

# 水文流出系予測へのカルマン・フィルター 理論の適用

PREDICTION OF HYDROLOGIC SYSTEM  
BY KALMAN FILTERING

日 野 幹 雄\*

By Mikio Hino

**要 旨** 現在、線型制御理論は高度に発達し、さまざまな手法が開発応用されている。こうした制御理論は、従来人間の設計した、したがって動特性を記述する(常)微分方程式系が確定している問題について考えられ応用されてきた。それゆえ、自然現象や社会現象のようにそれを記述する微分方程式形が不明のものや、モデル化しにくい現象について、制御理論の成果が導入された例は比較的少ない。

ここでは、水文流出系の予測、すなわち単位図や貯留関数の係数の推定へのカルマン・フィルター理論の応用を試みた。

## 1. 序 論

### (1) システム概念

第 2 次世界大戦以後、人類知能が修得した最大の認識は、システムとフィードバックの概念であるといわれている(牧野<sup>1)</sup>)。こうした概念は本来、機械工学ないしは電気工学の一部の狭い範囲の専門用語であったが、しだいにその概念は著しく拡張され高度に洗練されて、本来の領域をはるかにとび出して、すべての工学分野はもちろん、社会現象さらには人類・動物植物をも要素として含む地球系の理解と把握に欠くことのできないものとなっている。

さて、水資源問題をシステム概念により把握し、システム制御理論を適用しようとするとき、もともと人間が設計した機械・電気系と異なり、水資源問題では変動特性を記述する常微分方程式系が確定していないことが重大な難点となっている。たとえば、降雨流出現象や河川による水輸送を採ってみても、これらは自然現象として偏微分方程式一分布定数系一で記述されている。制御理

論・システム理論は基本的に、変動特性が集中定数系で表わされた系を対象としている(高橋秀俊<sup>2)</sup>)。それゆえに、水資源問題では、④ 現象を記述する方程式を集中定数系に変換するか、あるいは⑤ 適当なモデル化を行い集中定数系—常微分方程式系—を得ることである。流出解析における貯留関数法や都市用水変動に関する需要要因モデル(住友<sup>3)</sup>)はこの例である。④ の方法については、別に論ずることとし、本論文では⑤ の立場から水問題を取扱うことにする。

### (2) システム方程式

いま、あるシステムを考える。このシステムの状態は  $n$  次元の変数ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  に関する一階の常微分方程式系で記述される。ここに、 $\mathbf{x}(t)$  は時刻  $t$  を固定するとき、ガウス性確率変数とする(任意階の常微分方程式は、 $\dot{x}_i = x_j$  などと置くことにより、すべて一階のベクトル微分方程式に帰着する)。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \dots \dots \dots (1.1)$$

ここに、

$\mathbf{x}(t)$ : システムの状態を表わす  $n$  次元ベクトル

$\mathbf{F}(t)$ : 非確率的(通常の)行列時間関数 ( $n \times n$  行列)

$\mathbf{G}(t)$ : 非確率的行列時間関数 ( $n \times p$  行列)

$\mathbf{w}(t)$ : ガウス白色雑音 ( $p$  次元ベクトル)

式(1.1)の離散表示は

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k+1|k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k+1|k)\mathbf{w}(k) \dots \dots \dots (1.2)$$

となる。ここに、

$\Phi(k+1|k)$ : 状態変換行列 ( $n \times n$  行列)

$\Gamma(k+1|k)$ : 変換行列 ( $n \times p$  行列)

$k$ : 時間ステップ  $k \Delta t$

この関係は Fig. 1 の左のブロックを表わす。

一般に、システムの状態量はなんらかの観測系を通し

\*正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

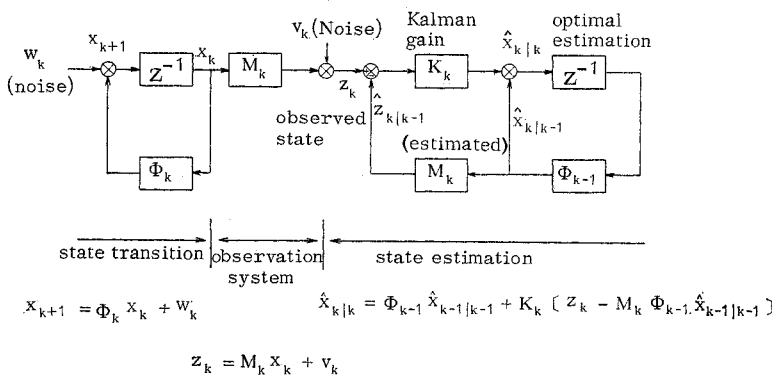


Fig. 1 Conceptual explanation of Kalman filter.

て測定されるから、われわれは誤差なしに直接的にシステムの状態量を知ることはできないし、また、重要なことであるが、状態量のすべての量を測定しうるわけではない。したがって、真の状態量  $x$  ( $n$  次元ベクトル) と観測量ベクトル  $z$  ( $m$  次元ベクトル,  $m \leq n$ ) との間は、ある変換系を介して、次の関係で結びつけられている (Fig. 1 の中のブロック)。

$$z(t) = M(t)x(t) + v(t) \dots\dots\dots(1.3)$$

あるいは、離散表示をすれば、

$$z(k+1) = M(k+1)x(k+1) + v(k+1) \dots\dots(1.4)$$

ここに、

- $z$  : 観測量ベクトル ( $m$  次元 ( $m \leq n$ ))
- $M$  : 非確率的変換行列 ( $m \times n$  行列)
- $v$  : 観測系に入る誤差 ( $m$  次元ベクトル)

(3) 最適推定予測に関するカルマン・フィルター

問題は、式 (1.1)~(1.4) で表わされるシステム・観測系に対して、状態量の推定値と真値との誤差の分散を最小にする最適フィルターを決定することである。この問題に対してきわめて一般性のある解を与えたのが Kalman<sup>4)</sup> である。彼は、1960 年 Hilbert 関数空間における直交射影の概念を用いて、今日カルマン・フィルターの名で呼ばれる最適フィルターを決定した。その後、多くの研究者がそれぞれ異なる方法でカルマン・フィルターの再誘導を試みており、そのことはとりもなおさず最初の Kalman の理論の難解さを物語っている (Jazwinski<sup>5)</sup>, 日野<sup>12)</sup>)。

にもかかわらず、カルマン・フィルターはきわめてすぐれており、人工衛星・月ロケットなどの制御をはじめ多くの問題に応用されている。

さて、カルマン・フィルターによる  $x(k+1)$  の最適推定値を決定する計算方法を順序に従い結果のみ記せば、次のようになる。

まず、新たに出てくる記号について説明する。

- $\hat{x}$  : 状態量の推定値ベクトル,
- $\hat{x}(k|j)$  ステップ  $j$  までの情報からステップ  $k$  の状態推定量
- $\tilde{x}$  : 推定量誤差ベクトル,  $\tilde{x} = \hat{x} - x$
- $Q$  : ガウス白色雑音  $w$  の分散行列  $E[w(j)w'(k)] = Q(k)\delta_{jk}$  ( $p \times p$  行列)
- $R$  : ガウス白色雑音  $v$  の分散行列  $E[v(j)v'(k)] = R(k)\delta_{jk}$  ( $m \times m$  行列)
- $P$  : 推定誤差の共分散行列

$$E[\tilde{x}(k|j)\tilde{x}'(k|j)] = P(k|j) \quad (n \times n \text{ 行列})$$

(i) ステップ  $k$  における観測誤差の共分散行列を式 (1.5) により求める。

$$P(k|k) = [I - K(k)M(k)]P(k|k-1) \dots\dots(1.5)$$

ここに、 $K(k) \cdot P(k|k-1)$  は前の時間ステップにおいてすでに式 (1.6), (1.7) により求められているものを用いる。

(ii) 上の結果を用いて、 $k+1$  ステップにおける観測誤差の共分散行列の推定値を求める。

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1|k)P(k|k)\Phi'(k+1|k) + \Gamma(k+1|k)Q(k)\Gamma'(k+1|k) \dots\dots(1.6)$$

(iii) 上の結果を用いて、 $k+1$  ステップでの Kalman gain matrix ( $K : n \times m$  行列) を次式 (1.7) により求める。

$$K(k+1) = P(k+1|k)M'(k+1)[M(k+1)P(k+1|k)M'(k+1) + R(k+1)]^{-1} \dots\dots(1.7)$$

(iv) 最後に、上式の Kalman gain matrix を用いて、 $k+1$  時間ステップでの  $x$  の最適推定値  $\hat{x}$  を計算する。

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \Phi(k+1|k)\hat{x}(k|k) + K(k+1)[z(k+1) - M(k+1)\Phi(k+1|k)\hat{x}(k|k)] \dots\dots(1.8)$$

また、

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k+1|k)\hat{x}(k|k) \dots\dots\dots(1.9)$$

の関係を式 (1.8) に代入すれば、式 (1.8) は

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)[z(k+1) - M(k+1)\hat{x}(k+1|k)] \dots\dots\dots(1.10)$$

とも書ける。

式 (1.8) または式 (1.10) より、カルマン・フィルターは次の意味をもつことがわかる (Fig.1 の右のブロック)。式 (1.8) または (1.10) の右辺の第 2 項の [ ] 内は、ステップ  $k$  までの観測値からの  $k+1$  ステップでの観測値の推定値 ( $\hat{z}(k+1|k) = M(k+1)\hat{x}(k+1|k)$ ) と実

際の  $k+1$  ステップでの観測値  $z(k+1)$  との誤差を意味している。この差は measurement residual と呼ばれる。したがって、式 (1.8), (1.10), は「 $k$  ステップでの  $x$  の最適推定値による  $k+1$  ステップの  $x$  の単純推定値 ( $\hat{x}(k+1|k)$ ) に, measurement residual に Kalman gain を掛けた補正項を加えて,  $k+1$  ステップでの  $x$  の最適推定値が得られる」ことを意味している。

この Kalman filter の最も重要な特徴は, 観測データを連続して記憶する必要がなく, 観測値がただちに処理される点である。記憶が必要なのは, 時間ステップが  $k$  から  $k+1$  に移る際の  $\hat{x}(k|k)$ ,  $\Phi(k+1|k)$ ,  $\Gamma(k+1|k)$ ,  $M(k+1)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k+1)$  の値である。

今, 変動が確率的定常状態にあるとすれば,  $\Phi, \Gamma, M$  は時間的に不変であり, 共分散行列は一定値に収束し, したがって Kalman gain  $K$  は一定となる。その結果, 最適フィルターもまた時間に無関係となる。これは, Wiener-Hopf 積分方程式を解いて得られる周波数域での Wiener フィルターの時間領域での表示と等価である<sup>6),7)</sup>。

## 2. カルマン・フィルターによるシステムの同定

雑音波のワイナー・フィルターが相関による同定法の基礎になっているのは良く知られている。このように, 原理的には, システムの制御と推定と同定とは同一の立場から処理しうるものである。カルマン・フィルターを同定問題に応用するには, 状態方程式の係数を新しい状態変数に, 本来の状態変数  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  などを観測量  $z_i$  に読み替える方法がある。この方法は, 系が一次の場合には問題はないが, 次数  $n$  が増加した場合に決定すべきパラメーター数が  $(n^2+n)$  個で増加してゆくこと, すべての状態変数を, とりわけ誤差が大きくなりがちな増加率(微係数)をも, 観測しなければならぬという欠点がある。

この欠点を改良するために, 系への入出力の関係を定差方程式で表わして, その係数を同定する方法が提案されている<sup>8)</sup>。この方法では, 測定値を多少前にまでさかのぼって記憶しなければならないが, 他方測定は変数  $x$  の時系列のみで良いし, 次数が  $n$  の場合同定すべきパラメーターの数は  $2n$  個ですむという利点がある。ここでは, 定差方程式による同定方法を  $m$  次元  $j$  階の微分方程式の場合に拡張することにする。

さて, 状態量は  $m$  個 ( $x_1, x_2, \dots, x_m$ ) あり, それらの時間変化は  $j$  階の微分方程式で記述されるものとする。時間  $t=k\Delta t$  における  $x_i$  の値を  $x_{i,k}$ , 入力(強制力)を  $u_{i,k}$  ( $i=1,2, \dots, m'$ ),  $i$  要素に伴う雑音を  $w_{i,k}$

と書くことにすれば, システムの特性は次のような定差方程式で記述される。この方程式は微分方程式の直接的差分式としてよりは, 微分方程式の  $Z$  変換—逆  $Z$  変換により求めるのが良い(前者では常に差分安定条件が問題となるが, 後者の方法では系そのものが不安定でない限り定差化による不安定性の問題は生じないから)。

$$\left. \begin{aligned} x_{1,k} = & \alpha_{11}x_{1,k-1} + \alpha_{12}x_{1,k-2} + \dots + \alpha_{1j}x_{1,k-j} \\ & + \beta_{11}x_{2,k-1} + \beta_{12}x_{2,k-2} + \dots + \beta_{1j}x_{2,k-j} \\ & + \dots \\ & + \mu_{11}x_{m,k-1} + \mu_{12}x_{m,k-2} + \dots + \mu_{1j}x_{m,k-j} \\ & + a_{11}u_{1,k-1} + a_{12}u_{1,k-2} + \dots + a_{1l}u_{1,k-l} \\ & + b_{11}u_{2,k-1} + b_{12}u_{2,k-2} + \dots + b_{1l}u_{2,k-l} \\ & + \dots + w_{1,k-1} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1 a)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{2,k} = & \alpha_{21}x_{1,k-1} + \alpha_{22}x_{1,k-2} + \dots + \alpha_{2j}x_{1,k-j} \\ & + \beta_{21}x_{2,k-1} + \beta_{22}x_{2,k-2} + \dots + \beta_{2j}x_{2,k-2} \\ & + \dots \\ & + \mu_{21}x_{m,k-1} + \mu_{22}x_{m,k-2} + \dots + \mu_{2j}x_{m,k-j} \\ & + a_{21}u_{1,k-1} + a_{22}u_{1,k-2} + \dots + a_{2l}u_{1,k-l} \\ & + \dots + w_{2,k-1} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1 b)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{m,k} = & \alpha_{m1}x_{1,k-1} + \alpha_{m2}x_{1,k-2} + \dots + \alpha_{mj}x_{1,k-j} \\ & + \beta_{m1}x_{2,k-1} + \beta_{m2}x_{2,k-2} + \dots + \beta_{mj}x_{2,k-j} \\ & + \dots \\ & + \mu_{m1}x_{m,k-1} + \mu_{m2}x_{m,k-2} + \dots + \mu_{mj}x_{m,k-j} \\ & + a_{m1}u_{1,k-1} + a_{m2}u_{1,k-2} + \dots + a_{ml}u_{1,k-l} \\ & + b_{m1}u_{2,k-1} + b_{m2}u_{2,k-2} + \dots + b_{ml}u_{2,k-l} \\ & + \dots \\ & + w_{m,k-1} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1 c)$$

上記の定差方程式は, 次のようにマトリックス表示で表わすことができる。

$$x(k) = M(k-1) \cdot h(k-1) + w(k-1) \dots \dots (2.2)$$

ここに

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{m,k} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.3)$$

$$M(k-1) = \begin{bmatrix} y & & 0 \\ & y & \\ & & \ddots \\ 0 & & & y \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1.4)$$

( $m \times n$  行列)  
 $n = (j \times m + l \times m') \times m$

$$y = [x_{1,k-1}x_{1,k-2} \dots x_{1,k-j}; x_{2,k-1}x_{2,k-2} \dots x_{2,k-j}; \dots; x_{m,k-1} \dots x_{m,k-j}; u_{1,k-1}u_{1,k-2} \dots u_{1,k-l}; u_{2,k-1}u_{2,k-2} \dots] \dots \dots \dots (2.5)$$

$$\mathbf{h}(k) = \left[ \begin{array}{l} \alpha_{11}\alpha_{12}\cdots\alpha_{1j}; \beta_{11}\beta_{12}\cdots\beta_{1j}; \cdots; \\ \mu_{11}\mu_{12}\cdots\mu_{1j}; \alpha_{11}\alpha_{12}\cdots\alpha_{1l}; \\ b_{11}b_{12}\cdots b_{1l}; \cdots \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\cdots\alpha_{2j}; \beta_{21}\beta_{22}\cdots\beta_{2j}; \cdots; \\ \mu_{21}\mu_{22}\cdots\mu_{2j}; \alpha_{21}\alpha_{22}\cdots\alpha_{2l}; \\ b_{21}b_{22}\cdots b_{2l}; \cdots \\ \cdots \cdots \cdots \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}\cdots\alpha_{mj}; \beta_{m1}\beta_{m2}\cdots\beta_{mj}; \cdots; \\ \mu_{m1}\mu_{m2}\cdots\mu_{mj}; \alpha_{m1}\alpha_{m2}\cdots\alpha_{ml}; \\ b_{m1}b_{m2}\cdots b_{ml}; \cdots \end{array} \right]^T \quad (2.6)$$

((j × m + l × m') × m 次元ベクトル)

今ここで

$$\left. \begin{array}{l} k = k-1 \\ z(k+1) = \mathbf{x}(k+1) \end{array} \right\} \cdots \cdots \cdots (2.7)$$

と書き替えば、式 (2.2) は

$$z(k+1) = \mathbf{M}(k)\mathbf{h}(k) + \mathbf{w}(k) \quad \cdots \cdots \cdots (2.8)$$

となる。この方程式は  $z$  を観測量、システム・パラメーターを一列に並べた  $\mathbf{h}$  を状態ベクトル、系の状態変数より作られる  $\mathbf{M}$  を変換行列と考えれば、式 (1.3) に対応する観測系の方程式である。新しい状態ベクトル (すなわち同定すべき系のシステム・パラメーター) の状態方程式としては、式 (1.2) に対応して

$$\mathbf{h}(k+1) = \Phi(k+1|k)\mathbf{h}(k) + \mathbf{v}(k) \quad \cdots \cdots \cdots (2.9)$$

を採れば良い。系が定常的であれば、

$$\Phi = \mathbf{I}$$

と簡単化される。ここに、 $\mathbf{I}$ ：単位行列。

したがって、システム・パラメーター行列  $\mathbf{h}$  を、1. のシステム状態量  $\mathbf{x}$  とみなし、2. における実際のシステム状態量  $\mathbf{x} \equiv z$  を仮想システムの観測量とみなすとき、式 (2.8), (2.9) はそれぞれ式 (1.4), (1.2) に対応し、1. で述べた (i)~(iv) の順序で系のパラメーター  $\mathbf{h}$  (式 (2.6)) の最適推定を行うことができる。

### 3. オンライン処理による流出予測

洪水予測の問題は、降雨に対する流出系の応答関数一線型近似流出系ならば、いわゆる単位図一を求めることである。従来の洪水予測の方法は、過去の水文記録から最小2乗法などにより単位図を求めておいて、これをそのまま使用するものである。流出条件により単位図ないしは流出率が異なるが、これには、コアクシアル法などが用いられてきた。しかし、この方法には実際はずいぶん無理な点が多いと思われる。まず、流域での降雨分布が一樣とは限らない。ある場合には上流域により多く、ある場合には逆に少なろう。同一季節であっても年により植生、地層の滞水性は異なるであろう。なによりも、流域地形に大きな自然的ないし人工的变化があって過去のデータが使えない場合はどうするのか。

とすれば、過去のデータはあくまでも参考資料であって、今問題にしている時点でのその流域の単位図を降雨流出の時々刻々のデータから求めるのが最も理想的である。しかも、そのための計算時間がかかりすぎてはなんにもならない。いわゆるオンライン・プロセッシングを行わなければならない。流出系は Fig. 2 のように数個の小流域より成り、入力(降雨)情報は時々刻々量水計から送られてくる。

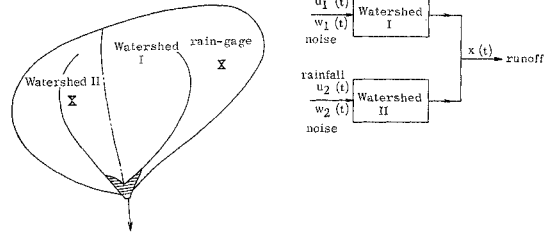


Fig. 2 A system composed of two sub-watersheds.

われわれは、ここで上に述べた Kalman の理論を流出予測に適用することを試みてみよう。

Kalman の理論を応用するに当たり、“この理論はガウス分布をもつ確率変数を考えているのであり、流出量  $x(k)$  や単位流出図の値  $h(k)$  はガウス分布の確率変数ではない”との批判が出よう。これはしばしば誤解されている点である。Kalman 理論は、(定常)時系列  $x(1), x(2), \dots, x(k), \dots$  がガウス分布をもつ変数であることを要求しているのではない。この理論は、非定常時系列を対象としており、時刻  $t = k \Delta t$  における(第  $i$  回目の観測での)変数の値を  $x_i(k) = \hat{x}(k) + \Delta x_i(k)$  と書くとき、 $\Delta x_i(k) (i=1, 2, \dots)$  がガウス分布をもつと仮定している。すなわち、時間ステップ  $k$  での  $x$  の値の推定誤差がガウス分布であるということである。したがって、時系列としての流出量  $x(k)$  や unit hydrograph  $h(k) (k=1, 2, \dots)$  がガウス分布でなくとも一向さしつかえがないのである。

#### a) 単位流出図の同定と洪水予測

さて、Duhamel 型の convolution integral を差分表示する。

$$x(i+1) = \sum_{k=1}^{k_{max}} h(k)u(i-k) \Delta t \quad \cdots \cdots \cdots (3.1)$$

ここに、 $x(i)$  は  $T = i \Delta t$  における流域の量水点での流出量、 $u(i)$  は同じく  $T = i \Delta t$  での代表点での降雨量である。ここで、降雨は必ずしも流域に一樣に降っている必要はない。この代表点で降らず、他の地点で降っているというきわめて特殊なケースはもちろん除かなければならないが、われわれは  $u, x$  の離散的データシリーズを与えられながら、単位図を求める必要がある。したがって  $h$  を推定すべき state variable,  $x$  を変換系を通して

の観測量と考えると State variable の変換は

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{I}\mathbf{h}(n) + \mathbf{v}(n) \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

観測系は

$$x(k) = \mathbf{M}(k-1)\mathbf{h}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \quad \dots\dots(3.3)$$

となる。ここに、 $\mathbf{h}$  は単位図の ordinate より成るベクトル、観測系の変換行列  $\mathbf{M}$  は式 (3.1) を変形することにより式 (2.4) より次のようである (一般性を失うことなく  $\Delta t=1$  にとりうる)。

$$\mathbf{M}(k-1) = [u(k-1), u(k-2), \\ u(k-3), \dots, u(k-i), \dots] \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

$$\mathbf{h}(k-1) = [h(1), h(2), h(3), \dots, h(i), \dots]^T \\ \dots\dots\dots(3.5)$$

このようにして、単位図の同定問題は、すでに 2. に述べた Kalman filtering によるシステムの同定問題に帰着できた。すなわち、式 (3.3) は式 (2.8), (1.4) に対応し、式 (3.2) は式 (2.9), (1.2) に対応づけられる。

したがって、 $k+1$  ステップにおけるパラメーター・ベクトルの最適推定は、次式により求められる。

$$\hat{\mathbf{h}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{h}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)[x(k+1) \\ - \mathbf{M}(k+1)\hat{\mathbf{h}}(k+1|k)] \quad \dots(3.6)$$

ここに、Kalman gain  $\mathbf{K}$  は式 (1.7) により計算する。

実際の流出単位図の同定と流出予測は、次のような手順で行われる。

① 時刻  $t=0$  で降雨が始まる。降雨の影響が流域の量水地点での水位上昇となって現われるまでには  $\tau_a$  の遅れ時間である。それまでの間は降雨の記録のみが集積される。必要ならばこの降雨記録の解析を行い、後の段階での予測のデータとすることができる。この区間での洪水予測は過去の資料に基づいて求められた流出系パラメーターにより行われる (たとえば、文献<sup>9)</sup>)。

② 時刻  $t > \tau_a$  になると入出力一降雨  $u(t)$  と流出  $x(t)$  を用いて、式 (3.6) により流出系を線型とみなして現時点でのパラメーターを同定する。

③ 今到達時間  $\tau_a$  より先のある時点 ( $t_1 > \tau_a$ ) で考える。この時点に降った雨の影響が量水地点に現われるまでには  $\tau_a$  の時間があるから、 $\tau_a < t < t_1 + \tau_a$  の時刻についての流出予測は、②のパラメーター同定の結果に基づき、Kalman filter (式 (1.5)~(1.10)) により  $\hat{h}(k)$  を求めたのち、式 (3.1) を用いてかなり正確に行うことができる。

④ それ以後の洪水予測は、現時点以後の降雨をなんらかの方法で予測しなければ、精度の高い洪水予測はできない。

④' もし、降雨量の変化になんらかの(統計的)規則性がある場合や、他の水文・気象などの因子との相関がある場合には、流出に対して行ったと同様のシステム同

定・予測の方法を適用しうる。洪水に関連する降水現象はメソ・スケールの現象であり、最近の二、三の研究 (たとえば、当舎による降雨量スペクトルの実測、磯野ほかによる尾鷲・大台ヶ原地方のレーダー観測) によれば、統計的規則性や持続的細胞構造などが明らかにされつつあるので、制御理論による降雨予測の可能性は大いに期待しうるものと考えられる。

もし、二つの流域からの流れが下流量水点の上流で合流しているならば、各流域の降雨測定点での雨量を  $u_1(i), u_2(i)$ , 合流流量を  $x(i)$  として、降雨流出の関係は

$$x(n) = a_1u_1(n-1) + a_2u_1(n-2) + \dots + a_lu_1(n-l) \\ + b_1u_2(n-1) + b_2u_2(n-2) + \dots + b_lu_2(n-l) \\ \dots\dots\dots(3.7)$$

と表わされる。上式の係数観測系方程式は

$$x(k) = \mathbf{M}(k-1)\mathbf{h}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \quad \dots\dots(3.8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}(k-1) &= [u_{1,k-1}, u_{1,k-2}, \dots, \\ &u_{1,k-l}, u_{2,k-1}, u_{2,k-2}, \dots, u_{2,k-l}] \\ \mathbf{h}(k-1) &= [a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_l]^T \end{aligned} \right\} \\ \dots\dots\dots(3.9)$$

となり、式 (3.6) と同様の式により係数の同定を行いうる。

b) 貯留関数形式ないし定差方程式による同定と予測

流出予測を単位図の同定により行おうとすれば、同定すべき変量は単位図の時間きざみ数だけあり、必然的に行列の次元が増大する。この点からすれば、貯留関数式あるいはそれを差分化した定差方程式の係数を同定するほうがよい。流出系の定差方程式表示を次式のように表わす。

$$x(n) = \alpha_1x(n-1) + \alpha_2x(n-2) + \dots + \alpha_jx(n-j) \\ + a_1u(n-1) + a_2u(n-2) + \dots + a_lu(n-l) \\ \dots\dots\dots(3.10)$$

上式を係数  $\alpha_j, a_k$  の同定式 (2.2) の形に変形すれば、

$$x(n) = \mathbf{M}(n-1)\mathbf{h}(n-1) + \mathbf{w}(n-1) \quad \dots\dots(3.11)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} &= [x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-j); \\ &u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-l)] \\ \mathbf{h} &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j; a_1, a_2, \dots, a_l]^T \end{aligned} \right\} \\ \dots\dots\dots(3.12)$$

したがって、流出系の係数ベクトル  $\mathbf{h}$  の最適予測は、式 (1.10) より

$$\hat{\mathbf{h}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{h}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)[x(k+1) \\ - \mathbf{M}(k+1)\hat{\mathbf{h}}(k+1|k)] \quad \dots\dots\dots(3.13)$$

により行われる。カルマン・ゲイン  $\mathbf{K}$  は式 (1.7) により計算しうる。

4. シミュレーション・データによる例題

この方法をまず素性のはっきりしたケースつまり simulated data について応用し、その適用性について論じる。

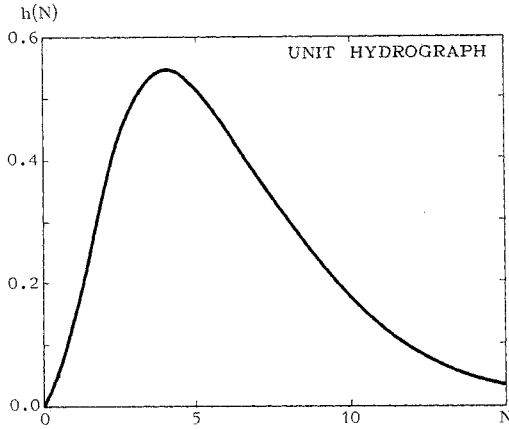


Fig. 3 Assumed unit hydrograph.

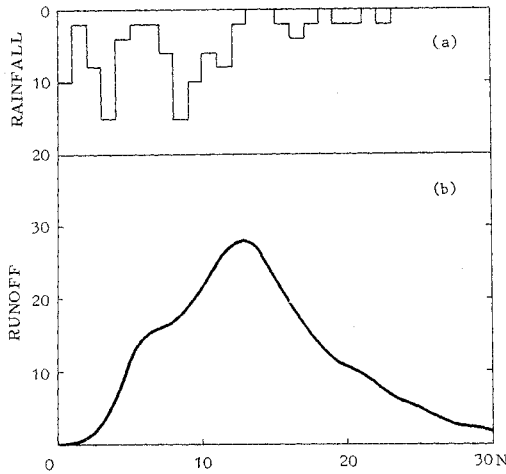


Fig. 4 Simulated data.

Table 1 ㉔, Fig. 3 に示すようなある単位図をもつ流域を考える。この流域に、Table 1 ㉕, Fig. 4 (a) のとき降雨があったと仮定すれば、流域より流出量  $x$  は式 (3.1), すなわち、

$$x = h * u$$

により、Table 1 ㉖, Fig. 4 (b) のようになる。そこで、真の単位図 (Fig. 3) を隠して、流域での入出力のみを与えて、上述の方法により真の単位図を求めうるか否かの実験を試みる。まず、降雨時から測って流出応答の始まるまでの  $x, u$  データを読み込む。単位図ベクトル  $h$  の初期値としては 0, error covariance として

Table 1

時間ステップ	㉔ 単位図	㉕ 降雨	㉖ 流出
0	0.0	1.0	0
1	0.152	2.0	0.15
2	0.368	8.0	0.67
3	0.502	15.0	2.45
4	0.541	4.0	6.76
5	0.513	2.0	11.74
6	0.448	2.0	15.11
7	0.370	6.0	16.54
8	0.293	15.0	17.13
9	0.225	10.0	19.11
10	0.168	6.0	22.46
11	0.124	8.0	25.43
12	0.0892	2.0	27.50
13	0.0635	0.	28.04
14	0.0447	0.	26.52
15		2.0	23.42
16		4.0	19.87
17		2.0	16.84
18		0.	14.39
19		2.0	12.55
20		2.0	10.94
21		0.	9.72
22		2.0	8.46
23			7.14
24			6.16
25			5.23

は 0.1 を読み込み、式 (3.6) により単位図の同定を始める。各ステップでの同定単位図を真の単位図と比較したのが、Fig. 5 (a), (b), (c) である。

さらに、あらかじめ単位図がある程度与えられている場合として、三角形および矩形の  $h(i)$  を仮定し、同定単位図とそれに基づく流出量の予測を示したのが、Fig. 6 (a), (b), (c), Fig. 7 (a), (b), (c) である。

この図より、水文データのオンライン処理をはじめから、きわめて短い時間ステップで単位流出図が上述の方法により推定しうる事がわかる。

当然ながら、ある程度単位図の形がわかっているほど良い結果を与える。

次に、貯留関数形式の場合として、同じシミュレーション・データについて式 (3.10) を用いる。ここで、 $j_{max}=2, l_{max}=2$  とする。すなわち降雨量を  $u$ , 流出量を  $x$  として、

$$x(n) = \alpha_1 x(n-1) + \alpha_2 x(n-2) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2)$$

パラメーター  $\alpha_i, a_i$  の同定結果と、それに基づいた流量予測の結果は Fig. 8, 9 のごとくである。

また、 $j_{max}=3, l_{max}=3$  の場合の同様な流出予測の結果を図-10 に示す。図-4 のような単位図を上式のような簡単な定差式で表わすこと自体に少々無理があることを考えれば、結果はほぼ良好と思われる。

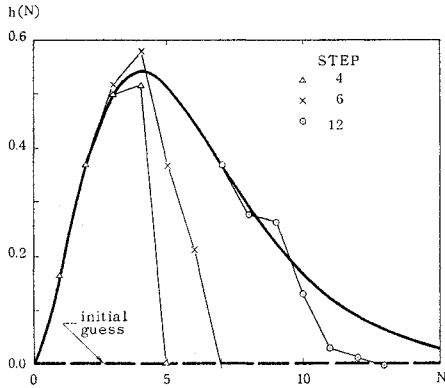


Fig. 5(a) Unit-hydrograph identification from the zero initial guess.

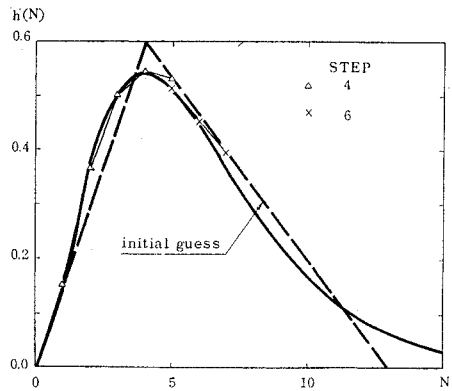


Fig. 6(a) Unit-hydrograph identification from a relatively precise initial guess.

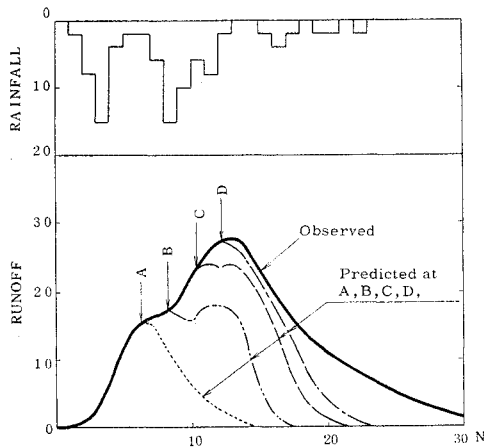


Fig. 5(b) On-line runoff prediction from the zero initial guess of  $h(k)$  when future rainfall data are not given.

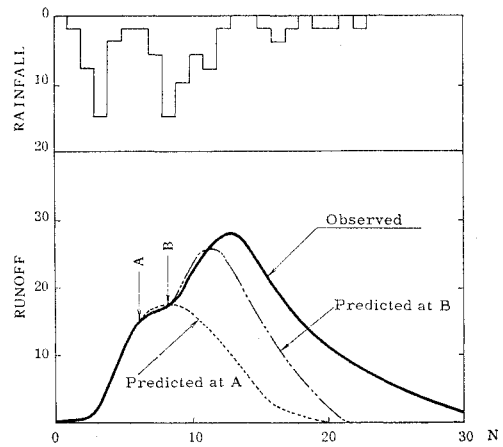


Fig. 6(b) On-line runoff forecast from a relatively precise initial curve of  $h(k)$  (Fig. 6(a)), when future rainfall data are not given.

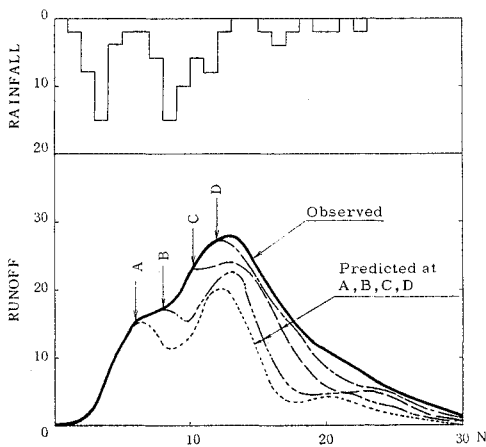


Fig. 5(c) On-line runoff prediction from the zero initial guess of  $h(k)$  when future rainfall data are given.

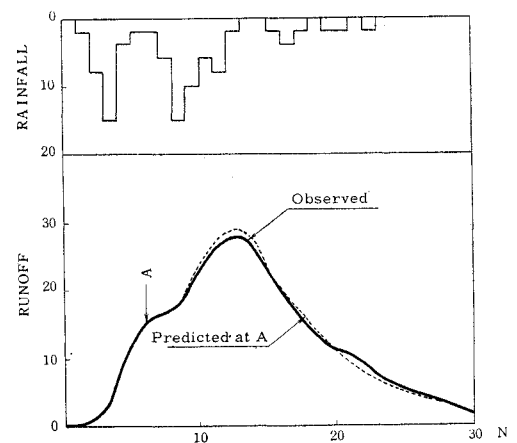


Fig. 6(c) On-line runoff forecast from a relatively precise initial curve of  $h(k)$  (Fig. 6(b)), when future rainfall data are given.

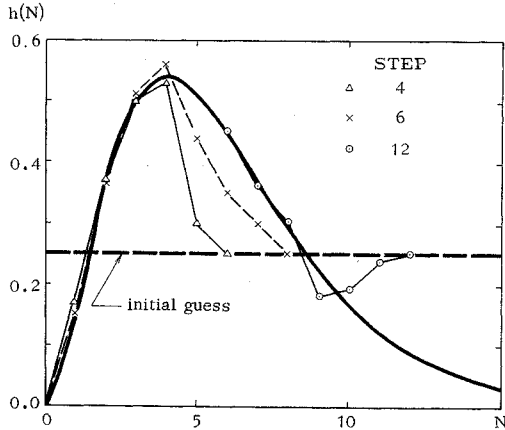


Fig. 7 (a) Unit-hydrograph identification from a hot-type initial guess.

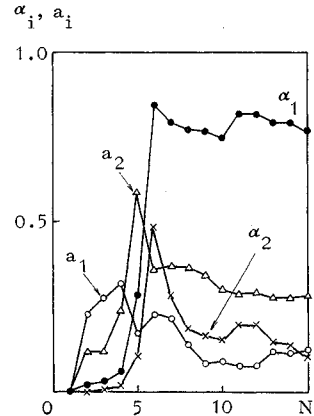


Fig. 8 Convergence of parameter identification

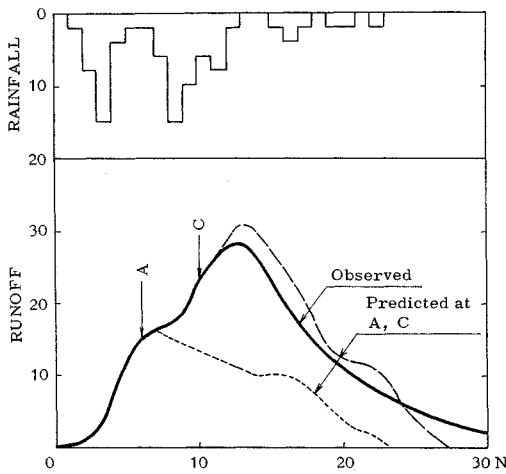


Fig. 7 (b) On-line runoff prediction from the hat-type initial guess of  $h(k)$  when future rainfall data are not given.

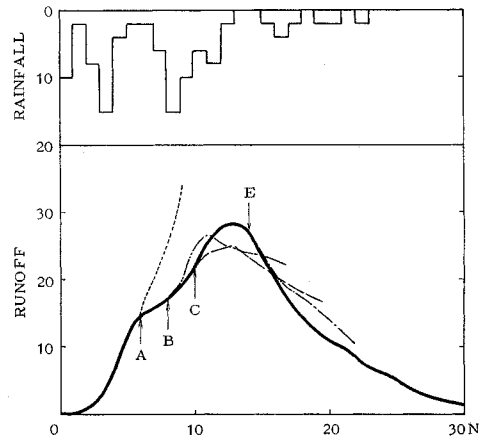


Fig. 9 Predicted runoff vs. real runoff ( $j_{max}=2, l_{max}=2$ ).

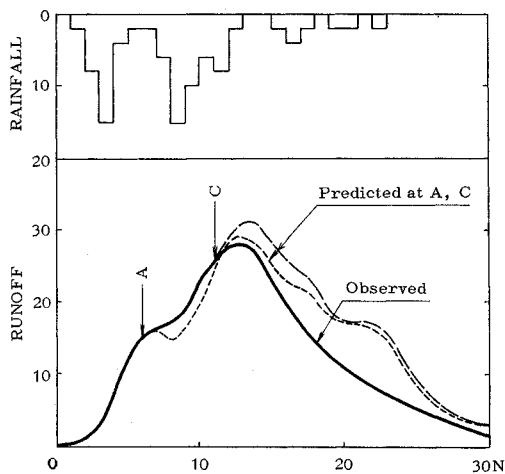


Fig. 7(c)

Fig. 7 (c) On-line runoff prediction from  $h(k)$  shown in Fig. 7 (a), when future rainfall data are given.

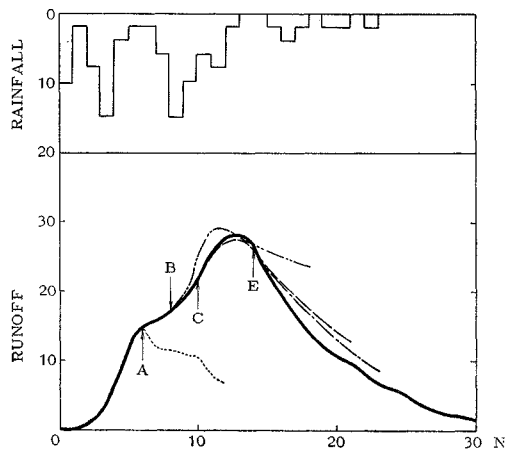


Fig. 10 Predicted runoff vs. real runoff ( $j_{max}=3, l_{max}=3$ ).



## 5. 二、三の検討

### (1) 降雨量と流出量の連続性について

流域に空間的に一様強度の降雨があるとの単位流出図の考え方に立てば、降雨量と流出量との間には連続の関係が成立しなければならない。

$$\int_0^{\infty} x(t) dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u(t-\tau) h(\tau) d\tau dt$$

しかし、この論文では流域内の強度分布は空間的に一様とは考える必要はなく、降雨観測点での降雨強度は流域の平均的代表とは限らないので、上式の関係は常に成立するわけではない。もし降雨観測点の降雨強度が流域平均より大きければ、上式右辺の積分は左辺のそれより大きくなる。また、降雨が流域下流に集中しておれば、降雨到達時間は早まり単位図の修正が行われることになる。このように、filtering の考え方は通常の洪水予測に比べて非常に柔軟であるといえる。

### (2) 今後の展開その他

制御理論あるいは filtering theory は本来、平均的挙動がある程度わかっていて、それに対する補正を行うという考えであるから、本論文の例題 Fig. 5 の場合など本来無理な使用法である。現実の洪水予測の場合には、少なくとも数回の過去のデータがあると期待しうし、たとえそれがなくても Synthetic method で単位図や貯留関数の粗い推定が可能であるから、それらを用いて予測からのずれを補正する形式で使用するほうがよい。

本論文で示したカルマン・フィルターの洪水予測への応用は、カルマン・フィルターの土木工学分野への多くの可能な応用の一例にすぎない。すでに、著者らにより都市用水需要の変動予測<sup>10)</sup>や大気汚染の予測<sup>11)</sup>にも応用されており、今後さらに応用例が増えることを期待したい。

## 6. 結 論

カルマン・フィルターリング理論は約 10 年前に機械系の状態変数の最適推定のための理論として発表された。この理論はよく知られている Wiener filter とは異なり、定常状態にない系を対象としており、無限に長い過去のデータの統計処理を行うことなく、逐次推定度を高めてゆく方法である。カルマン・フィルター理論は、① 対象としている系の状態変換式の係数をあらかじめ仮定系よりの推定すべき出力  $h$  とみなし、② 元の系からの出力  $x$  をこの仮想系の観測系よりの出力  $z$  と

読み直し、③ 元の系への入出力をこの仮想の観測系を構成する変換行列  $M$  の要素などと読み替えることにより、未知の系のシステム・パラメーター同定に適用することができる。本論文ではこの同定方法について一般的に述べ、次にこの方法を応用し水文観測値（流域の降雨と流出量）のデータのオンライン処理によりその時点での最良の単位流出図を推定する方法について論じた。

本論文の洪水予測法は、過去の水文データのない場合や流域特性の大きな急激な変化のある場合、降雨分布の片寄っている場合などにも適用できるという利点がある。しかも、カルマン・フィルターの特徴として計算時間が短く、オンライン処理が可能である。本論文では、この方法の妥当性を示すために、まず素性のはっきりしたシミュレーション・データについて適用性を調べ、単位流出図および定義表示された貯留関数の推定およびこれよりの流出予測が適切に行われうることを明らかにした。この方法は洪水問題の他大気汚染の予報など種々の問題にも応用できる。

謝辞：本研究は昭和 47 年度文部省科学研究費特定研究(1) (水資源) — “水資源の最適計画に関する基礎的研究” (代表者：著者) (課題番号 92314) の補助を受けて行われた。また、東京工業大学水工学研究室の方々から有益な助言をうけた。ここに深く謝意を表したい。

### 参 考 文 献

- 1) 牧野 昇：超技術社会への挑戦、日刊工業新聞社 (昭44)
- 2) 高橋秀俊：線形集中定数系論—1, 岩波講座 基礎工学 6 (昭 44)
- 3) 住友 恒：都市における上水需要の変動特性について — 需要の時間変動の分析—, 土木学会論文報告集 No. 192, 69-78 (1971)
- 4) Kalman, R.E.: A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 82, 35-45 (1960)
- 5) Jazwinski, A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press (1970)
- 6) Kalman, R.E. and Bucy, R.S.: New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, J. Basic Eng. Ser D., Vol. 83, 95-108 (1961)
- 7) Lee, R.C.K.: Optimal Estimation, Identification, and Control, MIT Press.
- 8) 相良節夫：同定問題, 計測と制御, 第8巻4号 (1969)
- 9) Hino, M.: Runoff forecast by linear predictive filter, J. Hydraulic Div., Proc. ASCE, Vol. 96, No. HY 3, 681-702 (197)
- 10) 日野幹雄・石川秀和：水需要変動へのカルマン・フィルター理論の適用, 水資源の最適計画に関する基礎的研究, 文部省科学研究費・特定研究 (水資源)・昭和 46 年度報告書 (1972)
- 11) 日野幹雄・森義一・吉川信二郎：カルマン・フィルターによる大気汚染の予測モデルの開発, 東京工業大学・土木工学科研究報告, No. 14, June (1973)
- 12) 日野幹雄：カルマン制御理論の平易な誘導について, 東京工業大学 土木工学科研究報告, No. 15 (1973)

(1973. 7. 16・受付)