_1) \rho(t_2)}{k_2 \dot{D}_2(t_2) \rho(t_1)} \quad (6.21)$$

仮定 (2.9) と (2.17) より右辺は負の値をもつ。したがって、式 (6.13), (6.18), (6.19) と (6.21) より式 (6.20) で定義された曲線群は図-9 におけるように描ける。一方、直線

$$\sigma(t_1) = \left(1 - \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) + \frac{r_2}{k_2} \frac{r_1}{k_1} \sigma(t_2) \quad (6.22)$$

は式 (6.18) より図-9 のように描ける。

連立方程式 (6.12) と (6.16) の解としての t_{il}^* ($l=h, h+1, \dots, k-1$) は、この図において曲線 (6.20) と直線 (6.22) の交点として求まる。また方程式 (6.9) の解としての $t_{1l}^\circ (=t_{1l}^*)$, ($l=1, 2, \dots, h-1$) は、曲線 (6.20) と $\sigma(t_1)$ 軸の交点として求まる。図よりこれらの t_{il}^* は式

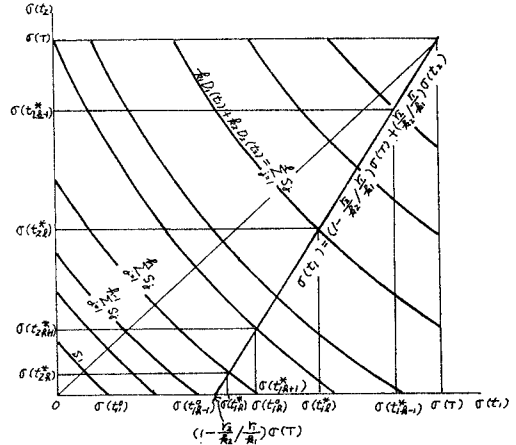


図-9 建設のスイッチ時刻 t_{il}^* の決定

(6.5), (6.6), (6.11), (6.12), (6.15), (6.16) および (6.17) をすべて満たしていることが簡単に読みとれる。

結局、想定した配置プロセス (6.8) が最適であるために問題におけるパラメーターの満たすべき必要条件として、最終的に式 (6.13) と (6.18) の二つを得たことになる。

今度は逆に、問題におけるパラメーターが条件式 (6.13) と (6.18) の二つを満たしていれば、最初に想定した配置プロセスのパターンは最適であることを示そう。まず式 (6.18) は式 (6.19) を内に含んでいるから、式 (6.9) で定義される t_{1l}° は $l=1, 2, \dots, h-1$ については T より小の値を持つ。また連立方程式 (6.12), (6.16) を満たす t_{il}^* ($0 < t_{il}^* < T$, $i=1, 2, l=h, h+1, \dots, k-1$) の存在は式 (6.13) と (6.18) より保証されている。これらの t_{1l}° と t_{il}^* とを用いて、最初に想定した配置プロセスは式 (6.8) のように表わせる。ただし t_{il}^* ($i=1, 2, l=0, 1, 2, \dots, h-1$) は式 (6.7) と (6.11) で定義される。

また、この配置プロセスに対応する $p_{il}(t)$ として次のようにおく。

$$p_{il}(t) = r_i d_l (\sigma(T) - \sigma(t)), \quad i=1, 2, \quad l=k, k+1, \dots, n \quad (6.23)$$

$$p_{il}(t) - p_{i(l+1)}(t) = r_i (d_{l+1} - d_l) (\sigma(t) - \sigma(t_{il}^*)), \quad i=1, 2, \quad l=h, h+1, \dots, k-1 \quad (6.24)$$

$$p_{il}(t) - p_{i(l+1)}(t) = r_i (d_{l+1} - d_l) (\sigma(t) - \sigma(t_{1l}^\circ)), \quad l=1, 2, \dots, h-1 \quad (6.25)$$

$$p_{2l}(t) - p_{2(l+1)}(t) = k_2 (r_1/k_1) (d_{l+1} - d_l) (\sigma(T) - \sigma(t_{il}^*)) - r_2 (d_{l+1} - d_l) (\sigma(T) - \sigma(t)) \quad l=1, 2, \dots, h-1 \quad (6.26)$$

そして、終端条件における各乗数はそれぞれ次のようにおく。

$$\pi_i = 0, \quad i=1, 2 \quad (6.27)$$

$$\lambda_l = 0, \quad l=k, k+1, \dots, n \quad (6.28)$$

$$\lambda_l - \lambda_{l+1} = (r_1/k_1)(d_{l+1} - d_l)(\sigma(T) - \sigma(t_{il}^*)), \quad l=1, 2, \dots, k-1 \quad \dots(6.29)$$

このようにおかれた $u_{il}(t)$, $p_{il}(t)$, π_i および λ_l は式 (6.13) と (6.18) のもとでは第3節における最適解のための条件をすべて満たしていることが、図-9 を用いながら、簡単に確かめられる。

以上より、最初に想定された配置プロセス、つまり式 (6.8) で与えられた配置プロセスが存在し、かつそれが最適であるための必要十分条件は式 (6.13) と (6.18) であることがわかった。

最後に、このような最適配置プロセスは最初の問題設定において仮定された条件が満たされているかぎりただひとつ常に存在することを示そう。まず仮定式 (2.2) と (2.17) より式 (6.13) を満たす $k(1 \leq k \leq n)$ はひとつだけ常に存在する。また、次の関係を満たす $\bar{l}(1 \leq \bar{l} \leq n)$ はただひとつ存在する。ただし $s_0=0$ とおく。

$$\sum_{j=0}^{\bar{l}-1} s_j \leq k_1 D_1(T) < \sum_{j=0}^{\bar{l}} s_j \quad \dots(6.30)$$

このような \bar{l} は、式 (6.9) による t_{il}° の定義のもとでは次の関係を満たしている。

$$\begin{aligned} \sigma(t_{i0}^\circ) = 0 < \sigma(t_{i1}^\circ) < \sigma(t_{i2}^\circ) < \dots < \sigma(t_{i\bar{l}-1}^\circ) \\ < \sigma(t_{i\bar{l}}^\circ) = \sigma(t_{i\bar{l}+1}^\circ) = \dots = \sigma(t_{in}^\circ) = \sigma(\infty) \end{aligned} \quad \dots(6.31)$$

したがって、仮定より $r_1/k_1 > r_2/k_2$ であるから、式 (6.18) を満たす $h(1 \leq h \leq \bar{l})$ がただひとつ常に存在する。

以上より式 (6.8) で与えられる最適解はただひとつ常に存在することがわかった。

以上において n 地区の場合の最適配置プロセスの一般解が得られたが、ここにそれをまとめておこう。

まず、問題Aにおける各パラメータの値が指定されたとき、式 (6.13) を満たす地区を k 、式 (6.30) を満たす地区を \bar{l} とおくとこれらはただひとつ常に存在する。次に式 (6.9) で t_{il}° を定義すると、 $\sigma(t)$ の定義よりこれらは式 (6.31) における関係にある。そうすると、仮定により $r_1/k_1 > r_2/k_2$ であるから式 (6.18) を満たすひとつの地区 $h(1 \leq h \leq \bar{l})$ がただひとつ常に存在する。次に、連立方程式 (6.12), (6.16) の解を $t_{il}^*(l=0, 1, 2, \dots, k-1)$ とおき、式 (6.7) と (6.11) で $t_{il}^*(l=0, 1, 2, \dots, h-1)$ を定義するとこれらの t_{il}^* はただひとつずつ常に存在する。これらの t_{il}^* を用いて最適配置プロセスは式 (6.8) で与えられ、図-7 はこれを図示したものである。また、この最適配置プロセスに対応する $p_{il}(t)$ は式 (6.23) から (6.26) で与えられ、これらは図-8 のように表わせる。最後に終端条件における各乗数は式 (6.27) から (6.29) でそれぞれ与えられる。

この最適配置プロセスを、都心からの距離がどの方向

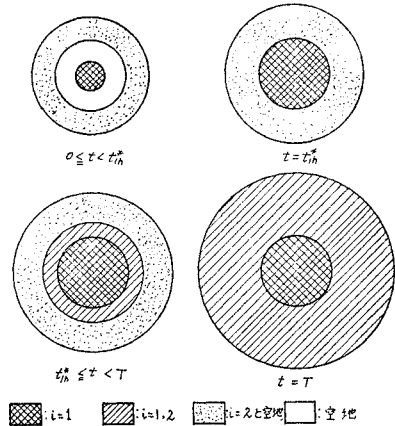


図-10 最適配置プロセス

にも関わらず連続的に増加する場合について図示したものが図-10 である。最初は、施設1は都心から順次拡大される。一方施設2は都心からかなり離れたある半径 d_h を持つ地点より建設されはじめ、中に空地を混在させながら順次外側に拡大されて行く。したがって、当分の間にわたって両施設間には大きな空地が存在することになる。内側のこの空地は、ある時刻 t_{ih}^* においてなくなり、以後は、施設1は施設2の間に残されている空地に順次建設されて行き、計画期間の最後において右下の状態にいたる。

7. 一般解のパラメーターによる比較分析

前節で最適配置プロセスの一般解が求められたが、この解は問題におけるパラメーター $\rho(t)$, r_i , d_i , $\dot{D}_i(t)$, k_i , s_l および T のすべてに依存している。したがって、この節では、これらのパラメーターが変化するとき解がどのように変化するかを調べてみる。

まず、 $i=1$ は一番都心側の地区から建設されはじめ $i=2$ は都心から離れたある地区 h より建設されはじめるので、両施設間にはある期間にわたって空地が存在することになる。この空地の大きさおよびその存在する期間の長さについて次のことが式 (6.18) よりすぐにわかる。

(i) $i=2$ の建設されはじめる地区 h は、計画期間の長さ T が大きいほど都心から遠くなる。したがって、それだけ両施設間に空地の存在する期間も長くなる。

(ii) 両施設間における単位面積あたりの便益の都心からの距離に対する低減率の差が大きいほど（つまり、 $\frac{r_2}{k_2} / \frac{r_1}{k_1}$ の値の小さいほど） $i=2$ の建設されはじめる地区 h は都心から遠くなり、空地の存在する期間も長くなる。

また、式 (6.9) による t_{i1}^* の定義と式 (6.18) より次のことがわかる。

(iii) $i=1$ の増加速度 $\dot{D}_1(t)$ の大きいほど $i=2$ の建設されはじめる地区 h は都心から遠くなる。ただし、両施設間に空地の存在する期間の長さはそれに無関係である。

便益の時間的ウェイト $\rho(t)$ の変化については式 (4.2) による $\sigma(t)$ の定義と式 (6.18) より次のことがわかる。

(iv) 将来の便益に対するウェイト $\rho(t)$ の比重が現在のそれに対して急速に小さくなるほど (つまり $-\dot{\rho}(t)$ の大きいほど)、計画期間の長さ T が両施設間に存在する空地の大きさおよびその期間の長さを与える影響は小さくなる。

(v) $\rho(t)$ が時間とともに 0 に収束するかぎり、 T が無限大だとしても $i=2$ の建設されはじめる地区 h は都心から有限の距離にある。また両施設間に空地の存在する期間の長さも有限である。

また、最適配置プロセスの一般形から次のある意味では以外な結論が得られる。

(vi) 各地区の都心からの距離 d_i の絶対的な大きさは解に全く影響を持たず、その相対的な順序のみが解に関係する。

一方、 $i=2$ の建設されはじめる地区 h よりも都心から離れた地区では最終時刻までに両施設の混在が生じるが、各地区において両施設の含める面積比 θ_l を混在率と定義すると θ_l は次のようになる。

$$\theta_l = \frac{k_2(D_2(t_{2l+1}^*) - D_1(t_{2l}^*))}{k_1(D_1(t_{1l+1}^*) - D_1(t_{1l}^*))}, \quad l = h, h+1, \dots, k-1 \quad (7.1)$$

また、式 (6.16) より次の関係をうる。

$$\frac{\sigma(t_{2l+1}^*) - \sigma(t_{2l}^*)}{\sigma(t_{1l+1}^*) - \sigma(t_{1l}^*)} = \frac{r_1}{k_1} / \frac{r_2}{k_2}, \quad l = h, h+1, \dots, k-1 \quad (7.2)$$

θ_l と式 (7.2) の左辺とは同一の増加傾向を持っているので、次のことが言える。

(vii) 両施設の混在率 θ_l は両施設の便益の距離に対する低減率の比の値 $\frac{r_1}{k_1} / \frac{r_2}{k_2}$ が大きいほど大きくなる。

以上においてはすべて、 $\dot{D}_i(t) > 0$ ($i=1, 2, 0 \leq t \leq T$)、つまり計画期間中いつも両施設は増加すると仮定していたが、次のように両施設の増加が途中で止まる、

$$\left. \begin{aligned} \dot{D}_i(t) > 0, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq t \leq \bar{t} \\ \dot{D}_i(t) = 0, \quad i=1, 2, \quad \bar{t} < t \leq T \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

の場合について解を調べてみよう。これは一定規模の新都市を短期間に完成する場合などを含む。まず、 $D_i(\bar{t})$ ($=D_i(T)$) は以下の関係にあるとする。

$$\sum_{j=1}^{h-1} s_j \leq k_1 D_1(\bar{t}) < \sum_{j=1}^h s_j \quad (7.4)$$

$$\sum_{j=1}^{h-1} s_j < k_1 D_1(\bar{t}) + k_2 D_2(\bar{t}) \leq \sum_{j=1}^k s_j \quad (7.5)$$

また、この都市は将来長い間ずっと使われるとし、評価期間 (= 計画期間) T は十分大きくかつ $\rho(t)$ はその間 0 にならないとする。そうすると式 (6.9) による t_{i1}^* の定義より次の関係を得る。

$$\sigma(t_{1h-1}^*) < \left(1 - \frac{r_2}{k_2} / \frac{r_1}{k_1}\right) \sigma(T) < \sigma(t_{1h}^*) = \sigma(\infty) \quad (7.6)$$

よって図-11 を得る。この図より、最適配置プロセスでは $i=1$ は都心から地区 h の途中までを順次すべてうめつくして行き、 $i=2$ は地区 h の途中から地区 k の途中までを順次すべてうめつくして行き、そこで両施設の建設は止まることがわかる。したがって、地区 h をのぞいて両施設の混在は一切おこらない。この配置プロセスを図-12 に示している。この両施設の時刻 \bar{t} における状態は、すべての $D_1(\bar{t}_1)$ および $D_2(\bar{t}_2)$ を 1 時点最適配置するという、時間を考えない静的な最適配置のパターンと一致している。

8. 計画ルールの完結性について

以上において問題Aにおける都市施設の最適配置プロセスを求めた。ところで、あくまでこれは計画時点にお

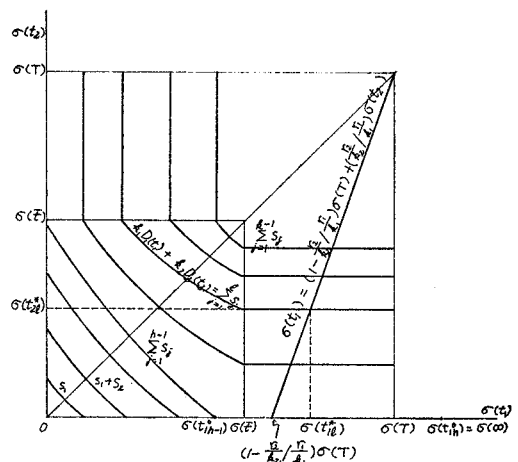


図-11 一定規模の都市を短期間に完成する場合の t_{ii}^* の決定

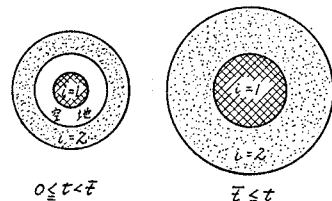


図-12 一定規模の都市を短期間に完成する場合の最適配置プロセス

いて最適と考えられた配置プロセスであり、この配置プロセスがその後の各時点においても最適と受けとられるとは限らない。もしも最適として受けとられなければ、その配置プロセスは実現されないものとなり、“最適解”自体の定義に問題が起る。このような矛盾が起らないためには、初期時点において求められた最適配置プロセスに沿って任意の時刻 t まで来たとき、計画者がそれまでの結果を与件として再び同一の計画ルールで求めたその後の最適配置プロセスが両者の共通計画区間において最初のものと同様に一致する必要がある。この節では、このために計画ルールの満たすべき条件を求める。

まず問題Aにおいて、制約条件 a)~d) は計画における技術的および外生的条件であるので、計画ルールとしては以下の3点である。

- (1) 計画時点を基準にして、将来時間 T までを計画対象とすること。
- (2) 目的関数として、この計画対象期間内における各時点の不便益のウェイトづけされた合計を採用すること。
- (3) この不便益のウェイトづけは、計画時点のウェイトを1とし、以後計画時点より τ 時間 ($0 \leq \tau \leq T$) 経過した時のウェイトは $\rho(\tau)$ とすること。

したがって、問題Aの最適解に従ってある時刻 $t(\leq T)$ まで来たとき、この計画ルールに基づいて立てられた都市施設のその後の最適配置の問題は次のようになる。

問題B

不便益の合計

$$\int_0^T \rho(\tau) \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^2 r_{il} d_i x_{il}(t+\tau) d\tau \dots\dots\dots (8.1)$$

を以下の制約のもとに最小化する $u_{il}(t+\tau)$, ($0 \leq \tau \leq T$) を求めよ。

- a) $\dot{x}_{il}(t+\tau) = u_{il}(t+\tau)$
 $u_{il}(t+\tau) \geq 0, i=1, 2, l=1, 2, \dots, n$ } (8.2)
- b) $\sum_{i=1}^n u_{il}(t+\tau) = \dot{D}_i(t+\tau), i=1, 2, \dots\dots\dots (8.3)$
- c) $\sum_{i=1}^2 k_i x_{il}(t+\tau) \leq s_i, i=1, 2, \dots\dots\dots (8.4)$
- d) $x_{il}(t) = x_{ij}^*(t), i=1, 2, l=1, 2, \dots, n \dots\dots (8.5)$

ただし、以上の問題において、 $x_{il}^*(t)$ は問題Aの最適解に沿った地区 l での時間 t における状態であり、 $\{\rho(\tau)\}_{\tau=0}^T$ および $\{\dot{D}_i(t+\tau)\}_{\tau=0}^t$ は、問題Aにおける $\{\rho(t)\}_{t=0}^T$ および $\{\dot{D}_i(t)\}_{t=0}^T$ にそれぞれ等しい。

問題Aの解を $\{x^*(t)\}_{t=0}^T = \{(x_{1l}^*(t), x_{2l}^*(t))_{l=1}^2\}_{t=0}^T$ とし、問題Bの解を $\{\hat{x}(t+\tau)\}_{\tau=0}^T = \{(\hat{x}_{1l}(t+\tau), \hat{x}_{2l}(t+\tau))_{l=1}^2\}_{\tau=0}^T$ としたとき、両者が計画期間の共通部分で常に一致する、つまり、 $\{x^*(t)\}_{t=0}^T$ と $\{\hat{x}(t+\tau)\}_{\tau=0}^T$

とが任意の $t \in [0, T]$ に対して常に一致するための条件は、ダイナミックプログラミングにおける次の最適性の原理^{8),9)}を利用して求められる。

「最適政策は、初期状態と初期決定が何であろうとも以後の決定は初期決定から結果する状態に対して最適政策を構成する、という性質を有する」。

問題Aにおける目的関数は時間的に加算的であることを考慮に入れてこの最適性の原理を用いれば、問題Aの解の1部である $\{x^*(t)\}_{t=0}^t$ は問題Bにおける目的関数(8.1)を次の関数でおきかえた問題の解であることがわかる。

$$\int_0^{T-t} \rho(t+\tau) \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^2 r_{il} d_i x_{il}(t+\tau) d\tau \dots\dots\dots (8.6)$$

この問題における解と問題Bにおける解の1部 $\{\hat{x}(t+\tau)\}_{\tau=0}^t$ とが常に一致するのは、仮定(7.3)と(7.4)のもとでは、次の条件が満たされている場合に限られることがわかる。

$$T \geq t \dots\dots\dots (8.7)$$

$$\rho(t+\tau) = \alpha(t)\rho(\tau), 0 \leq \tau \leq T-t \dots\dots\dots (8.8)$$

ここに t は式(7.6)の左側の不等式を満足する T の下限である。もしも都市施設は永久に増大し続ける、つまり

$$\dot{D}_i(t) > 0, i=1, 2, 0 \leq t \leq \infty \dots\dots\dots (8.9)$$

とすれば、式(8.7)より、

$$T = \infty \dots\dots\dots (8.10)$$

でなければならない。また、式(8.8)が任意の t に対して常に満たされるのは、次の場合に限られる。

$$\rho(t) = e^{\beta t} \dots\dots\dots (8.11)$$

また、仮定(8.9)と式(8.11)のもとに問題Aが解を持つのは関数 $\rho(t)$ が時間とともに収束する、つまり、 $\beta < 0 \dots\dots\dots (8.12)$

の場合に限られるということもわかる。

以上より、問題Aが計画の問題として論理的完結性を持つのは、計画対象期間 T が条件式(8.7)を満たすほど十分長く、かつ、便益のウェイト関数 $\rho(t)$ が指数関数である場合に限られることがわかった。

ところで、ウェイト関数が式(8.11)と(8.12)を満たす場合には、ウェイトの時間的な低減速度はだんだん小さくなる。したがって、式(7.1)で定義された両施設の混在率 θ_l は、たとえば

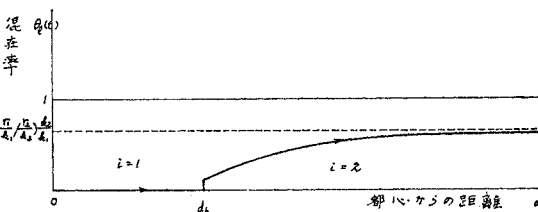


図-13 両施設の混在率 $\theta_l(t)$

$$\dot{D}_1(t) = r \dot{D}_2(t), \quad 0 \leq t \leq \infty \dots\dots\dots(8.13)$$

のときには、図-13 のように時間とともに

$$\frac{1}{r} \left(\frac{r_1}{k_1} / \frac{r_2}{k_2} \right) \frac{k_2}{k_1}$$

に下から漸近して行くことがわかる。

9. 地価の経年変化

第3節において、終端条件における乗数 λ_l は、計画期間の初期時点で地区 l の面積を単位量増大したときに減少させる目的関数の量という意味において、地区 l における単位面積当りの計画初期における地価を表していることを述べた。この節では、この地価の経年変化 $\lambda_l(t)$ を分析する。各人が将来を完全に見とおして行動するかぎり、この地価 $\lambda_l(t)$ を各時間 t において提出し各人の自由に各施設の建設地を選択させるという方法によっても最適配置プロセスが実現するという意味において、地価 $\lambda_l(t)$ とフィジカルな最適配置プロセス $x^*(t)$ とは双対の関係にある。

計画の初期時間 $t=0$ における地価の値を $\lambda_l(0)$ とおくと、これは式 (6.28) と (6.29) で与えられる。一方、時間 t における地価 $\lambda_l(t)$ は問題Bにおける終端条件の乗数として求まる。問題AとBとを比較すれば $\lambda_l(t)$ は式 (6.28) と (6.29) より次のようになることがわかる。

$$\lambda_l(t) = 0, \quad l = k, k+1, \dots, n \dots\dots\dots(9.1)$$

$$\lambda_l(t) - \lambda_{l+1}(t) = (r_1/k_1)(d_{l+1} - d_l)(\sigma(T) - \sigma(t_{1l}^* - t)), \quad l = 1, 2, \dots, k-1 \dots\dots\dots(9.2)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t_{1l}^* - t) &= \int_0^{t_{1l}^* - t} e^{-\beta\tau} d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_{1l}^* \\ \sigma(t_{1l}^* - t) &= \sigma(0) = 0, \quad t_{1l}^* \leq t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9.3)$$

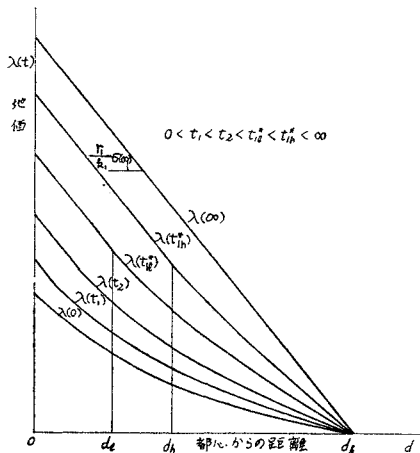


図-14 地価の経年変化

よって地価 $\lambda_l(t)$ は時間とともに増大し、都心からの距離に関しては常に減少している。また、すでに $i=1$ であつた地区では地価は都心からの距離に対して、 $(r_1/k_1)\sigma(T)$ の割合で減少している。よって $\lambda_l(t)$ は図-14 のように描ける。

この図においては $\lim(k_1 D_1(t) + k_2 D_2(t)), t \rightarrow T = \infty$ が有限な値のときを想定しているが、もしもこれが無限大ならば図における d_k も無限に都心から遠くなる。図-10 と図-14 とを比較すれば、ある地区が現在空地を有していても、その土地が将来使用される可能性があるかぎり、その地区の現在の地価は正の値を持っていることがわかる。このことは、時間の入らない静的な計画においては使用しつくされない財は常に0の価格しか持たないことと対照的であり重要な差異である。

10. 結 論

都市施設を仮に2種類のみと仮定し、その都市が時間とともに成長して行く場合に長期的にみて最適な施設配置過程の一般解を求め、その分析を行った。最適配置パターンについての結論を要約すると次のようになる。

- (1) 単位面積当りの効用の都心からの距離に対する低減率の大きい方の施設は都心から外側にむかって建設されはじめる。
- (2) 低減率の小さい方の施設は都心よりある距離をもつた地区から外側にむかってその内部に空地を混在させながら建設されて行く。この地区は、問題のパラメーターが与えられれば、判定条件 (6.18) より簡単に求まる。
- (3) 計画期間の途中のある時刻において、低減率の大きい施設の一番外側と低減率の小さい施設の一番内側が接し、途中で空地は存在しなくなる。この時刻は、連立方程式 (6.12) と (6.16) を解くことにより簡単に求まる。
- (4) それ以後は、低減率の大きい施設は低減率の小さい方の施設が残して行った空地を順次うめつくしながら外側に向って建設されて行く。よって、この地域では両施設は混在して建設される。
- (5) したがって、計画期間中のある時間までは両施設間に大きな空地が存在する。
- (6) この空地の存在する期間とその空地の大きさは、計画期間が長いほど大きく、また両施設間における単位面積当りの便益の都心からの距離に対する低減率の差が大きいほど大きくなる。しかしながら、その期間は計画期間が無敵大だとしても、便益に対する時間的ウェイトが時間とともに0に収束して行くかぎり、有限な値を持つ。

(7) また、空地の大きさは、その低減率の大きい施設の時間的増加量が大きいほど大きくなる。

(8) 設定された問題における計画ルールが自己矛盾を持たないためには、計画期間の長さは条件式(8.7)を満たすほど十分大きくなければならず、便益に対する時間的ウェイト関数は時間 t の指数関数となっていなければならない。

(9) 以上の施設の最適配置プロセスと双対の関係にある各地区の地価は、空間的には都心からの距離の減少関数であり、時間的には常に増加する。ただし、時間の入らない静的な計画と違って、ある地区が現在空地であってもその土地が将来使用される可能性があるかぎり、その地区の現在の地価は正の値を持つ。

都市施設の長期的な最適配置過程は以上のような特性を持っているが、このような配置過程は短期的視野に基づく計画の繰り返しによる配置パターンと全く異なったものであることは明らかである。両者の効率性の差は時間が経つに従って大きくなるのがわかる。よって、都市施設配置計画に際しては、毎年の都市施設増加量の顕著な都市、単位面積当りの便益の都心からの距離に対する低減率の差が大である各種の都市施設をもつ都市である場合には、長期的計画視野にたった計画が必要である

ことが理解できる。

もちろん、以上の結論は非常に単純化された数理モデルの分析より得られたものであり、この結果をそのまま現実の都市計画に適用することは困難である。このためには単純化された多くの仮定をさらに一般化して研究をする必要があるが、特に施設の破壊つまり再開発を考慮した場合の同様な分析を次の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) Alonzo, W. : Location and Land Use, Harvard University Press, 1964.
- 2) Arrow, K.J. and Kurtz, M. : Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy, The Johns Hopkins Press, 1970, pp. 26-57.
- 3) ポントリャーギン他著(関根智明訳) : 最適過程の数学的理論, 総合図書, 昭和42年, pp. 269-328.
- 4) Hestenes, M.R. : Calculus of Variations and Optimal Control Theory, John Wiley & Sons, Inc., 1966, pp. 352-374.
- 5) 同上 2).
- 6) Kamien, M.I. and Schwartz, N.L. : Sufficient Conditions in Optimal Control, Journal of Economic Theory 3, pp. 207-214, 1971.
- 7) 同上 2), pp. 33-36.
- 8) Bellman, R.E. : Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957, p. 83.
- 9) 同上 3), p. 18.

(1973.7.12・受付)