

常時微動測定による構造物の振動性状解析

AN ANALYSIS OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF STRUCTURES
BY AMBIENT VIBRATION MEASUREMENTS小坪 清真*・鳥野 清**
By Seima Kotsubo and Kiyoshi Uno

1. 緒 言

わが国では本州四国連絡橋をはじめとして、多くの長大橋梁が計画され建設されているが、世界有数の地震国であるため、特にこれらの長大橋梁の耐震設計が重要な問題となってくる。構造物の耐震設計上必要となる振動性状として解明すべき重要な要素は、固有振動数、変位モード、減衰定数である。

これら振動性状の測定法として、従来から一般に使用されている起振機による振動試験は、現在、最も正確な方法であるが、実験設備、日数など多大の労力を必要とするのが欠点であって、振動性状の簡単な測定法が望まれる。

通常、地盤には雑微動が存在しているが、この雑微動をなだらかな定常ランダム波であると仮定すれば、これに対する構造物の動的応答を統計的に処理し、構造物の振動性状を解析することができる。

この常時微動による統計的解析方法で構造物の減衰定数、固有振動数、振動モードなどを求めた例は、国内^{1)~4)}および外国^{5),6)}に見当るが、解析理論、測定および解析上の問題点の指摘などが必ずしも明白でないばかりか、他の方法による振動性状の測定値との比較などによるその信頼性のチェックが十分とはいえない。

この論文は、常時微動による振動モード、減衰定数などの解析に種々の解析法を提案するとともに、名護屋大橋（全長 258 m のディビダグ道路橋）、高千穂橋梁（全長 313.6 m の3 径間連続トラス鉄道橋）において常時微動測定を行い、その結果から振動性状（固有振動数、変位モード、減衰定数）を求め、起振機による振動試験の結果と比較し、その信頼性および有効性のチェックを行ったものである。また、名護屋大橋においては定

常な状態として車の走行していない夜間の常時微動測定を行い、また、非定常な状態として昼間、車の走行時の振動を測定し、いずれも統計的処理を行い、その測定条件の相違の影響や、解析方法について種々比較検討した結果を示した。

2. 解析理論^{7)~12)}

(1) 固有振動数

定常ランダム過程における時間関数を $y(t)$ とし、そのフーリエ変換を $Y(i\omega)$ とすると次の関係式が得られる。

$$Y(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \dots \dots \dots (1.1)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(i\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \dots \dots \dots (1.2)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot y(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(i\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(i\omega) \cdot Y(-i\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(i\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

しかるに、 $|Y(i\omega)|^2 = |Y(-i\omega)|^2$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |Y(i\omega)|^2 d\omega \dots \dots \dots (1.3)$$

ゆえに、 $y(t)$ の時間方向に求めた二乗平均 $\overline{y(t)^2}$ を考えると式 (1.3) は

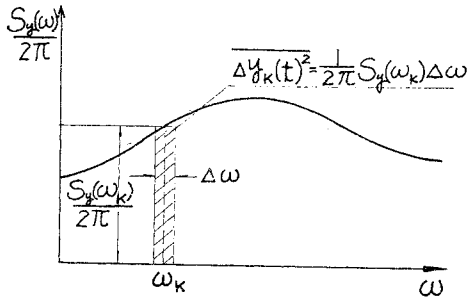
$$\begin{aligned} \overline{y(t)^2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{|Y(i\omega)|^2}{T} d\omega \dots \dots \dots (1.4) \end{aligned}$$

式 (1.4) において $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|Y(i\omega)|^2}{T} = S_y(\omega)$ とおくと式 (1.3) は次式となる。

$$\overline{y(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega \dots \dots \dots (1.5)$$

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科

** 学生会員 工修 九州大学大学院博士課程土木専攻



$$\overline{y(t)^2} = \lim \sum \overline{\Delta y_k(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_y(\omega) d\omega$$

図-1 $\overline{y(t)^2}$ と $S_y(\omega)$ との関係

式 (1.5) の $S_y(\omega)$ は $y(t)$ のパワースペクトルと呼ばれるものであり、フーリエ変換 $Y(i\omega)$ の絶対値の二乗関数である。

図-1 は縦軸 $(1/2\pi) \cdot S_y(\omega)$ と $\Delta\omega$ との積が振動率 ω_k における $\overline{\Delta y(t)^2}$ の全体の $\overline{y(t)^2}$ への寄与を表している。つまり、パワースペクトルを物理的に考えると、ある振動数 ω_k における $S_y(\omega_k)$ は不規則関数 $y(t)$ が中心振動数 ω_k の帯域フィルターによって濾過されたときに通過する平均パワーとみなせる。したがって、パワースペクトルから種々の振動数の中にパワーがどのように分布しているかを知ることができる。一般に、広帯域をもつ平坦なランダム波が入力の場合には、構造物においてその固有振動数における変位が特に卓越して、構造物の固有振動数に相当する振動数における応答のパワースペクトルにピークを生じているはずであるから、パワースペクトルのピークに相当する振動数を読みとることによって、その構造物の固有振動数を求めることができる。

(2) 変位モード

不規則外力による多自由度系の変位応答を考える。構造物の s 次の振動型を $Y_s(x)$ 、固有円振動数を n_s 、基準座標を a_s 、減衰定数を h_s 、地動加速度を $\ddot{\phi}(t)$ 、単位長重量を $w(x)$ とする。この多自由度系が地動加速度 $\ddot{\phi}(t)$ を受ける時の変位 $y(x, t)$ を次式のように表わすことができる。

$$y(x, t) = \sum_{s=1}^l a_s Y_s(x) \dots\dots\dots(2.1)$$

系の運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2g} \int_0^l w(x) \{\dot{y}(x, t)\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^l \dot{a}_s^2 \int_0^l \frac{w(x)}{g} \cdot Y_s^2(x) dx \dots\dots\dots(2.2)$$

ひずみエネルギー V は

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^l a_s^2 n_s^2 \int_0^l \frac{w(x)}{g} \cdot Y_s^2(x) dx \dots\dots\dots(2.3)$$

一般力 Q_s は

$$Q_s = - \int_0^l \frac{w(x)}{g} \cdot Y_s(x) \cdot \ddot{\phi}(t) dx$$

$$= - \ddot{\phi}(t) \int_0^l \frac{w(x)}{g} \cdot Y_s(x) dx \dots\dots\dots(2.4)$$

式 (2.2), (2.3), (2.4) を Lagrange's Equation に代入し、減衰定数を考慮すると、基準座標 a_s に関する次の方程式が得られる。

$$\ddot{a}_s + 2 h_s n_s \dot{a}_s + n_s^2 a_s = - \beta_s \ddot{\phi}(t) \dots\dots\dots(2.5)$$

ただし

$$\beta_s = \frac{\int_0^l w(x) \cdot Y_s(x) / g dx}{\int_0^l w(x) \cdot Y_s(x)^2 / g dx} \dots\dots\dots(2.6)$$

式 (2.5) に $a_s = A_s e^{i\omega t}$ 、 $\ddot{\phi}(t) = e^{i\omega t}$ を代入すると基準座標 a_s の s 次の周波数応答関数である $A_s(i\omega)$ が次式で与えられる。

$$A_s(i\omega) = - \frac{\beta_s}{n_s^2 - \omega^2 + 2 i h_s n_s \omega} \dots\dots\dots(2.7)$$

次に、式 (2.1) で $y(x, t) = H(i\omega) e^{i\omega t}$ とおけば x 点における応答変位 $y(x, t)$ の周波数応答関数 $H(i\omega)$ を次式のように求めることができる。

$$H(i\omega) = \sum_{s=1}^l A_s(i\omega) Y_s(x)$$

$$= - \sum_{s=1}^l \frac{\beta_s Y_s(x) \{ (n_s^2 - \omega^2) - 2 i h_s n_s \omega \}}{(n_s^2 - \omega^2)^2 + 4 h_s^2 n_s^2 \omega^2} \dots\dots\dots(2.8)$$

したがって、 $H(i\omega)$ の絶対値の2乗は次式となる。

$$|H(i\omega)|^2 = \left\{ \sum_{s=1}^l \frac{\beta_s Y_s(x) (n_s^2 - \omega^2)}{(n_s^2 - \omega^2)^2 + 4 h_s^2 n_s^2 \omega^2} \right\}^2$$

$$+ \left\{ \sum_{s=1}^l \frac{\beta_s Y_s(x) \cdot 2 h_s n_s \omega}{(n_s^2 - \omega^2)^2 + 4 h_s^2 n_s^2 \omega^2} \right\}^2 \dots\dots\dots(2.9)$$

図-2 のように、減衰定数 h_s が十分小さく、かつ固有円振動数が離れている場合には、 $\omega = n_s$ における $|H(i\omega)|^2$ の値におよぼす影響は s 次の振動によるものが最も大きく他の次数の振動によるものは小さいから、式 (2.9) は近似的に次式で表わされる。

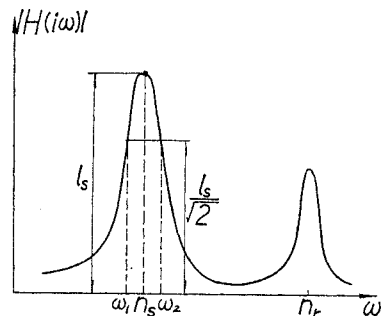


図-2 パワースペクトル曲線の最大値が求められる場合

$$|H(in_s)|^2 \cong \frac{\beta_s^2 Y_s(x)^2}{n_s^4} \cdot \frac{1}{4 h_s^2} \quad (s=1, 2, \dots)$$

.....(2.10)

いま、外力のパワースペクトルを $S_f(\omega)$ 、任意点 x の変位のパワースペクトルを $S_y(\omega)$ とすると、 $y(t)$ が定常状態のときには次式の関係がある。

$$S_y(\omega) = |H(i\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

式 (2.11) に式 (2.10) を代入すると、 $\omega = n_s$ における応答のパワーとして次式が得られる。

$$S_y(n_s) = \frac{\beta_s^2 Y_s(x)^2}{4 h_s^2 n_s^4} \cdot S_f(n_s) \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

式 (2.12) を変形すると

$$|Y_s(x)| = \frac{2 h_s n_s^2}{\beta_s} \sqrt{\frac{S_y(n_s)}{S_f(n_s)}} \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

すなわち、構造物の固有円振動数 n_s における応答のパワースペクトルの平方根分布 $\sqrt{S_y(n_s)}$ は s 次の振動型の絶対値 $|Y_s(x)|$ に比例することになる。したがって、この理論から多くの測点における構造物のパワースペクトルを求めることにより振動型を推定することができる。

ただし、式 (2.13) で求められる振動型は絶対値であるから、その正負の判別をしなければならない。そこで、理論的位相判別法として次の方法を考えてみた。

各測点の変位 $y_i(t)$ をフーリエ級数に展開すると次式で表わすことができる。

$$y_i(t) = \sum_k (C_k \sin \omega_k t + D_k \cos \omega_k t)$$

いま、 $\omega_k = n_s$ なる s 次の固有円振動数に対応するフーリエ係数 C_s, D_s を求めれば、位相角 φ_s は次式で得られることになる。

$$C_s \sin n_s t + D_s \cos n_s t = \sqrt{C_s^2 + D_s^2} \sin(n_s t + \varphi_s)$$

.....(2.14)

$$\varphi_s = \tan^{-1} \frac{D_s}{C_s} \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

この式より、 $\omega = n_s$ における各測点の位相角 φ_s を求め、これと基準点の位相角との差より、考慮点のモードが基準点に対して同位相であるか、逆位相であるかを判別することができる。

なお、アナログ的な位相判別法として、各測点のデータ $y_i(t)$ を、固有振動数を中心周波数とする狭帯域多チャンネルバンドパスフィルタに通し、出力をオシログラフに記録することによって、位相判別を行う方法をも併用した。

(3) 減衰定数

減衰定数が小さいか、あるいは相隣る固有振動数が離れている場合には、half power method によりパワースペクトル曲線から減衰定数を求めることができる。

しかし、共振振動数におけるパワースペクトルの値 (最大ピーク値) が完全に得られない場合にはこの half power method を使用することができない。そこで、この場合の減衰定数推定法についても、half power method とあわせて述べる。

a) パワースペクトル曲線より算出する方法 (half power method)

① パワースペクトルの最大値がとれる場合(図—2)

前述の (2) 共振時変位モードで示した関係から $\omega = n_s$ の近傍では周波数応答関数の s 次の絶対値は近似的に次式で表わされる。

$$|A_s(i\omega) \cdot Y_s(x)| \div |H(i\omega)| = \frac{|\beta_s \cdot Y_s(x)|}{n_s^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{n_s^2}\right)^2 + 4 h_s^2 \frac{\omega^2}{n_s^2}}} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

$\omega = n_s$ におけるピーク値は

$$|A_s(in_s) \cdot Y_s(x)| \div |H(in_s)| = \frac{|\beta_s \cdot Y_s(x)|}{2 h_s n_s^2} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

$|H(in_s)|$ の $1/\sqrt{2}$ なる点の振動数を $\omega_1, \omega_2 (\omega_2 > \omega_1)$ とすると式 (3.1) から次の関係が成り立つ。

$$\frac{|\beta_s Y_s(x)|}{n_s^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{n_s^2}\right)^2 + 4 h_s^2 \frac{\omega_1^2}{n_s^2}}} = \frac{|\beta_s Y_s(x)|}{n_s^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_2^2}{n_s^2}\right)^2 + 4 h_s^2 \frac{\omega_2^2}{n_s^2}}} = \frac{|\beta_s Y_s(x)|}{2 \sqrt{2} h_s n_s^2} \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

いま、 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ とすると

$$\omega_1 = n_s - \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \omega_2 = n_s + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$\left(\frac{\omega_1}{n_s}\right)^2 = \left(1 - \frac{\Delta\omega}{2 n_s}\right)^2 \doteq 1 - \frac{\Delta\omega}{n_s}$$

式 (3.3) より

$$\left(1 - \frac{\omega_1^2}{n_s^2}\right)^2 + 4 h_s^2 \left(\frac{\omega_1^2}{n_s^2}\right) = 8 h_s^2$$

結局、上式は次のようになる。

$$\left(\frac{\Delta\omega}{n_s}\right)^2 - 4 h_s^2 \left(\frac{\Delta\omega}{n_s}\right) - 4 h_s^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

式 (3.4) を解くと、

$$\frac{\Delta\omega}{n_s} = 2 h_s^2 + 2 h_s \sqrt{1 + h_s^2} \doteq 2 h_s + 2 h_s^2 + h_s^3 \doteq 2 h_s$$

したがって、減衰定数は次式で求められる。

$$h_s = \frac{\Delta\omega}{2 n_s} \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

② パワースペクトルの最大値がとれない場合

パワースペクトルがプロットされる間隔 Δf c/s は、Digital 間隔 Δt とデータ個数 N とにより決まるから、一般的には固有円振動数に一致する点のパワースペクトル

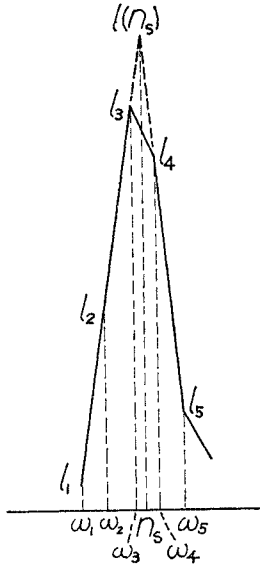


図-3 パワースペクトル曲線の最大値がとれない場合

ルが得られることはまれであろう。この場合の一解決策として、 $4t$ と N を変化させてパワーの計算をやり直すことも考えられるが、いたずらに演算時間を増加させることになるので、著者らは次のような方法を採用した。

いま、図-3 に示すように、 s 次の共振点近傍におけるパワースペクトルが $\omega_1, \omega_2, \dots$ に対して l_1, l_2, l_3, \dots と得られたとすれば、 s 次の固有円振動数 n_s は ω_3 と ω_4 の間を l_3 と l_4 の大きさに反比例するものとして求めることができる。

次に、円振動数 $\omega_j (j=1, 2, \dots)$ におけるスペクトルの大きさ l_j , s 次の減衰定数 h_s , 固有円振動数 n_s の間の関係は式 (3.3) を用いて、 $S_f(\omega)$ を平坦であると仮定して次の形で表わされる。

$$\frac{l(n_s)}{\left\{1 - \left(\frac{\omega_j}{n_s}\right)^2\right\}^2 + 4h_s^2\left(\frac{\omega_j}{n_s}\right)^2} = l_j \dots\dots\dots(3.6)$$

ここに、 $l(n_s)$ は固有円振動数 n_s におけるスペクトルの大きさで未知である。

式 (3.6) において、スペクトル計算から種々の円振動数 ω_j に対して得られた l_j の値を代入すれば、 $l(n_s)$ と h_s とを未知とする式が多数得られるので、これらの式から最小二乗法により h_s を求めることができる。

b) 起振機による方法

構造物の減衰定数を求める方法は種々あるが、起振機によって構造物を共振させ、起振機を急停止させて、以後の減衰自由振動から減衰定数を求める方法は一般によく用いられる方法である。しかし、この方法は高次振動の減衰定数を求めにくい欠点をもっている。すなわち、モーターのスイッチを切った後、なお起振機は減速しながら回転し、停止するまで周期が徐々に変化する加振力を構造物に作用させる。したがって、高次の共振状態でスイッチを切ると、起振機が停止するまでに低次の振動も誘発され、高次の基準振動のみの減衰自由振動ではなくなる恐れがある。

実際、記録中にはモーター停止後の振動記録がスイッチ切断前の振動次数の周期とまったく異なり、低次の振動次数の減衰振動曲線に転化しているものもあった。

また、モーター停止前の減衰振動記録は、夏の自由振動ではなく、この部分の記録から減衰定数を求めることはできない。

上記の理由で、共振曲線または共振時変位モードから減衰定数を求める方法が、より正確であると思われる。

① 共振曲線より算出する方法

共振曲線の s 次の共振点の両側でピーク変位の $1/\sqrt{2}$ の変位を生ずる円振動数を $\omega_1, \omega_2 (\omega_2 > \omega_1)$ とし、共振円振動数を n_s とすれば、系の減衰定数 h_s は近似的に式 (3.5) のように次式で求められることは周知のとおりである。

$$h_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2n_s} \dots\dots\dots(3.7)$$

② 共振時変位モードより算出する方法

s 次の共振時における各点 i の変位の分布を Y_{si} とする。この Y_{si} をそのまま振動型とみなし、橋の変位 y_i を次式で表わす。

$$y_i = \sum_{s=1}^m a_s Y_{si} \dots\dots\dots(3.8)$$

構造物を質点系と考え、各質点 i の重量を W_i とすれば、運動エネルギー K は次式で表わされる。

$$K = \frac{1}{2g} \sum_{s=1}^m \dot{a}_s^2 \sum_{i=1}^m W_i Y_{si}^2 \quad (m \text{ は質点数}) \dots\dots\dots(3.9)$$

ひずみエネルギー V は s 次の基準振動の固有円振動数 n_s を用いて次式となる。

$$V = \frac{1}{2g} \sum_{s=1}^m n_s^2 a_s^2 \sum_{i=1}^m W_i Y_{si}^2 \dots\dots\dots(3.10)$$

起振機位置を q 点とし、起振力を $P = P_0 \sin \omega t$ とすれば a_s に対する一般力 Q_s は次式で示される。

$$Q_s = P_0 Y_{sq} \sin \omega t \dots\dots\dots(3.11)$$

s 次の減衰定数を h_s とし、速度に比例する減衰力を仮定し、Lagrange の運動方程式に K, V, Q_s を代入すれば

$$\ddot{a}_s + 2h_s n_s \dot{a}_s + n_s^2 a_s = \frac{P_0 Y_{sq}}{\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{si}^2} \sin \omega t \dots\dots\dots(3.12)$$

となり、これを解いて次式が得られる。

$$a_s = \frac{P_0 Y_{sq} \sin(\omega t - \phi)}{n_s^2 \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{si}^2 \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{n_s}\right)^2\right\}^2 + 4h_s^2 \left(\frac{\omega}{n_s}\right)^2}} = \bar{a}_s \sin(\omega t - \phi) \dots\dots\dots(3.13)$$

共振時には $\omega = n_s$ であるから、いま、 d 点の実測変位振幅を \bar{y}_{sd} とすれば、共振時には s 次の振動のみが卓越しているから、他のモードを省略して、 \bar{y}_{sd} が次式で表わされる。

$$\bar{y}_{sd} = \bar{a}_s Y_{sd} = \frac{P_0 Y_{sq} Y_{sd}}{2h_s n_s^2 \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{si}^2 \right\}} \dots\dots(3.14)$$

したがって、減衰定数 h_s は次式で得られる。

$$h_s = \frac{P_0 Y_{sq} Y_{sd}}{2 \bar{y}_{sd} n_s^2 \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{si}^2 \right\}} \dots\dots\dots (3.15)$$

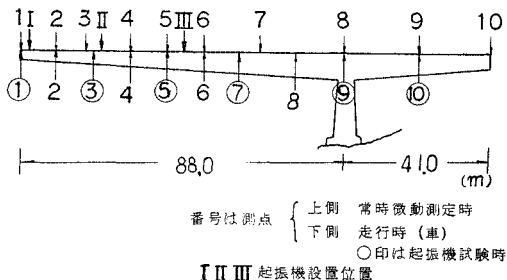
この式より h_s を求めるには、 Y_{sq} 、 Y_{sd} ができるだけ大きい測点を利用することが望ましい。また、 $q=d$ としてもよく、振動型 Y_{si} として共振時実測変位振幅 \bar{y}_{si} をそのままとってもよい。

この方法では起振力、および重量分布ならびに変位分布が既知でなければならない。

3. 名護屋大橋に対する実測例

(1) 概要

名護屋大橋（佐賀県）は中央スパン長 176 m のディビダグ方式箱型断面桁の道路橋で、その一般形状を図—4 に示す。図中の番号は各測点の位置であり、I、II、III は起振機の設置位置である。試験内容は起振機試験、常時微動試験とも橋軸直角水平方向および上下方向振動試験である。また、車の走行時における上下方向振動の測定も行い、定常ランダム過程と考えられる常時微動試験の結果と、非定常ランダム過程と考えられる車走行時の試験結果とを比較検討した。



図—4 名護屋大橋

(2) 起振機試験¹³⁾

起振機を図—4 のように設置し、橋梁の固有振動数、振動型、減衰定数を求めた。測点は図中の下側○印の番号である。この試験の時点においては道路は未舗装であった。使用した機械器具は次のとおりである。

- (イ) 起振機 自重 1.5 ton 1 台
起振力 (50 f² kg : f は振動数)
- (ロ) 電磁式加速度計 6 台
固有振動数 3 c/s, 感度 6 mV/gal
- (ハ) 直流増幅器 6 ch.
最大出力 ±1 Volt, 感度 40 db
周波数特性 DC~2 500 c/s
- (ニ) ローパスフィルター (0~12 c/s) 6 ch.

- (ホ) 直記式電磁オシログラフ (ガルバ固有振動数 2 500 c/s) 1 台

(3) 常時微動および車の走行時振動測定

a) 使用した器具

- (イ) 速度型電磁式地震計
水平動用 4 台, 上下動用 4 台
固有振動数 0.3 c/s, 感度 2 V/kine
周波数特性 0.5 c/s 以上平坦
- (ロ) 直流増幅器 (起振機試験時と同じ)
- (ハ) データレコーダー テアック R-200 4 ch. 1 台
最大入力 ±1 Volt
- (ニ) オシロスコープ (モニター用) 1 台
- (ホ) 万能フィルター 1 台
切断特性 40 db/oct
周波数特性 DC~10 kc ±2 db 以内

b) 測定概要

常時微動による構造物の振動性状の解析理論は定常ランダム過程の上に立っているから、特定の振動数が卓越する雑音の少ない時間、一般には夜間に測定するほうがよい。そこで、真夜中の車の走行していないときに常時微動測定を行った。

一方、昼間に乗用車を走らせ、そのときの上下振動を測定し、夜間測定の常時微動解析結果と比較し、非定常な過程における測定が変位モード、固有振動数、減衰定数におよぼす影響を調べた。

測定に当たっては、全測点を同時に測定することが好ましいが、データレコーダーは 4 ch. しかないので、常に測点③を基準点にとり、この基準点のパワーと各測点のパワーとの比較により振動モードの大きさを求め、また、基準点③と各測点との位相差より変位モードの正負を求めた。

基準点の選び方としては、なるべくパワーの大きい測点を選ぶ必要がある。しかし、各測点のパワーは次数により異なるため、対称振動、逆対称振動を考慮して基準点が振動モードの Node にならないよう少なくとも 2 個所以上設けることが望ましかった。

なお、データレコーダーの雑音レベルが大きいのでデータレコーダーの許容入力電圧いっぱいまで増幅し記録を行った。しかし、記録中に測定信号がデータレコーダーの許容入力電圧を超過しないように、増幅器からの出力をデータレコーダーと並列にオシロスコープに入れ、その最大電圧を監視しながら測定記録を行った。

測定記録時間は常時微動において、同一個所を 1 回につき 2~3 分間とり、これを 2~3 回繰り返し記録した後、基準点③だけを共通点として残し次の測点に移動した。また、常時微動測定においては微小振動を増幅して

測定記録を行うことから、往々にして高周波ノイズが混入するが、求めようとしている振動数域から離れているために問題とはならなかった。

走行時振動においては、車を 10 km/h, 30 km/h の 2 種類の速度で走行させ、振動が始まってから終るまで、車の橋上通過時間約 1 分間程度記録を行った。

c) データ処理

データレコーダーに記録されたデータはすべての次数の振動を含んでいる。まず、この生のデータをそのまま digital 化した場合と必要以上の高周波（本実験では約 10 c/s 以上の振動数）をカットして digital した場合とのスペクトルの違いを調べてみた。その結果、両者にはたいした相違はないことがわかり、本実験では高周波をカットする必要は認められなかった。

各測点についてパワースペクトル曲線を描くと、変位モードの大きい測点には目立って大きいパワースペクトルが現われているから、求めようとする固有振動数は容易に判別できる。しかし、低次のパワーが高次のパワーに比べて極端に大きい場合には高次のスペクトルが判然としないことがある。この場合にはすでに判別できた固有振動数以下をハイパスフィルターでカットした後、電圧の低い高次振動を増幅して digital 化することにより、高次のパワースペクトルのピークを明りょうにすることができた。理想的には各次の固有振動数を中心とする狭い振動数帯域の band pass filter にかければ、各次数のものだけが明りょうにあらわれて都合がよい。

この名護屋大橋の場合、フィルター処理をしなくても固有振動数の判別ができたが、1 次カットを行うと、2 次以上のパワースペクトルのピークがなおいっそう明りょうになった。2 次以上のパワースペクトルの大きさはほぼ同じ程度であり、digital 化する前に、さらにフィルターで low cut する必要はなかった。名護屋大橋では 2 次以上のパワースペクトルを計算するのに、1 次をフィルターでカットしたデータを増幅解析したものと、1 次をフィルターでカットしないでそのままのデータを解析したものとで同じ結果が得られた。

図-5 は常時微動測定より得られたデータを各測点ごとに $4t=1/60$ 秒刻みで、データ個数 $N=2048$ 個としたときのパワースペクトルの例である。このスペクトルは高周波 cut をしていないが、各次数ともピークがよく立ち上っており、固有振動数の判別も容易であった。

表-1 は名護屋大橋の常時微動による固有振動数の解析結果であり、起振機試験による結果とよく一致していることがわかる。

なお、パワースペクトルの解析法として自己相関関数から求める方法と高速フーリエ変換 (F.F.T.)¹⁴⁾ でフーリエ係数を求める方法とがあるが、両方法によるパワー

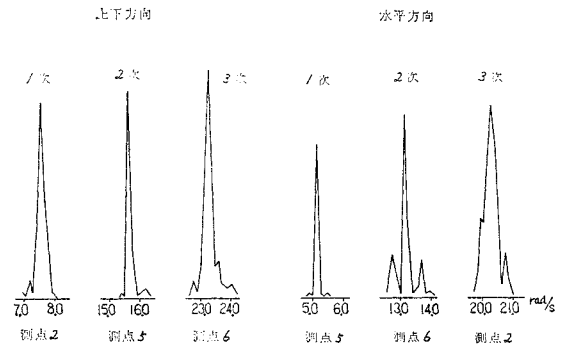


図-5 名護屋大橋のパワースペクトル

表-1 名護屋大橋固有振動数 (c/s)

方 向	次 数	起振機 試 験	ス ペ ク ト ル 解 析		
			常 時 微 動	走 行 時 振 動	
				$N=1024$	$N=2048$
水 平	1	0.79	0.80		
	2	2.22	2.11		
	3	3.16	3.22		
上 下	1	1.10	1.21	1.10	1.12
	2	2.44	2.50	2.39	2.39
	3	3.45	3.69	3.47	3.46

スペクトルを比較したところ、F.F.T. によるものが演算時間の少ないばかりでなく、スペクトルに負値が生ぜず有利であった。

次に、車走行時の記録からパワースペクトルを求め、常時微動記録からの解析結果と比較してみた。この場合、各測点ごとにデータを $4t=1/50$ 秒刻みで $N=2048$ 個の場合と、 $N=1024$ 個の場合の 2 通りの sampling を行い、データ個数の相違の影響を検討した。

表-1 には走行時振動より上記 2 通りのデータ個数の場合のパワースペクトルから求められた上下振動の固有振動数が示されているが、走行時振動からも、起振機試験の結果とよく一致する値が得られていることがわかる。

一般に、非周期性の波動のスペクトルを計算する場合には有限時間で考えるため、真のスペクトルに対して低周波成分が減少し、高周波成分が強調される。そこで真のスペクトルの低周波成分を減少させず、高周波成分を強調しないような、あらかじめ特性のわかっている重み関数 (Window)¹⁵⁾¹⁶⁾ を考えれば真のスペクトルに近づくと思われる。しかしながら、この Window に何を選ぶかがむずかしい問題である。そこで、ここでは、走行時振動の解析において、 $4t=0.02$ 秒、 $N=2048$ 個のデータに周期 8.192 秒の三角波と sine 波の 2 種の Window をかけ、F.F.T. でパワースペクトルを計算し、比較検討を行って見た。

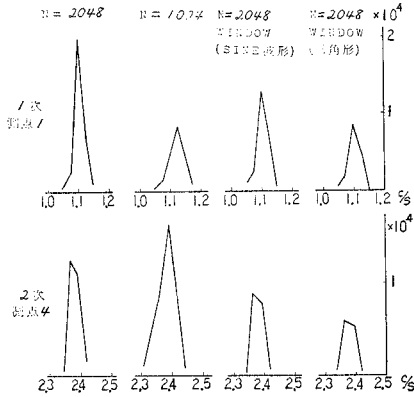


図-6 データ個数 N と Window によるパワースペクトルの変化

図-6 は走行時振動測定より得られたパワースペクトルの形状の、データ個数 N および Window による変化を示したものである。Window は $N=2048$ 個の場合にかけてみた。これを見ると、パワースペクトルは Window をかけると、かけない場合に比べてピーク値が下るだけで形状はほとんど同様である。

一方、2.(3) a) ②で示したように、パワースペクトルの刻み Δf はデータの刻み Δt とデータ個数 N との関係、すなわち、 $\Delta f = 1/(\Delta t \times N)$ で決まってくる。相隣る3個のパワースペクトルの中央のパワーが最大で、その両側のパワーの値がほぼ同じ程度の値になっている場合には、その中央のパワーに相当する振動数は構造物の固有振動数であり、そのときのパワーはほぼ真のパワーのピーク値とみなすことができよう。しかし、固有振動数におけるパワースペクトルの値がプロットされない場合が生ずることが一般であろう。図-6 を見ると、測点④の2次振動において $N=2048$ 個の場合に、ピーク値がプロットされていないのが明らかである。このような場合に、真の固有振動数は相隣る大きなパワーの中

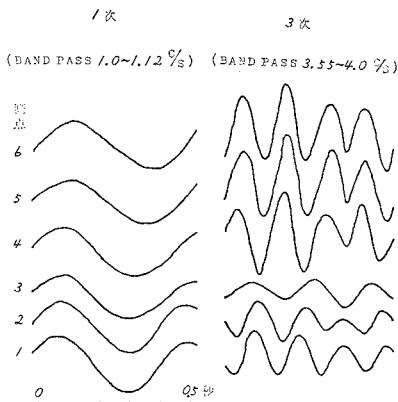


図-7 位相判定 (2) BAND PASS FILTER による処理

表-2 各測点の基準点③に対するパワースペクトルの平方根の比 (走行時振動)

次 数	測 点	$\Delta t=0.02$ 秒 $N=2048$ 個			$\Delta t=0.02$ 秒 $N=1024$ 個 Window(無)
		Window (有)		Window (無)	
		Sine 波形	三角形		
1	1	1.45	1.46	1.43	1.48
	2	1.31	1.31	1.31	1.31
	3	1.00	1.00	1.00	1.00
	4	0.82	0.83	0.78	0.74
	5	0.44	0.44	0.44	0.45
	6	0.31	0.31	0.31	0.32
	7	0.36	0.37	0.29	0.39
	8	0.05	0.05	0.05	0.05
	9	0.00	0.00	0.00	0.00
	10	0.02	0.02	0.02	0.02
2	1	0.22	0.22	0.24	0.24
	2	0.73	0.73	0.74	0.75
	3	1.00	1.00	1.00	1.00
	4	1.24	1.24	1.24	1.25
	5	0.84	0.84	0.84	0.84
	6	0.65	0.65	0.65	0.65
	7	0.55	0.55	0.55	0.55
	8	0.15	0.15	0.15	0.15
	9	0.01	0.01	0.00	0.01
	10	0.06	0.06	0.07	0.06

表-3 位相判定 (1) 基準点③に対する各測点の位相角 (度) (走行時振動 $N=2048$ 個, Window (無))

次 数	固 有 振 動 数 (c/s)	測 点	測点										
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1.099	スペクトル解析	度	3	1	0	76	3	0	73	3	3	179
		符号	+	+	+	(+)	+	+	(+)	+	+	-	
2	2.393	スペクトル解析	度	9	1	0	19	1	0	8	1	6	179
		符号	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	
3	3.467	スペクトル解析	度	149	142	0	22	3	3	9	1	2	179
		符号	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	
4	6.128	スペクトル解析	度	9	2	0	13	180	178	162	175	163	0
		符号	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	
		起振試験	符号	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+

+ 同位相, - 逆位相

間にあり、また、そのときの真のパワーは、その相隣るパワーの大きいほうよりも大きいものと思われる。この場合、振動型を求めるに当り、相隣るパワーの大きいほうのパワーをそのままとって振動型を計算した場合に、どのような誤差を生ずるかを調べてみた。表-2 は処理条件をいろいろ変えて、上記の方法で各測点のパワースペクトルを求め、基準点③のパワースペクトルに対する比の平方根を示したものである。表-2 より明らかなように、各次数とも各測点の値の基準点③に対する比はよく一致していることがわかる。したがって、固有振動数に相当する点にパワーのピーク値がプロットされない場合に、大きいほうのパワーの値をとって、振動型を計算

しても、変位モードに対する誤差は小さく、また、本実験に関する限り、Window をかける必要性は認められなかった。

表-3 は変位モード作図に必要な各測点の位相判定を式 (2.15) に示したような各固有振動数におけるフーリエ係数より求めた位相差 (度) で行ったものである。位相差は 90 度以内であれば基準点③と同位相 (+), 90°~180° であれば基準点③と逆位相 (-) であるとした。1 次振動の測点④と⑦では完全に同位相とはいえないが、位相差が 90° 以内であることを考えて、同位相とみなしたが、この解析結果は起振機試験結果とよく一致している。

図-7 は位相判定を行う今一つの方法として、生のアナログデータを各測点同時に、固有振動数を中心周波数として狭帯域の多チャンネルバンドパスフィルターを通してオッシロに記録したものである。これからも容易に位相判別を行えることがわかる。なお、図-7 で 1 次はすべての測点で同位相、3 次では測点③をはさんで逆位相となっているが、測点③だけが位相が判然としない。これは、測点③がちょうど 3 次振動における節に近く、振幅が小さいために、他の次数の影響も入り、位相が不明確となったものであろう。したがって、位相判定の基準点は大きいスペクトルが得られる測点を利用することが望ましい。

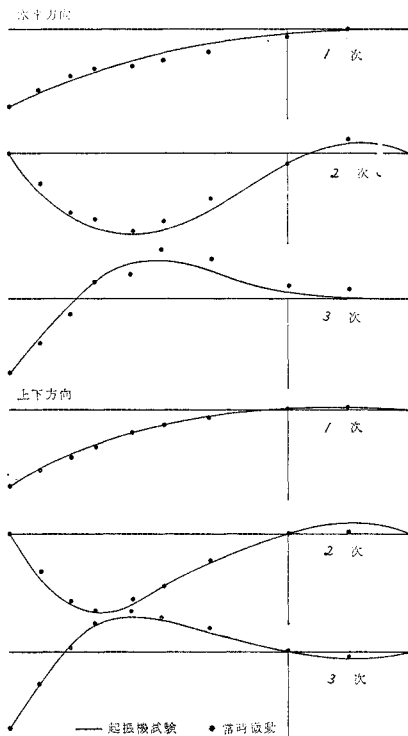


図-8 名護屋大橋変位モード (常時微動)

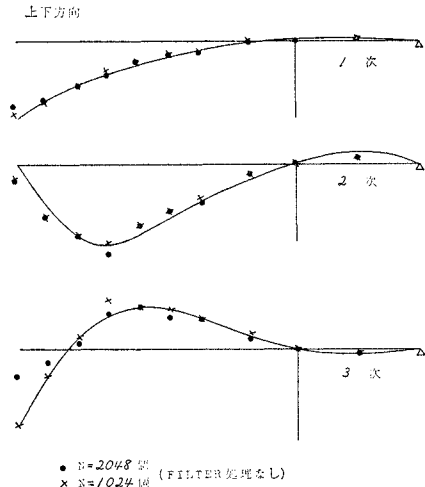


図-9 名護屋大橋の変位モード (車の走行時振動測定より)

図-8 は常時微動の解析から得られた名護屋大橋の変位モードであるが、起振機試験結果とよく一致している。

図-9 は車の走行時振動の解析から得られた変位モードであり、データ個数の違いによる振動型の相違を合わせて示しているが、起振機試験結果とよく一致していることがわかる。ただ、センターにおける変位が異なっているが、これは中央点がちょうどヒンジ構造になっており、常時微動のような微小振動に対しては、ヒンジ部の摩擦のため完全なヒンジとして働いているが、車の走行時のやや大きな振動に対してはヒンジ部のわずかのガタが動き、完全なヒンジとなっていないためであろう。

3 次において $N=1024$ 個と $N=2048$ 個でモードが違うのは記録時間の違いより基準点③が Node に近かったための誤差が大きくなったためと思われる。したがって、同時測定の困難な場合には少なくとも 2 個以上の基準点を設置したほうがよいことがわかった。

表-4 は、名護屋大橋の減衰定数計算結果である。表中で 1/2 法として示してあるものはパワースペクトルの最大ピーク値が得られたとみなせる場合にだけ、数測点でパワースペクトルの最大ピーク値の 1/2 のパワーの振

表-4 名護屋大橋減衰定数 (%)

方向	次数	車の走行時振動				常時微動	起振機試験	
		$N=1024$		$N=2048$		$N=2048$	共振時振幅による方法	自由減衰振動
		1/2 法	最小二乗法	1/2 法	最小二乗法			
上下	1	2.81	1.84	1.43	1.20	1.40	1.43	1.69
	2	1.73	0.88	0.64	0.46	0.50	0.29	—
	3	0.86	0.53	0.62	0.36	0.45	0.42	—
水平	1					1.29	1.13	1.10
	2					0.61	0.38	—
	3					0.60	1.14	—

動数幅から計算を行い平均したものである。最小二乗法として示してあるのは式(3.6)を使い、各次数のパワースペクトル曲線の中の3~4個所の点をとり最小二乗法より求めたものである。各次のパワースペクトルの最大ピーク値がとれない場合には最小二乗法によらなければ求めることができない。両方法とも同じ程度の値が得られるが、ただデータ個数が少ないときには最小二乗法のほうが優れているようである。したがって、この1/2法と最小二乗法を併用すれば、低次の減衰定数であれば、ほぼ起振機試験結果と同様の結果が得られるであろう。名護屋大橋の場合には起振機試験の共振曲線からの減衰定数はデータ不足のため求めることができなかった。

4. 高千穂橋梁に対する実験と解析

(1) 概要

高千穂橋梁(宮崎県)は図-10に示すように高さ30数mのコンクリート高橋脚上に架設された3径間連続トラス上路式鉄道橋である。著者らはこの橋梁に対し、起振機による振動実験を行う機会を得たので、同時に常時微動による振動性状の測定解析を行い、両者の結果を比較検討することができた。図中の番号は速度型地震計の設置位置である。試験内容としては橋軸直角水平振動のみを行った。また、起振機試験においては上弦材と下弦材とに地震計を設置したが、常時微動測定においては上弦材のみに設置した。

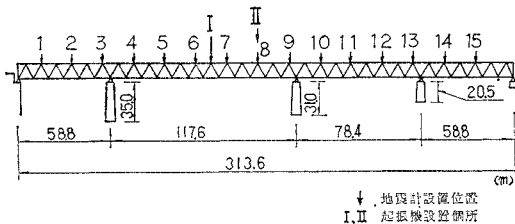


図-10 高千穂橋梁一般形状図

(2) 起振機試験¹⁷⁾

起振機は名護屋大橋に使用したのと同じもので、これを図-10に示すI、IIに設置し、地震計の出力を直流増幅器を通し、直記式電磁オシログラフに記録した。なお、測定は同時に12チャンネルしかできなかったので31個の測点を3回に分け、切換後の位相判別のため、測点⑥の地震計出力を常に記録し基準とした。

実験に使用した機械器具は次のとおりである。

- (イ) 起振機 $P=25 f^2 \text{ kg}$ 1台
- (ロ) 速度型電磁式地震計 固有振動数 0.3 c/s 6台

- 1 c/s 17台
- (ハ) 直流増幅器 感度 40 db, DC~2500 c/s, 6ch. 2台
- (ニ) 直記式電磁オシログラフ ガルバ固有振動数 2500 c/s, 6ch. 2台

(3) 常時微動の測定

常時微動測定では上記の(ロ)、(ハ)の他にデータレコーダー2台およびオシロスコープを使って、名護屋大橋のときと同じ要領で行った。本実験では実験日の制約上、昼間、しかも橋梁上で架設作業実施中に行ったので、実際は非定常な過程となった。したがって、全測点を同時に測定記録できれば多少の非定常性は消去されるが、本実験の場合データレコーダーが8チャンネルしか同時測定できず、各測点において測定時刻が異なってくるので、測点⑥を常に基準にとり測定を行った。常時微動測定中に急に風が吹きデータレコーダーへの入力信号が過大になる場合があったが、各測点の増幅度を同時に変えることが不可能であるから、記録を打ち切り測定をやりなおした。測定継続時間は1回につき2~3分、さらに同一個所を2~3回繰り返し記録した後、測点⑥だけを共通点として残し、次の測点に移動した。

(4) 処理結果

図-11はdigital化したデータをF.F.T.によりパワースペクトルを求めたものの例である。これは生のデータを1次振動の解析に対しては2次以上をフィルターでカットし、30個/秒の刻みで、2次振動以上の解析に対しては1次振動数以下と20 c/s以上の振動数をカットし、60個/秒の刻みで、おのおの各測点4096個のdigital化したデータを解析したものである。図-11をみると名護屋大橋のパワースペクトルと異なって、きれい

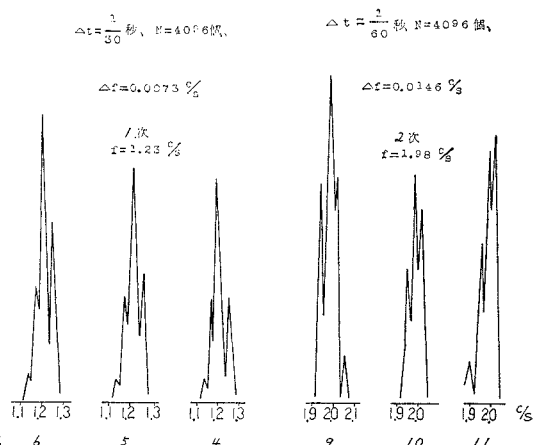


図-11 高千穂橋梁パワースペクトル例

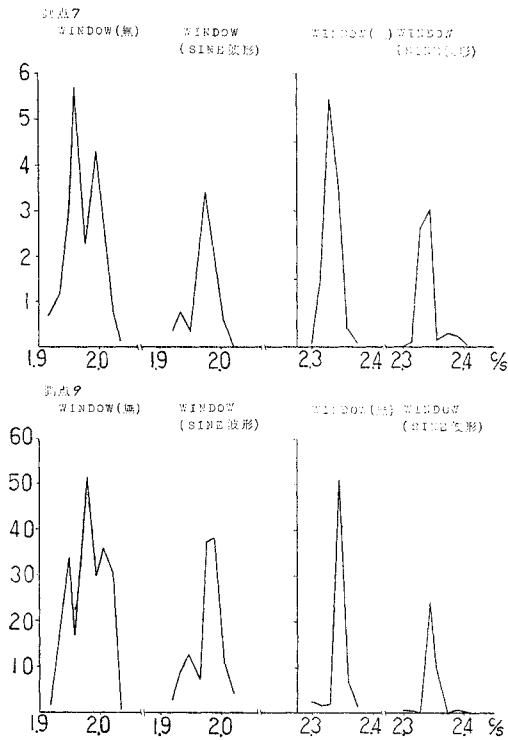


図-12 高千穂橋梁パワースペクトル (Window による違い)

な立ち上りをしていない。この理由について種々の考察を加えてみたが十分な説明をつけることができなかった。しかし、各次数における各測点のパワースペクトルの形が類似していることから、パワースペクトルの大きいほうのピーク値をとって固有振動数を求め、その振動数に対応する各測点のピーク値から各次の振動型を推定することもできるが、本実験では次に示すように処理方法を変えてパワースペクトルを求めてみた。

図-12 はデータに Window (sine 波形) をかけて求めたパワースペクトルと、Window をかけないまま求めたパワースペクトルとの比較を示したものである。この結果から、Window をかけることにより、比較的良好な形のパワースペクトルが求められる。つまり、高千穂橋で得られた形の悪いスペクトルに対して Window が有効であり、固有振動数、減衰定数の算出が容易になることがわかったので、高千穂橋梁ではすべてのデータ解析に Window をかけた。

表-5 高千穂橋梁固有振動数 (c/s)

次数	起振機試験	常時微動パワースペクトル
1	1.24	1.23
2	1.98	1.98
3	2.35	2.33
4	2.77	2.77
5	3.11	3.07
6	3.59	3.59
7	3.85	3.78

表-5 は高千穂橋梁の固有振動数を常時

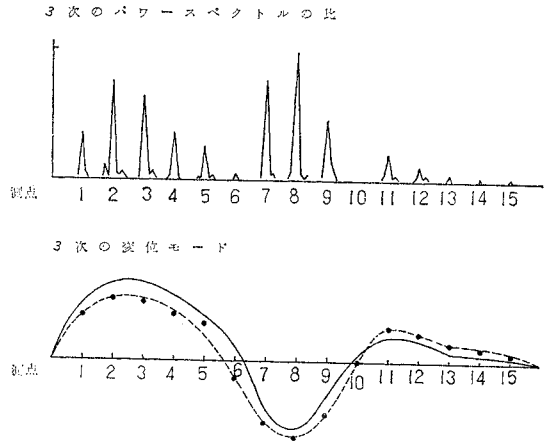


図-13 3次振動のパワースペクトルと変位モードの関係

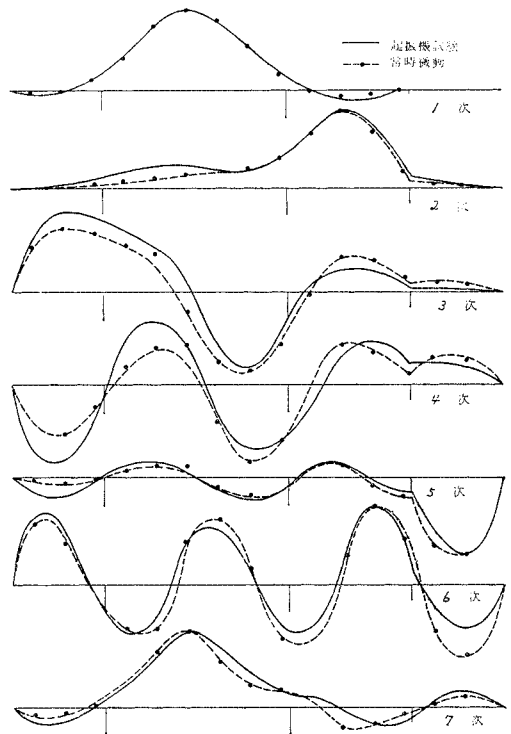


図-14 高千穂橋梁変位モード橋軸直角水平振動(上弦)

微動によるものと起振機試験によるものとを比較したもので、これを見ると両方ともよく一致していることがわかる。

図-13 は3次の固有振動数における各測点のパワースペクトルと変位モードの関係を示したもので、パワースペクトルは基準点◎に対する比で表わしたものである。

図-14 の●印は、名護屋大橋と同様にフーリエ係数から、各次数の位相判定を行い、パワースペクトルから求められた変位モードである。各次数とも起振機試験結

表一6 高千穂橋梁減衰定数 (%)
(橋軸直角水平振動)

次 数	常 時 微 動		起 振 機 試 験	
	1/2 法	最小二乗法	共振曲線 1/√2 法	共振時振幅 による方法
1	1.64	1.31	1.22	1.62
2	1.56	1.30	1.18	1.77
3	0.63	0.59	0.89	1.91
4	0.82	0.85	1.31	1.51
5	0.48	0.32	1.46	1.55

果とよく一致していることがわかる。

表一6 はパワースペクトルから求められた減衰定数と起振機試験から得られたものとを比較したものである。パワースペクトル曲線からパワーの 1/2 法で求めた結果と、最小二乗法によって求めた結果とは、ほぼ同じ値を示している。また、低次振動においては常時微動から求めた減衰定数と起振機試験から求めた減衰定数とは比較的良好一致しているが、4 次、5 次の高次振動では両者の間に開きがある。その理由は不明である。

高千穂橋梁のように、パワースペクトルが固有振動数においてきれいなピークを示さない場合には、Window をかけてパワースペクトルを求めるとともに、減衰定数の算定には最小二乗法を使用するほうがより正しい値が得られることがわかった。

5. 結 論

以上の結果から、常時微動を測定し、パワースペクトルを求めれば、構造物の振動性状(固有振動数、変位モード、減衰定数)を起振機試験と同じ程度の精度で求め得ることがわかったが、測定および解析上得られた結果を述べれば次のとおりである。

(1) 構造物の入力波中に求めようとする振動数域の中にはいる特定の振動数をもつ雑音がある場合には解析困難となるが、完全な定常ランダム波でなくても、つまり、車の走行しているような状態時の振動を測定しても、十分パワースペクトルによって振動性状を解析できることが判明した。

(2) 変位モードの精度を高めるためには、全測点同時測定を行うか、それのできないときには基準点を少なくとも 2 個以上設置し、基準点がたまたま振動の節になるのを防ぐことが必要である。

(3) データの digital 化においては、一般に $\Delta t = 0.02$ 秒、 $N = 2048$ 個程度をとれば十分であるが、高千穂橋梁のように 7 次までの固有振動数が 4 c/s 以下にある場合、つまり、各次の固有振動数が低振動数の場合には、パワースペクトルの刻み Δf を小さくする必要性から、データの個数をもっと増すほうがよい。

(4) 次に Window の必要性であるが、名護屋大橋

のように、パワースペクトルがきれいな立ち上りを示す場合には、Window をかける必要はないが、高千穂橋梁の場合のように、パワースペクトルのピークが複雑な形をしている場合には、適当な Window をかけて処理するほうが振動性状の解析に有利である。

(5) パワースペクトルを求めるには F.F.T. による方法が時間的に有利であるし、位相判定をする際の位相差を求めるためのフーリエ係数も同時に求められて便利である。

(6) 減衰定数を求めるには、パワースペクトルの最大ピーク値が得られるときには 1/2 法、ピーク値が求められないときには最小二乗法を使用すれば、大体、起振機試験と同じ程度の値が得られる。

以上のように、橋梁のような Flexible な構造物に対しては、常時微動によって、その振動性状を十分な精度で求めることができる。ただ、今回では外力のパワースペクトルを一定と仮定して解析を行っているが、実際の外力のスペクトルの状況を完全に把握しているわけではない。つまり、外力のパワースペクトルと応答のパワースペクトルとの関係が明確でなく、外力のパワースペクトルを一定と仮定して解析できる条件のチェックがなされていないという問題点が残っている。

次に、減衰定数が大きいか、相隣る固有振動数が近い場合には、互いに干渉し合うためにそれぞれの振動性状を分離することが難しく、この場合の解析も解決されていない。また、地盤と一体となって振動を行う剛な構造物、たとえば、弾性動揺振動を行う建物のように、単に構造物だけでなく地盤の変形まで考えなければならない場合の振動性状解析に対しては、地表上のスペクトルに構造物の応答によるスペクトルと、入力としてのスペクトルが混在し、そのモード解析が困難な場合もあり、今後の研究に待つべきものが多い。これらの問題点については、今後さらに研究を進めていく所存である。

参 考 文 献

- 1) 島田静雄：相関解析手法による構造物の振動解析，土木学会論文報告集，第 174 号，1970
- 2) 小坪・鳥野・串間：常時微動によるモード解析の実用化，第 26 回年次学術講演会，1971
- 3) 小堀・南井：微動測定による構造物の減衰評価法，災害科学シンポジウム講演論文集 (VII)，1970
- 4) 田中・吉沢・森下：地震時における実在建物の周期と減衰，第 3 回日本地震工学シンポジウム，1970
- 5) Mihailo D. Trifunac: Comparisons between Ambient and Forced Vibration Experiment, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1., 133-150, 1972.
- 6) Bureau of Public Roads: Ambient Vibration Survey of New Port Bridge, Report No. 0370-2150, 2152
- 7) 小坪清真：土木振動学，森北出版
- 8) 多治見宏：建築振動学，コロナ社
- 9) 坪井・多治見・角野：応用数学，コロナ社
- 10) 堀川 明：ランダム変動の解析，共立出版

- 11) Crandall : Random Vibration
- 12) Nathan M. Newmark, Emilio Rosenblueth : Fundamentals of Earthquake Engineering
- 13) 小坪・荒牧・高西：ディビダーク橋の振動性状に関する試験，九大工学集報，Vol 42, No. 6, 昭 45
- 14) 吉沢 正：基礎工学 (9)，数値解析 II，岩波書店
- 15) 土木学会：振動学便覧
- 16) 磯部 孝：相関関数およびスペクトル，東京大学出版会
- 17) 小坪・高西・鳥野：高橋脚三 スパン 連続トラス鉄道橋の振動性状，九大工学集報，Vol. 45, No. 5, 昭 47
- 18) 金森博雄：変動現象，新物理学講座，ダイヤモンド社
- 19) 小堀・南井ほか：構造物の振動特性の検出について，第 7 回災害科学総合シンポジウム講演論文集
- 20) 金井・田治見ほか：地震工学，建築構造大系，彰国社
- 21) 河上・浅田：常時微動測定によって求めたアース ダムの振動特性について，第 4 回災害科学総合 シンポジウム講演論文集
- 22) 金井 清：常時微動，建築技術 176, 1966
- 23) 桑島・永井：任意個数試料の F.F.T. 算法とそのスペクトル解析への応用，技研資料（運輸省港湾技術研究所）Mar. 1973.

(1973.7.12・受付)
