

薄肉開断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導

UNIFIED FORMULATION OF BASIC EQUATIONS OF ELASTIC STABILITY FOR THIN-WALLED MEMBERS WITH OPEN CROSS-SECTION

坂 井 藤 一*

By Fujikazu Sakai

1. 序 論

薄肉部材は土木・建築・航空・造船・機械などの各分野において頻繁に使用される構造部材である。それらは構造物の軽量化に大いに役立っているが、反面その座屈不安定現象による耐荷力の減少に対しては十分な注意が肝要である。

特に薄肉部材の座屈においては、ねじりを伴う全体座屈ならびに板・殻としての局部座屈あるいは両者の連成座屈が多くの問題を提示している。本報告では全体座屈との関連において論ずることとする。

この問題に関する研究は1907年の Timoshenko, S.P. のねじり座屈および1928年の Wagner, H. の曲げねじり座屈など軸圧縮荷重による柱のねじり座屈現象ならびに1899年の Prandtl, L. および1905年の Timoshenko, S.P. の鉛直横方向曲げ荷重によるはりの横座屈（横倒れ座屈・水平座屈）現象の取扱以来数多くの研究がなされてきた。これらの成果は枚挙にいとまがないほど発表されているが、Timoshenko, S.P.¹⁾, Goodier, J.N.²⁾, Bleich, F.³⁾, Vlasov, V.Z.⁴⁾, Kollbrunner, K.C. and Meister, M.⁵⁾ および倉西⁶⁾, 奥村⁷⁾, 加藤⁸⁾, 川井⁹⁾ など一連の体系的研究に集成されたと見られよう。

これらの研究は主としてねじりの影響の厳しい開断面部材を対象とし、十分な補剛材の存在によって断面形状の変化を生じないという条件を前提とするいわゆる曲げねじり理論に基づいている。断面形状の変化を考慮した全体座屈は局部座屈との連成状態と考えられる。このような座屈例は Goodier, J.N. and Barton, M.V.¹⁰⁾ 奥村⁷⁾, Bijlaard, A.A.¹¹⁾, 奥村・鈴木¹²⁾, 西野¹³⁾, Bulson P.S.¹⁴⁾, Goldberg, J.E. et. al.¹⁵⁾ などに見られるが、ほとんどは開断面材に限られており、その場合弾性領域においては断面形状の変化は全体座屈の限界荷重の大き

さにそれほど重大な影響は及ぼさないというのが定説のようである注1)。

以上の諸研究における基礎理論式の誘導に際しては、最小ポテンシャルエネルギー原理あるいは仮想仕事の原理が有効に利用されている。しかしながら、その際ねじり現象の扱いが幾何学的直観によってなされているために、既往研究の結果は該当する対象が限定されているとか、あるいは研究者によって異なる結果に至るなど、若干理論的にあいまいでかつまたフォーミュレーションが統一的でないうらみがある。

近年有限要素法の非線形力学への適用に伴って、幾何学的非線形問題を弾性論基礎に戻って論ずる必要が提唱され (Martin, H.C.¹⁶⁾ Mallett, R.H. and Marcal, P.V.¹⁷⁾ Hartz, B.J. and Nathar, N.D.¹⁸⁾), 座屈解析も幾何学的非線形問題の一環として弾性論基礎の観点から見直され、統一的な解釈が確立しつつあるように思われる。

本報告ではこのような観点から薄肉部材の座屈安定に関する基礎方程式を誘導する際に、幾何学的直観によらず連続体力学の有限変位理論から出発して代数的に忠実に式を展開する方法を採った。薄肉部材のねじり問題において一様でないねじりが起る場合に対し、有限変位理論はまだ十分に確立されていないように思われ、また非保存系の問題も生ずることなど考察すべき点が多い。本論ではその有限変位理論の線形化という立場から座屈安定方程式を誘導した。この誘導手法は曲げ変形の場合きわめてポピュラーであるにもかかわらず、ねじり変形に対し適用された例はあまり見られなかったようである注2)。

本論で得られた開断面部材に対する理論式は諸研究に

注1) これは局部座屈が座屈耐荷力に関して重要でないという意味ではない。板や殻としての局部座屈が決定的な場合はここでは別現象として除外した。

注2) 筆者が本報告の骨子をまとめたのは昭和 47 年 9 月のことであるが、最近この種の問題で筆者と類似の立場からの研究が相ついでなされている¹⁹⁾。

において誘導された方程式と異なる結果となったが、幾何学的直観によるものより厳密かつ統一なフォーミュレーションであろうと思われる。

また、同様な手法を開断面部材の断面変形を伴う横座屈問題に適用し、線形安定方程式を得ているが、この問題は従来ほとんど検討されていない。これについては稿を改めて述べることにしたい。

2. 薄肉開断面材の線形化有限変位理論

(1) 初期応力問題

図一に示すような薄肉開断面材を考える注3)。断面

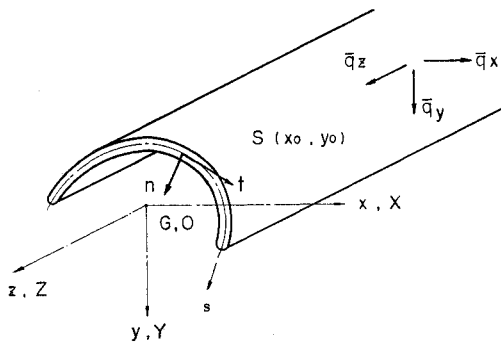


Fig. 1 General view of thin-walled member

の重心を G, セン断中心を S とする。空間固定座標系 O-X-Y-Z, 断面に固定された Lagrange 座標系 G-x-y-z および z-s を定義する。変形前の状態において, 二つの直交座標系 O-X-Y-Z と G-x-y-z は一致している。x および y 軸は断面主軸であり, s 座標は断面輪郭線に沿って採られる。輪郭線の接線ベクトルおよび内向き法線ベクトルを t および n とする。

x, y, z 方向の変位を u, v, w とし, t, n 方向の変位を v_t, v_n とする。薄板要素が z-s (t) 面内において二次元応力場にあると想定すれば, Green のひずみテンソルは次のように表わされる注2)。

$$\epsilon_z = \epsilon_z^L + \epsilon_z^N = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$\tau_{zs} = \tau_{zs}^L + \tau_{zs}^N = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} + \frac{\partial v_t}{\partial s} \cdot \frac{\partial v_t}{\partial z} + \frac{\partial v_n}{\partial s} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial z} \dots \dots \dots (2)$$

両式において, $\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$ 項は微小として省略している。

薄肉構造の理論では通常のこととして,

注3) この薄肉部材とは, 一応部材断面の横方向寸法と板厚の比が 10 以上のものと定義しておく4)。

$$\epsilon_s = \epsilon_s^L = \frac{\partial v_t}{\partial s} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

また, 開断面材ではせん断変形に関して,

$$\tau_{zs}^L = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

という二つの仮定を置く。したがって, せん断ひずみは,

$$\tau_{zs} = \tau_{zs}^N = \frac{\partial v_n}{\partial s} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial z} \dots \dots \dots (2)'$$

以上において, ()^L は微小ひずみ(線形成分)であり, ()^N は非線形成分を表わしている。

応力を Kirchhoff の応力テンソルで考えて, 応力とひずみの Hooke 則を想定すれば次の関係式を得る。

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_z + \nu \epsilon_s) = E \epsilon_z \dots \dots \dots (5)$$

$$\tau_{zs} = G \tau_{zs} \dots \dots \dots (6)$$

ここで, 通常ポアソン比 ν は無視される。

$$\nu = 0 \dots \dots \dots (7)$$

外荷重 $\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{q}_z$ が作用するものとし, 外荷重および温度応力・残留応力・プレストレスなどによって, 微小薄板要素 tds に初期応力 $\sigma_z^{(0)}, \tau_{zs}^{(0)}$ が誘起されている状態を考えれば, 次の仮想仕事の原理が成立する注1)。

$$\delta \pi = \delta \pi_1 + \delta \pi_2 - \delta \pi_3 = 0 \dots \dots \dots (8)$$

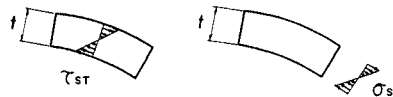
ここで,

$$\delta \pi_1 = \int_0^l \int_F [\sigma_z^{(0)} \delta \epsilon_z^N + \tau_{zs}^{(0)} \delta \tau_{zs}^N + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{zs} \delta \tau_{zs}] t ds \cdot dx \dots \dots (9)$$

$$\delta \pi_2 = \text{付加内部仮想仕事} \dots \dots \dots (10)$$

$$\delta \pi_3 = \int_0^l \int_F [\bar{q}_x \delta u(\bar{a}_x, \bar{a}_y) + \bar{q}_y \delta v(\bar{b}_x, \bar{b}_y) + \bar{q}_z \delta w(\bar{e}_x, \bar{e}_y)] t ds dx \dots \dots (11)$$

ここで, \int_F は全断面積分, l は部材長であり, $(\bar{a}_x, \bar{a}_y), (\bar{b}_x, \bar{b}_y), (\bar{e}_x, \bar{e}_y)$ は部材端力を含む荷重 $\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{q}_z$ の作用点の座標である。



(a) Shear stress due to St. Venant torsion (b) Normal stress due to transverse plate-bending

Fig. 2 Stresses adding to plane stresses

第2項の付加内部仮想仕事とは, 二次元応力場では表現され得ないような薄板の変形現象によってなされる内部仕事量である。たとえば, 図-2 に示すような St. Venant ねじりや横方向板曲げなどの現象は二次元応力場の適用範囲外にある。

本論では, 断面形状の変化は考えていない注4)。した

注4) 箱断面では断面変形の影響が重大な場合がある。その場合には横方向板曲げの考慮が必要となる注2)。

がって、横方向板曲げについては仕事は0であるから、St. Venantねじりによる仕事のみ考えればよい。

以上の式(8)を高次の非線形項を無視することによって線形化し、積分操作を施せば、薄肉部材の線形化有限変位理論の基礎方程式およびポテンシャルエネルギー表現を得る。

(2) 変位および断面諸量

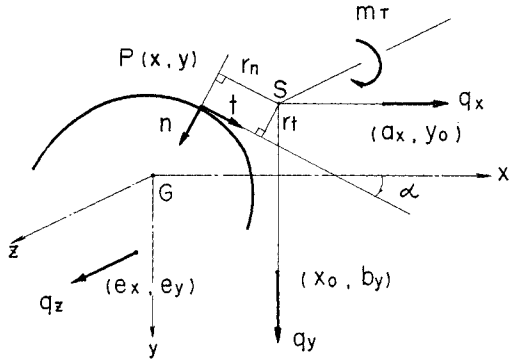


Fig. 3 Coordinate system and loads

図-3 に示すように断面の座標系と荷重を定義する。

せん断中心 S の x-y 座標を (x₀, y₀) とする。図中 q_x, q_y, q_z は点 (a_x, y₀), (x₀, b_y), (e_x, e_y) に作用する x, y, z 方向の荷重であり、m_T はせん断中心回りのねじりモーメントである。

これらの荷重は前述の q̄_x, q̄_y, q̄_z の集積であり、次のように表わされる。

$$q_x = \int_F \bar{q}_x ds \dots\dots\dots (12.a)$$

$$q_y = \int_F \bar{q}_y ds \dots\dots\dots (12.b)$$

$$q_z = \int_F \bar{q}_z ds \dots\dots\dots (12.c)$$

$$m_T = \int_F [\bar{q}_y(\bar{a}_x - x_0) - \bar{q}_x(\bar{b}_y - y_0)] ds \quad (12.d)$$

せん断中心の x 方向および y 方向の変位 (たわみ) をそれぞれ u₀ および v₀ とし、せん断中心回りの回転角 (ねじり角) を θ とすれば、点 P(x, y; s) の変位は次のように表わされる。

$$u = u_0 - x_s \cdot (1 - \cos \theta) - y_s \cdot \sin \theta \dots\dots\dots (13)$$

$$v = v_0 + x_s \cdot \sin \theta - y_s \cdot (1 - \cos \theta) \dots\dots\dots (14)$$

$$v_t = -\cos \alpha \cdot u_0 - \sin \alpha \cdot v_0 + r_t \cdot \theta \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$x_s \equiv x - x_0, \quad y_s \equiv y - y_0 \dots\dots\dots (16)$$

回転 θ は小さいものと仮定して、u および v を線形化すれば次の式を得る。

$$u = u_0 - y_s \theta \dots\dots\dots (17)$$

$$v = v_0 + x_s \theta \dots\dots\dots (18)$$

接線 (t) 方向と x 軸のなす角 α は次の関係を有する。

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds} \dots\dots\dots (19)$$

したがって、式(15)は次のようになる。

$$v_t = -\frac{dx}{ds} u_0 - \frac{dy}{ds} v_0 + r_t \theta \dots\dots\dots (20)$$

式(4)の条件から、断面内で一様な z 方向の変位を w₀ として、

$$w = -\int_0^s \frac{\partial v_t}{\partial z} ds + w_0 \\ = w_0 - x u_0' - y v_0' - \omega \theta' \dots\dots\dots (21)$$

ここで、()' は z に関する微分を表わす。また、

$$\omega = \int_0^s r_t ds \dots\dots\dots (22)$$

は単位そり (扇形面積) である。

さらに、n 方向の変位は次のように表わされる。

$$v_n = -\sin \alpha \cdot u_0 + \cos \alpha \cdot v_0 + r_n \cdot \theta \\ = -\frac{dy}{ds} u_0 + \frac{dx}{ds} v_0 + r_n \theta \dots\dots\dots (23)$$

ここで、r_n はせん断中心と法線ベクトルとの距離を表わし、次のような関係がある。

$$r_n = x_s x' + y_s y' \dots\dots\dots (24)$$

ここで、()' は s に関する微分を表わす。

式(19)から次のような関係がある。

$$x'^2 + y'^2 = 1 \dots\dots\dots (25)$$

初期応力 σ_z⁽⁰⁾, τ_{zs}⁽⁰⁾ は次のように表わされる。

$$\sigma_z^{(0)} = \frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \dots\dots\dots (26)$$

$$\tau_{zs}^{(0)} = -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) \dots\dots\dots (27)$$

ここで、P⁽⁰⁾, M_x⁽⁰⁾, M_y⁽⁰⁾ は初期断面力でありそれぞれ重心 G を通る軸力および x, y 主軸回りの曲げモーメントである。また、Q_x⁽⁰⁾, Q_y⁽⁰⁾ は同様にせん断中心 S を通る x 軸および y 軸方向のせん断力である。σ_r は残留応力で全部材長にわたって一様と見られる。

式(26), (27)中において、F, I_x, I_y は断面定数でそれぞれ断面積、断面慣性モーメントである。

$$F \equiv \int_F t ds, \quad I_x \equiv \int_F y^2 t ds, \quad I_y \equiv \int_F x^2 t ds \dots\dots\dots (28)$$

また、S_x, S_y はせん断応力の分布を表わし、次の式で与えられる。

$$S_x \equiv \int_s^s y t ds, \quad S_y \equiv \int_s^s x t ds \text{ 注5) } \dots\dots\dots (29)$$

したがって、次の関係が成立する。

$$\int_F S_x dx = \int_F S_y dy = 0 \dots\dots\dots (30)$$

注5) これらの積分の始点は開断面の自由端である。

$$\int_F S_x dy = -I_x, \int_F S_y dx = -I_y \text{ 注6).....(31)}$$

さらに、後で必要となる次の関係を示しておく。

$$\int_F \omega t ds = 0 \text{.....(32)}$$

これより S 座標の原点が決定される。

$$\int_F \omega x t ds = \int_F \omega y t ds = 0 \text{.....(33)}$$

これよりせん断中心の座標 (x_0, y_0) が決定される。

$$I_\omega \equiv \int_F \omega^2 t ds \text{.....(34)}$$

は扇形慣性モーメントである。

$$J \equiv \frac{1}{3} \int_F t^3 ds \text{.....(35)}$$

は純ねじり (St. Venant ねじり) の慣性モーメントを表わす。

(3) 仮想仕事式

前述の仮想仕事式 (8)~(11) を適用する。式 (9) から、

$$\begin{aligned} \delta \pi_1 = \int_0^l \int_F \left[\left(\frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \right) \delta \epsilon_z^N \right. \\ \left. - \frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) \delta \tau_{zs}^N \right. \\ \left. + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{zs} \delta \tau_{zs} \right] t ds dz \text{.....(36)} \end{aligned}$$

$$\delta \pi_2 = \int_0^l G J \theta' \delta \theta' dz \text{.....(37)}$$

$$\begin{aligned} \delta \pi_3 = \int_0^l [q_x \delta u(a_x, y_0) + q_y \delta v(x_0, b_y) \\ + q_z \delta w(e_x, e_y) + m_T \delta \theta] dz \\ + [P_x(l) \delta u(l) - P_x(o) \delta u(o) + P_y(l) \delta v(l) \\ - P_y(o) \delta v(o) + P_z(l) \delta w_o(l) - P_z(o) \delta w_o(o) \\ - M_x(l) \delta v_o'(l) + M_x(o) \delta v_o'(o) - M_y(l) \delta u_o'(l) \\ + M_y(o) \delta u_o'(o) + M_T(l) \delta \theta(l) - M_T(o) \delta \theta(o) \\ - M_\omega(l) \delta \theta'(l) + M_\omega(o) \delta \theta'(o)] \text{.....(38)} \end{aligned}$$

ここで、[.....] 項は部材端力による仕事を表わしている。

式 (17), (18), (21) から、

$$u(a_x, y_0) = u_0 - (a_x - x_0) \frac{\theta^2}{2}$$

$$v(x_0, b_y) = v_0 - (b_y - y_0) \frac{\theta^2}{2}$$

$$w(e_x, e_y) = w_0 - e_x u_0' - e_y v_0' - \omega(e_x, e_y) \theta'$$

$$\begin{aligned} \delta \pi_1 = \int_0^l \int_F \left[\left(\frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \right) \delta \epsilon_z^N \right. \\ \left. - \frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) (\delta \tau_{zs}^N) \right. \\ \left. + E \epsilon_z^L \delta \epsilon_z^L \right] t ds \cdot dz \text{.....(45)} \end{aligned}$$

$$\delta \pi_1 = \delta \pi_{11} + \delta \pi_{12} + \delta \pi_{13} \text{.....(46)}$$

とおけば、右辺の各項は次のようになる。

したがって、式 (38) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \pi_3 = \int_0^l [q_x \{ \delta u_0 - (a_x - x_0) \theta \delta \theta \} \\ + q_y \{ \delta v_0 - (b_y - y_0) \theta \delta \theta \} + q_z \{ \delta w_0 - e_x \delta u_0' \\ - e_y \delta v_0' - \omega(e_x, e_y) \delta \theta' + m_T \delta \theta \} dz \\ + [P_x(l) \{ \delta u_0(l) - (a_x - x_0) \theta(l) \delta \theta(l) \} \\ - P_x(o) \{ \delta u_0(o) - (a_x - x_0) \theta(o) \delta \theta(o) \} \\ + P_y(l) \{ \delta v_0(l) - (b_y - y_0) \theta(l) \delta \theta(l) \} - \\ P_y(o) \{ \delta v_0(o) - (b_y - y_0) \theta(o) \delta \theta(o) \} \\ + P_z(l) \delta w_o(l) - P_z(o) \delta w_o(o) - M_y(l) \delta u_o'(l) \\ + M_y(o) \delta u_o'(o) - M_x(l) \delta v_o'(l) + M_x(o) \delta v_o'(o) \\ + M_T(l) \delta \theta(l) - M_T(o) \delta \theta(o) - M_\omega(l) \delta \theta'(l) \\ + M_\omega(o) \delta \theta'(o)] \text{.....(39)} \end{aligned}$$

式 (1) に式 (17), (18), (21) の u, v, w を代入すれば、 ϵ_z に対し次の表現式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon_z = \epsilon_z^L + \epsilon_z^N \\ \epsilon_z^L = w_0' - x u_0'' - y v_0'' - \omega \theta'' \\ \epsilon_z^N = \frac{1}{2} \{ u_0'^2 + v_0'^2 + 2(-y_s u_0' + x_s v_0') \theta' \\ + (x_s^2 + y_s^2) \theta'^2 \} \text{.....(40)} \end{aligned}$$

式 (2') に式 (23) の v_n を代入すれば、 τ_{zs} に対し次の表現式を得る。

$$\begin{aligned} \tau_{zs} = \tau_{zs}^N \\ = (-y'' u_0' + x'' v_0' + r_n \theta') \\ (-y'' u_0 + x'' v_0 + r_n \theta) \text{.....(41)} \end{aligned}$$

断面輪郭線は直線から構成されていると仮定する。

$$x'' = y'' = 0 \text{.....(42)}$$

また、式 (24) から (25) を考慮すれば、

$$r_n = 1 \text{.....(43)}$$

したがって、式 (41) は次のようになる。

$$\tau_{zs}^N = (-y' u_0' + x' v_0' + r_n \theta') \theta \text{.....(44)}$$

式 (36) に (5), (6) の両式および式 (40), (41) を代入すれば、

$$\begin{aligned} \delta \pi_1 = \int_0^l \int_F \left[\left(\frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \right) \delta \epsilon_z^N \right. \\ \left. - \frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) \delta \tau_{zs}^N \right. \\ \left. + E(\epsilon_z^L + \epsilon_z^N) (\delta \epsilon_z^L + \delta \epsilon_z^N) \right. \\ \left. + G \tau_{zs}^N \delta \tau_{zs}^N \right] t ds \cdot dz \end{aligned}$$

高次の微量を無視すれば上式は次のようになる。

注6) 開断面における自由端ではせん断応力が0であるという条件から式 (30), (31) の成立は明らか。

$$\begin{aligned}
 \delta\pi_{11} &= \int_0^l \int_F \left(\frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \right) \delta\epsilon_z^N \cdot t ds dz \\
 &= \int_0^l \left[P^{(0)} \{u_0' \delta u_0' + v_0' \delta v_0' + y_0 (\theta' \delta u_0' + u_0' \delta \theta') - x_0 (\theta' \delta v_0' + v_0' \delta \theta')\} + \frac{\int_F (x_s^2 + y_s^2) t ds}{F} \theta' \delta \theta' \right] \\
 &\quad + M_x^{(0)} \left\{ -(\theta' \delta u_0' + u_0' \delta \theta') + \frac{\int_F (x_s^2 + y_s^2) y t ds}{I_x} \theta' \delta \theta' \right\} + M_y^{(0)} \left\{ (\theta' \delta v_0' + v_0' \delta \theta') \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\int_F (x_s^2 + y_s^2) x t ds}{I_y} \theta' \delta \theta' \right\} + \left\{ \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta' \delta \theta' \right\} dz \text{ 注7) } \dots\dots\dots (47)
 \end{aligned}$$

ここで、次のような関係を定義しよう。

$$r_s^2 \equiv \frac{1}{F} \int_F (x_s^2 + y_s^2) t ds \dots\dots\dots (50)$$

$$\beta_y \equiv \frac{1}{2I_x} \int_F (x_s^2 + y_s^2) y \cdot t ds = \frac{1}{2I_x} \left(\int_F (x^2 + y^2) y \cdot t ds \right) - y_0 \dots\dots\dots (51.a)$$

$$\beta_x \equiv \frac{1}{2I_y} \int_F (x_s^2 + y_s^2) x \cdot t ds = \frac{1}{2I_y} \left(\int_F (x^2 + y^2) x \cdot t ds \right) - x_0 \dots\dots\dots (51.b)$$

これを利用して式 (47) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta\pi_{11} &= \int_0^l \left[P^{(0)} \{u_0' \delta u_0' + v_0' \delta v_0' + y_0 (\theta' \delta u_0' + u_0' \delta \theta') - x_0 (\theta' \delta v_0' + v_0' \delta \theta') + r_s^2 \theta' \delta \theta'\} \right. \\
 &\quad \left. - M_x^{(0)} \{ -(\theta' \delta u_0' + u_0' \delta \theta') + 2\beta_y \theta' \delta \theta' \} + M_y^{(0)} \{ (\theta' \delta v_0' + v_0' \delta \theta') + 2\beta_x \theta' \delta \theta' \} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta' \delta \theta' \right\} \right] dz \\
 \delta\pi_{12} &= \int_0^l \int_F \left[-\frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) (\delta r_{zs}^N) \right] t ds \cdot dz \dots\dots\dots (52)
 \end{aligned}$$

ここで、式 (44) を代入すれば、

$$\begin{aligned}
 \delta\pi_{12} &= \int_0^l \left[-Q_y^{(0)} \left\{ \theta \delta u_0' + u_0' \delta \theta + \frac{\int_F S_x r_n ds}{I_x} \cdot (\theta \delta \theta' + \theta' \delta \theta) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - Q_x^{(0)} \left\{ -(\theta \delta v_0' + v_0' \delta \theta) + \frac{\int_F S_y r_n ds}{I_y} (\theta \delta \theta' + \theta' \delta \theta) \right\} \right] dz \dots\dots\dots (53)
 \end{aligned}$$

ここで、式 (24) および (29) から、次の関係を導く。

$$\begin{aligned}
 \int_F S_x r_n ds &= \int_F S_x (x_s x' + y_s y') ds \\
 &= -I_x \beta_y \dots\dots\dots (54.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_F S_y r_n ds &= \int_F S_y (x_s x' + y_s y') ds \\
 &= -I_y \beta_x \dots\dots\dots (54.b)
 \end{aligned}$$

これを利用して式 (53) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta\pi_{12} &= \int_0^l \left[-Q_y^{(0)} \{ \theta \delta u_0' + u_0' \delta \theta - \beta_y (\theta \delta \theta' + \theta' \delta \theta) \} - Q_x^{(0)} \{ -(\theta \delta v_0' + v_0' \delta \theta) - \beta_x (\theta \delta \theta' + \theta' \delta \theta) \} \right] \cdot dz \dots\dots (55) \\
 \delta\pi_{13} &= \int_0^l \int_F E \epsilon_z^L \delta \epsilon_z^L t ds \cdot dz \\
 &= \int_0^l \int_F E (w_0' - x u_0'' - y v_0'' - \omega \theta'') \cdot (\delta w_0' - x \delta u_0'' - y \delta v_0'' - \omega \delta \theta'') dz \\
 &= \int_0^l E (F w_0' \delta w_0' + I_y u_0'' \delta u_0'' + I_x v_0'' \delta v_0'' + I_\omega \theta'' \delta \theta'') dz \dots\dots\dots (56)
 \end{aligned}$$

以上のように表現された各変分に対して部分積分の操作を行い整理をすれば、次の各式を得る。式 (52)、(55) (56) から、

注7) 残留応力 σ_r は self-equilibrium 系であるから、
 $\int_F \sigma_r t ds = \int_F \sigma_r x t ds = \int_F \sigma_r y t ds = 0 \dots\dots\dots (48)$

$$\begin{aligned} \delta\pi_1 = & \int_0^l [-EFw_0''] \delta w_0 + [-\{P^{(0)}(u_0' + y_0\theta')\}' + (M_x^{(0)\theta'})' + (Q_y^{(0)\theta})' + EI_y u_0'''] \delta u_0 \\ & + [-\{P^{(0)}(v_0' - x_0\theta')\}' - (M_y^{(0)\theta'})' - (Q_x^{(0)\theta})' + EI_x v_0'''] \delta v_0 + [-\{P^{(0)}(y_0 u_0' \\ & - x_0 v_0' + r_s^2 \theta')\}' - \{M_x^{(0)}(-u_0' + 2\beta_y \theta')\}' - \{M_y^{(0)}(v_0' + 2\beta_x \theta')\}' + Q_y^{(0)}(-u_0' + \beta_y \theta') \\ & - \beta_y(Q_y^{(0)\theta})' + Q_x^{(0)}(v_0' + \beta_x \theta') - \beta_x(Q_x^{(0)\theta})' - \left(\int_F \sigma_r(x^2 + y^2) t ds \right) \theta'' + EI_\omega \theta'''] \delta \theta] dz \\ & + [\{EFw_0'\} \delta w_0 + \{P^{(0)}(u_0' + y_0\theta') - M_x^{(0)\theta'} - Q_y^{(0)\theta} - EI_y u_0'''\} \delta u_0 + \{EI_y u_0''\} \delta u_0' \\ & + \{P^{(0)}(v_0' - x_0\theta') + M_y \theta' + Q_x^{(0)\theta} - EI_x v_0'''\} \delta v_0 + \{EI_x v_0''\} \delta v_0' \\ & + \{P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0' + r_s^2 \theta') + M_x^{(0)}(-u_0' + 2\beta_y \theta') + M_y^{(0)}(v_0' + 2\beta_x \theta') + Q_y^{(0)\beta_y \theta} + Q_x^{(0)\beta_x \theta} \\ & + \left(\int_F \sigma_r(x^2 + y^2) t ds \right) \theta' - EI_\omega \theta'''] \delta \theta + \{EI_\omega \theta''\} \delta \theta']_0^l \dots \dots \dots (57) \end{aligned}$$

式 (37) から,

$$\delta\pi_2 = \int_0^l [-GJ\theta'' \delta \theta] dz + [GJ\theta' \delta \theta]_0^l \dots \dots \dots (58)$$

式 (8) に式 (57), (58), (39) の $\delta\pi_1$, $\delta\pi_2$, $\delta\pi_3$ を代入すれば, 結局以下の各式を得ることができる。

$$EFw_0'' + q_z = 0 \dots \dots \dots (59)$$

$$-\{P^{(0)}(u_0' + y_0\theta')\}' + (M_x^{(0)\theta'})' + (Q_y^{(0)\theta})' + EI_y u_0'' - q_x - q_z' e_x = 0 \dots \dots \dots (60)$$

$$-\{P^{(0)}(v_0' - x_0\theta')\}' - (M_y^{(0)\theta'})' - (Q_x^{(0)\theta})' + EI_x v_0'' - q_y - q_z' e_y = 0 \dots \dots \dots (61)$$

$$\begin{aligned} & -\{P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0' + r_s^2 \theta')\}' - \{M_x^{(0)}(-u_0' + 2\beta_y \theta')\}' - \{M_y^{(0)}(v_0' + 2\beta_x \theta')\}' + Q_y^{(0)}(-u_0' + \beta_y \theta') \\ & - \beta_y(Q_y^{(0)\theta})' + Q_x^{(0)}(v_0' + \beta_x \theta') - \beta_x(Q_x^{(0)\theta})' - \left(\int_F \sigma_r(x^2 + y^2) t ds \right) \theta'' + EI_\omega \theta'' - GJ\theta'' - m_T \\ & + q_x(a_x - x_0)\theta + q_y(b_y - y_0)\theta - q_z'\omega(e_x, e_y) = 0 \dots \dots \dots (62) \end{aligned}$$

$$[\{EFw_0' - P_z\} \delta w_0]_0^l = 0 \dots \dots \dots (63)$$

$$[\{P^{(0)}(u_0' + y_0\theta') - M_x^{(0)\theta'} - Q_y^{(0)\theta} - EI_y u_0'' - P_x\} \delta u_0 + (EI_y u_0'' + M_y) \delta u_0']_0^l = 0 \dots \dots \dots (64)$$

$$[\{P^{(0)}(v_0' - x_0\theta') + M_y \theta' + Q_x^{(0)\theta} - EI_x v_0'' - P_y\} \delta v_0 + (EI_x v_0'' + M_x) \delta v_0']_0^l = 0 \dots \dots \dots (65)$$

$$\begin{aligned} & [\{P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0' + r_s^2 \theta') + M_x^{(0)}(-u_0' + 2\beta_y \theta') + M_y^{(0)}(v_0' + 2\beta_x \theta') + Q_y^{(0)\beta_y \theta} + Q_x^{(0)\beta_x \theta} \\ & + \left(\int_F \sigma_r(x^2 + y^2) t ds \right) \theta' - EI_\omega \theta'' + GJ\theta' - M_T + \{P_x(a_x - x_0) + P_y(b_y - y_0)\} \theta \delta \theta \\ & + \{EI_\omega \theta'' + M_\omega\} \delta \theta']_0^l = 0 \dots \dots \dots (66) \end{aligned}$$

式 (59)~(62) がこの場合の一般線形有限変形理論の基礎方程式である。さらに一般化するには, ねじり初期応力を導入することが可能である。すなわち, 初期断面力 $M_\omega^{(0)}$, $H_\omega^{(0)}$ を考慮すれば, 式 (26), (27) の代りに,

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(0)} = & \frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x \\ & + \frac{M_\omega^{(0)}}{I_\omega} \omega + \sigma_r \dots \dots \dots (68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zs}^{(0)} = & -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y + \frac{H_\omega^{(0)}}{I_\omega} S_\omega \right) \\ & \dots \dots \dots (69) \end{aligned}$$

を用いることになる。ここでは, これ以上の展開はせずにとどめておく。

式 (63)~(66) は境界条件を与える。すなわち, 式 (63) から,

$$w_0 = 0 \dots \dots \dots (70.a)$$

$$P_z = EFw_0' \dots \dots \dots (70.b)$$

式 (64) から,

$$u_0 = 0 \dots \dots \dots (71.a)$$

$$\begin{aligned} P_x = & -EI_y u_0'' + P^{(0)}(u_0' + y_0\theta') \\ & - M_x^{(0)\theta'} - Q_y^{(0)\theta} \dots \dots \dots (71.b) \end{aligned}$$

$$u_0' = 0 \dots \dots \dots (72.a)$$

$$M_y = -EI_y u_0'' \dots \dots \dots (72.b)$$

式 (65) から,

$$v_0 = 0 \dots \dots \dots (73.a)$$

$$\begin{aligned} P_y = & -EI_x v_0'' + P^{(0)}(v_0' - x_0\theta') \\ & + M_y^{(0)\theta'} + Q_x^{(0)\theta} \dots \dots \dots (73.b) \end{aligned}$$

$$v_0' = 0 \dots \dots \dots (74.a)$$

$$M_x = -EI_x v_0'' \dots \dots \dots (74.b)$$

式 (66) から,

$$\theta = 0 \dots \dots \dots (75.a)$$

$$\begin{aligned} M_T = & -EI_\omega \theta'' + GJ\theta' + P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0' + r_s^2 \theta') \\ & + M_x^{(0)}(-u_0' + 2\beta_y \theta') + M_y^{(0)}(v_0' + 2\beta_x \theta') \\ & + Q_y^{(0)\beta_y \theta} + Q_x^{(0)\beta_x \theta} \\ & + \{P_x(a_x - x_0) + P_y(b_y - y_0)\} \theta \\ & + \left(\int_F \sigma_r(x^2 + y^2) t ds \right) \theta' \dots \dots \dots (75.b) \end{aligned}$$

$$\theta' = 0 \dots \dots \dots (76.a)$$

$$M_\omega = -EI_\omega \theta'' \dots \dots \dots (76.b)$$

式 (70)~(76) は端部における境界条件の種類を示している。各式の中で式 (.a) は幾何学的境界条件であり, また式 (.b) は力学的境界条件となる。

通常残留応力 σ_r は部材端で 0 と見なされる。したがって、式 (75.b) の最終項は無視してよい。

部材微小片 dz に働く力のつり合いから、

$$q_z = -P^{(0)'} \dots\dots\dots (77)$$

$$Q_x^{(0)} = M_y^{(0)'} + q_z e_x \dots\dots\dots (78)$$

$$q_x = -Q_x^{(0)'} \dots\dots\dots (79)$$

$$Q_y^{(0)} = M_x^{(0)'} + q_z e_y \dots\dots\dots (80)$$

$$q_y = -Q_y^{(0)'} \dots\dots\dots (81)$$

以上を考慮すれば、(59)~(62) の各式は次のようになる。

$$EFw_0'' + q_z = 0 \dots\dots\dots (82)$$

$$EI_y u_0'' - \{P^{(0)}(u_0' + y_0 \theta')\}' + (M_x^{(0)} \theta)'' + e_y (q_z \theta)' - q_x - q_z' e_x = 0 \dots\dots\dots (83)$$

$$EI_x v_0'' - \{P^{(0)}(v_0' - x_0 \theta')\}' - (M_y^{(0)} \theta)'' - e_x (q_z \theta)' - q_y - q_z' e_y = 0 \dots\dots\dots (84)$$

$$EI_\omega \theta'' - GJ\theta'' - \{P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0' + r_s^2 \theta')\}' - \{(2\beta_y M_x^{(0)} + 2\beta_x M_y^{(0)})\theta'\}' + M_x^{(0)} u_0'' - M_y^{(0)} v_0'' - q_z (e_y u_0' - e_x v_0') + q_x (a_x + \beta_x - x_0) \theta + q_y (b_y + \beta_y - y_0) \theta - \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y_s^2) t ds \right) \theta'' - q_z' \omega (e_x, e_y) - m_T = 0 \dots\dots\dots (85)$$

独立な式 (82) を除いて、(83), (84), (85) の各式は次のように書かれる。

$$EI_y u_0'' - \{P^{(0)}(u_0' + y_0 \theta') - q_z e_y \theta\}' + (M_x^{(0)} \theta)'' = q_x + q_z' e_x \dots\dots\dots (86)$$

$$EI_x v_0'' - \{P^{(0)}(v_0' - x_0 \theta') + q_z e_x \theta\}' - (M_y^{(0)} \theta)'' = q_y + q_z' e_y \dots\dots\dots (87)$$

$$EI_\omega \theta'' - GJ\theta'' - \{P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0') + (r_s^2 P^{(0)} + 2\beta_y M_x^{(0)} + 2\beta_x M_y^{(0)})\theta'\}' + M_x^{(0)} u_0'' - M_y^{(0)} v_0'' - q_z (e_y u_0' - e_x v_0') - \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'' + \{q_x (a_x + \beta_x - x_0) + q_y (b_y + \beta_y - y_0)\} \theta = m_T + q_z' \omega (e_x, e_y) \dots\dots\dots (88)$$

これらはいわゆるビーム・コラム方程式の一般化された形を持つ線形化有限変位理論式である。これらの式の右辺を 0 とするならば、すなわち、

$$q_x + q_z' e_x = 0 \dots\dots\dots (89)$$

$$q_y + q_z' e_y = 0 \dots\dots\dots (90)$$

$$m_T + q_z' \omega (e_x, e_y) = 0 \dots\dots\dots (91)$$

が成立するならば、一般座屈安定方程式 (固有方程式) となる。

境界条件は式 (71)~(76) から 表-1 のようになる。

(4) 一般座屈安定方程式

線形化有限変位理論式 (86), (87), (88) において、式 (89), (90), (91) が成立するならば、次の方程式群

表-1 境界条件の種類

(a)	(b)
$u_0=0$ $u_0'=0$	$P_x = -EI_y u_0''' + P^{(0)}(u_0' + y_0 \theta') - (M_x^{(0)} \theta)'$ $M_y = -EI_y u_0''$
$v_0=0$ $v_0'=0$	$P_y = -EI_x v_0''' + P^{(0)}(v_0' - x_0 \theta') + (M_y^{(0)} \theta)'$ $M_x = -EI_x v_0''$
$\theta=0$	$M_T = -EI_\omega \theta''' + GJ \theta' + P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0') + (r_s^2 P^{(0)} + 2\beta_y M_x^{(0)} + 2\beta_x M_y^{(0)}) \theta'$ $- M_x^{(0)} u_0' + M_y^{(0)} v_0' + (\beta_y Q_y^{(0)} + \beta_x Q_x^{(0)}) \theta$
$\theta'=0$	$M_\omega = -EI_\omega \theta''$

(a) 幾何学的境界条件 (束縛条件)
(b) 力学的境界条件 (自然条件)

を得る。

$$EI_y u_0'' - \{P^{(0)}(u_0' + y_0 \theta') - q_z e_y \theta\}' + (M_x^{(0)} \theta)'' = 0 \dots\dots\dots (92)$$

$$EI_x v_0'' - \{P^{(0)}(v_0' - x_0 \theta') + q_z e_x \theta\}' - (M_y^{(0)} \theta)'' = 0 \dots\dots\dots (93)$$

$$EI_\omega \theta'' - GJ\theta'' - \{P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0') + (r_s^2 P^{(0)} + 2\beta_y M_x^{(0)} + 2\beta_x M_y^{(0)})\theta'\}' + M_x^{(0)} u_0'' - M_y^{(0)} v_0'' - q_z (e_y u_0' - e_x v_0') - \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'' + \{q_x (a_x + \beta_x - x_0) + q_y (b_y + \beta_y - y_0)\} \theta = 0 \dots\dots\dots (94)$$

これらは薄肉開断面材の座屈方程式の最も一般的な表現である。従来このような形の一般的な表現を与えているのは Vlasov, V.Z. である。上式で、 q_z および σ_r を 0 と置き、かつ式 (94) 中の最後の項で β_x, β_y を省略すれば、Vlasov の導いた式と一致する。すなわち、Vlasov の式は本式の特別な場合であり、 β_x, β_y 項については若干厳密でないように思われる。

a) ねじり座屈式

式 (92), (93), (94) において、

$$M_x^{(0)} = M_y^{(0)} = 0, P^{(0)} = -P(\text{const.}) \dots\dots\dots (95)$$

であるならば、そのとき式 (77)~(81) によって、

$$q_x = q_y = q_z = 0$$

したがって、次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} EI_y u_0'' + P(u_0'' + y_0 \theta'') &= 0 \\ EI_x v_0'' + P(v_0'' - x_0 \theta'') &= 0 \\ EI_\omega \theta'' - GJ\theta'' + P(r_s^2 \theta'' + y_0 u_0'' - x_0 v_0'') &= 0 \\ - \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'' &= 0 \end{aligned} \right\} (96)$$

式 (96) は柱の残留応力を考慮したねじり座屈式である²³⁾。残留応力は普通の開断面では自由端で圧縮応力となり、第 3 式の最終項は正となるので、結局ねじり剛性 GJ を減少させる効果を持つ。

b) 横座屈式

式 (92), (93), (94) において、

$$M_y^{(0)} = 0, P^{(0)} = -P(\text{const.}) \dots\dots\dots (97)$$

であるならば、

$$q_x = q_z = 0$$

さらに、一軸対称であるならば、

$$x'' = 0 \dots\dots\dots(98)$$

したがって、式 (93) は独立し、式 (92), (94) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} EI_y u_0'''' + P(u_0'' + y_0 \theta'') + (M_x^{(0)} \theta)'' &= 0 \\ EI_w \theta'''' - GJ \theta'' + P(r_s^2 \theta'' + y_0 u_0'') \\ - 2\beta_y (M_x^{(0)} \theta')' + M_x^{(0)} u_0'' \\ + q_y (b_y + \beta_y - y_0) \\ - \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'' &= 0 \end{aligned} \right\} (99)$$

式 (99) は軸力 P の存在するときの横座屈の式である。これと従来の式とを比較して見よう。

Kollbrunner補注は Chwalla²⁴⁾ の結果を引用している。それは上式で残留応力の項および β_y 項を除いたものと一致する。

Bleich の与えている結果は、さらに $-2\beta_y (M_x^{(0)} \theta)'$ 項を $2\beta_y P e_y \theta''$ としている。これは初期荷重として軸力 P のみを考えている個所があるためであって、明らかに誤りと見られる。

c) 両端に等しい軸力および二方向曲げモーメントが作用する場合の式

式 (92), (93), (94) において、

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(0)} &= M_x, \quad M_y^{(0)} = M_y \\ P^{(0)} &= -P \end{aligned} \right\} (\text{const.}) \dots\dots(100)$$

であるならば、次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} EI_y u_0'''' + P(u_0'' + y_0 \theta'') + M_x \theta'' &= 0 \\ EI_x v_0'''' + P(v_0'' - x_0 \theta'') - M_y \theta'' &= 0 \\ EI_w \theta'''' - (GJ - r_s^2 P + 2\beta_y M_x + 2\beta_x M_y) \theta'' \\ + P(y_0 u_0'' - x_0 v_0'') + M_x u_0'' - M_y v_0'' \\ - \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(101)$$

式 (101) は残留応力項を除いて Timoshenko あるいは Goodier の示した結果と一致する注8)。ただし、Goodier などのそり剛性の計算法は本論の場合と若干異なるものである (補注参照)。

補注) Goodier および Kollbrunner などはそりを考える際、板厚方向のそりの変化を考慮した。すなわち、彼らは単位そりとして次の式を用いている。

$$\begin{aligned} \omega &= \int_0^s r_t ds + \int_0^t r_n dn \\ &= \int_0^s r_t ds + r_n t \end{aligned}$$

これより、式 (34) を用いて I_ω を決定する。このほうが厳密と言えはいるが、本論における I_ω と大差はない。

注8) 残留応力の影響を含めた式は Galambos, T.V. and Fukumoto, Y.²⁵⁾ あるいは Culver, C.G.²⁶⁾ に見られる。

3. 物理的意味

(1) 力の平衡条件からの誘導

Vlasov, V.Z. は変形後の幾何学的関係から力の平衡条件を用いて彼の一般理論式を導いたが、その誘導過程には若干の混乱が見られるようである。ここでは、座屈方程式構成の条件として従来用いられている変形後の力の平衡条件から本論における一般理論式を求めて見よう。

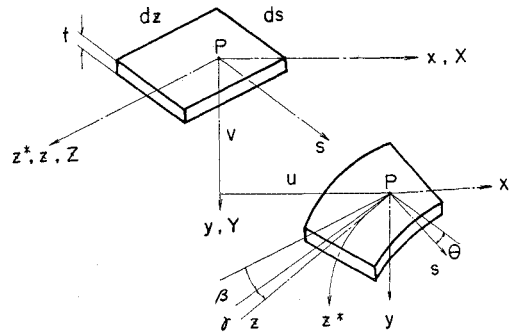


Fig. 4 Deformation of small strip element

図-4 のような微小片の変形後の状態を考えよう。図中 z^* は軸方向母線に沿って採られた埋込座標であり、 β および γ はその接線方向座標 z と z^* の YZ 平面および XZ 平面への射影とがなす角度である。今微小片 ds dz が基準状態から微小な変位 u, v, θ を生じたとする。変形が微小であるから、

$$\beta \approx \sin \beta \approx \tan \beta \approx \frac{du}{dz} \approx \frac{du}{dz} = u_0' - y_0 \theta' \dots\dots\dots(102.a)$$

$$\gamma \approx \sin \gamma \approx \tan \gamma \approx \frac{dv}{dz} \approx \frac{dv}{dz} = v_0' + x_0 \theta' \dots\dots\dots(102.b)$$

変形に伴って微小片に生ずる X, Y 方向の付加力 \bar{q}_x, \bar{q}_y は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{q}_x &= [(\sigma_z^{(0)} + \sigma_z^{(0)'} dz) (\beta + \beta' dz) - \sigma_z^{(0)} \beta \\ &\quad - \{(\tau_{zs}^{(0)} + \tau_{zs}^{(0)'} dz) (\theta + \theta' dz) \\ &\quad - \tau_{zs}^{(0)} \theta\} \sin \alpha] \cdot t ds \\ &= [(\sigma_z^{(0)} \beta)' - (\tau_{zs}^{(0)} \theta)' y'] t ds dz \dots\dots\dots(103) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_y &= [(\sigma_z^{(0)} + \sigma_z^{(0)'} dz) (\gamma + \gamma' dz) - \sigma_z^{(0)} \gamma \\ &\quad + \{(\tau_{zs}^{(0)} + \tau_{zs}^{(0)'} dz) (\theta + \theta' dz) \\ &\quad - \tau_{zs}^{(0)} \theta\} \cos \alpha] t ds \\ &= [(\sigma_z^{(0)} \gamma)' + (\tau_{zs}^{(0)} \theta)' x'] t ds dz \dots\dots\dots(104) \end{aligned}$$

また、変形に伴って生ずるせん断中心まわりの付加ねじりモーメント \bar{m}_T は次のようになる。

$$\bar{m}_T = \bar{m}_{T1} + \bar{m}_{T2} + \bar{m}_{T3} \dots\dots\dots(105)$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_{T1} &= -\bar{q}_x y_s + \bar{q}_y x_s \\ &= [-(\sigma_z^{(0)}\beta)'y_s + (\sigma_z^{(0)}r)'x_s \\ &\quad + (\tau_{zs}^{(0)}\theta)'(x_s x^* + y_s y^*)] t ds dz \dots (106) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_{T2} &= (-\tau_{zs}^{(0)} \cos \alpha \cdot r dz + \tau_{zs}^{(0)} \sin \alpha \cdot \beta dz) t ds \\ &= [\tau_{zs}^{(0)} (-x^* r + y^* \beta)] t ds dz \dots (107) \end{aligned}$$

$$\hat{m}_{T3} = -\{\bar{q}_x (\bar{a}_x - x_0) + \bar{q}_y (\bar{b}_y - y_0)\} \theta \dots (108)$$

幅 dz で全断面におよぶ帯板についての平衡から、

$$EI_y u_0'' = \int_F \bar{q}_x \dots (109)$$

$$EI_x v_0'' = \int_F \bar{q}_y \dots (110)$$

$$EI_\omega \theta'' - GJ \theta'' = \int_F \hat{m}_T \dots (111)$$

変形前に誘起されている応力 $\sigma_z^{(0)}$, $\tau_{zs}^{(0)}$ は次のように表わされる。

$$\sigma_z^{(0)} = \frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \dots (112)$$

$$\tau_{zs}^{(0)} = -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) \dots (113)$$

以上の関係を利用すれば、式 (109), (110), (111) は次のようになる。

$$\begin{aligned} EI_y u_0'' &= \int_F \left[\left\{ \left(\frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (u_0' - y_s \theta') \right\}' - \left\{ -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) \theta \right\}' y' \right] t ds \\ &= \{P^{(0)}(u_0' + y_0 \theta') - M_x^{(0)} \theta' - Q_y^{(0)} \theta\}' \dots (114) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_x v_0'' &= \int_F \left[\left\{ \left(\frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (v_0' + x_s \theta') \right\}' + \left\{ -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) \theta \right\}' x' \right] t ds \\ &= \{P^{(0)}(v_0' - x_0 \theta') + M_y^{(0)} \theta' + Q_x^{(0)} \theta\}' \dots (115) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_\omega \theta'' - GJ \theta'' &= \int_F \left[\left\{ \left(\frac{P^{(0)}}{F} + \frac{M_x^{(0)}}{I_x} y + \frac{M_y^{(0)}}{I_y} x + \sigma_r \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (-y_s (u_0' - y_s \theta') + x_s (v_0' + x_s \theta')) \right\}' \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) \theta \right\}' \cdot (x_s x^* + y_s y^*) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_y^{(0)}}{I_x} S_x + \frac{Q_x^{(0)}}{I_y} S_y \right) \cdot (-x^* r + y^* \beta) \right\}' \right] t ds \\ &\quad - \{q_x (a_x - x_0) + q_y (b_y - y_0)\} \theta \\ &= \{P^{(0)}(y_0 u_0' - x_0 v_0' + r_s^2 \theta') - M_x^{(0)}(u_0' - 2\beta_y \theta') \\ &\quad + M_y^{(0)}(v_0' + 2\beta_x \theta')\}' - Q_y^{(0)} u_0' + Q_x^{(0)} v_0' \\ &\quad + (Q_y^{(0)} \beta_y + Q_x^{(0)} \beta_x) \theta - \{q_x (a_x - x_0) \\ &\quad + q_y (b_y - y_0)\} \theta + \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'' \dots (116) \end{aligned}$$

上式で、式 (78)~(81) の関係を考慮すれば一般座屈式 (92), (93), (94) を得る。すなわち、基準状態から隣接状態へ移行した後 (ただし、微小変位)、力の平衡を考えることは、前述したような意味における有限変位理論の線形化とまったく等価であることがわかる。

Vlasov の結果では式 (116) 中における

$$\begin{aligned} (Q_y^{(0)} \beta_y + Q_x^{(0)} \beta_x) \theta &= -(q_y \beta_y + q_x \beta_x) \theta \\ \dots \dots \dots (117) \end{aligned}$$

項を含んでいない。彼はその誘導過程において、前記の式 (107), (108) の \hat{m}_{T2} , \hat{m}_{T3} として変形前のせん断中心軸回りのねじりモーメントを考えている。これは誤りであって、 \hat{m}_{T1} と同様に変形後のせん断中心について考えるべきであろうと思われる。これが本論の結果と相違している理由である。

Kollbrunner および Bleich も横座屈式において式 (117) の項は含んでいない。すなわち、彼らの示したフォーシュレーションは厳密性を欠くように思われる。

(2) β_x , β_y の物理的意味

式 (51.a, b) で定義された β_x , β_y を次のように書く。

$$\left. \begin{aligned} \beta_x &= x_D - x_0 \\ \beta_y &= y_D - y_0 \end{aligned} \right\} \dots (118)$$

ここで、 x_D , y_D は次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} x_D &= \frac{1}{2I_y} \int_F x(x^2 + y^2) t ds \\ y_D &= \frac{1}{2I_x} \int_F y(x^2 + y^2) t ds \end{aligned} \right\} \dots (119)$$

従来諸研究ではこの β_x , β_y あるいは x_D , y_D についてあまり考察されていず、その物理的意味に言及しているものは少ない。わずかに Chwalla および Barta, T.A.²⁷⁾ がこれに関して (x_D , y_D) を Kindem によって定義された有限ねじれ時のねじり中心の座標と呼んで触れている。

曲げねじりとの関連において (x_D , y_D) の物理的意味を最初に論じたのは Kindem, S.E.²⁸⁾ である。彼は、薄肉部材が曲げならびに大きなねじりを受ける一般の場合の特殊な場合として St. Venant ねじりを生ずるときには、(x_D , y_D) がねじり中心となることを示している。しかしこれより以前に Kappus, von R.^{29), 30)} は充実部材の大きな一様ねじりに対して有限変位理論を導き、(x_D , y_D) がねじり中心となることを示している。

このように前述の幾何学的特性値 β_x , β_y は、有限の St. Venant ねじりにおけるねじり中心 (x_D , y_D) と微小ねじりにおけるねじり中心たるせん断中心 (x_0 , y_0) との距離の x 成分および y 成分をそれぞれ表わしていることがわかる。

4. 初期変形問題

初期変形の存在する場合を考えよう。図-5 に示されるように、部材が x および y 方向に初期たわみ $u_0^{(0)}$ および $v_0^{(0)}$ (せん断中心 S に関して) を有し、せん断中心軸回りに初期ねじれ $\theta^{(0)}$ を有するとする。

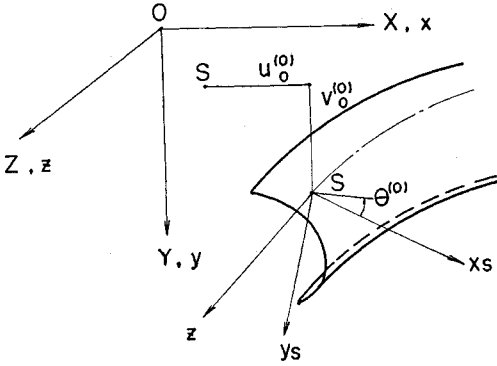


Fig. 5 Initial deformation

基準状態を $O-XYZ$ (固定座標) とすれば、式 (40)、(41) からひずみは次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon_z = & w_0' - x(u_0^{(0)''} + u_0''') \\ & - y(v_0^{(0)''} + v_0''') - \omega(\theta^{(0)''} + \theta''') \\ & + \frac{1}{2}\{u_0^{(0)'} + u_0'\} - y_s(\theta^{(0)'} + \theta'')^2 \\ & + \frac{1}{2}\{(v_0^{(0)'} + v_0') + x_s(\theta^{(0)'} + \theta'')^2 \\ & \dots\dots\dots (120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{zs} = & \{-y^*(u_0^{(0)'} + u_0') + x^*(v_0^{(0)'} + v_0') \\ & + r_n(\theta^{(0)'} + \theta'')\} \cdot (\theta^{(0)} + \theta) \dots\dots\dots (121) \end{aligned}$$

初期ひずみは次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon_z^{(0)} = & -xu_0^{(0)''} - yv_0^{(0)''} - \omega\theta^{(0)''} \\ & + \frac{1}{2}(u_0^{(0)'} - y_s\theta^{(0)'})^2 + \frac{1}{2}(v_0^{(0)'} + x_s\theta^{(0)'})^2 \\ & \dots\dots\dots (122) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{zs}^{(0)} = & (-y^*u_0^{(0)'} + x^*v_0^{(0)'} + r_n\theta^{(0)'})\theta^{(0)} \\ & \dots\dots\dots (123) \end{aligned}$$

したがって、ひずみの増分は次のように得られる。

$$\epsilon_z^{(i)} = \epsilon_z - \epsilon_z^{(0)} = \epsilon_z^{(i)L} + \epsilon_z^{(i)N} \dots\dots\dots (124)$$

$$\epsilon_z^{(i)L} \equiv w_0' - xu_0'' - yv_0'' - \omega\theta'' \dots\dots\dots (125.a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z^{(i)N} \equiv & (u_0^{(0)'} - y_s\theta^{(0)'}) (u_0' - y_s\theta') \\ & + \frac{1}{2}(u_0' - y_s\theta')^2 + (v_0^{(0)'} + x_s\theta^{(0)'}) \\ & (v_0' + x_s\theta') + \frac{1}{2}(v_0' + x_s\theta')^2 \dots\dots\dots (125.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{zs}^{(i)} = & r_{zs} - r_{zs}^{(0)} = r_{zs}^{(i)N} \\ = & -y^*(u_0^{(0)'}\theta + u_0'\theta^{(0)} + u_0'\theta) \\ & + x^*(v_0^{(0)'}\theta + v_0'\theta^{(0)} + v_0'\theta) \\ & + r_n(\theta^{(0)'}\theta + \theta'\theta^{(0)} + \theta'\theta) \dots\dots\dots (126) \end{aligned}$$

これより、

$$\delta\epsilon_z^{(i)L} = \delta w_0' - x \delta u_0'' - y \delta v_0'' - \omega \delta \theta'' \dots (127)$$

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_z^{(i)N} = & \{(u_0' + u_0^{(0)'}) - y_s(\theta' + \theta^{(0)'})\} \\ & \cdot \delta(u_0' - y_s\theta') + \{(v_0' + v_0^{(0)'}) \\ & + x_s(\theta' + \theta^{(0)'})\} \cdot \delta(v_0' + x_s\theta') \\ & \dots\dots\dots (128) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta r_{zs}^{(i)N} = & -y^*\{(u_0' + u_0^{(0)'})\delta\theta + (\theta + \theta^{(0)})\delta u_0'\} \\ & + x^*\{(v_0' + v_0^{(0)'})\delta\theta + (\theta + \theta^{(0)})\delta v_0'\} \\ & + r_n\{(\theta' + \theta^{(0)'})\delta\theta + (\theta + \theta^{(0)})\delta\theta'\} \dots\dots (129) \end{aligned}$$

式 (128)、(129) の $\delta\epsilon_z^{(i)N}$ 、 $\delta r_{zs}^{(i)N}$ および式 (127) の $\delta\epsilon_z^{(i)L}$ を式 (45) の右辺の $\delta\epsilon_z^N$ 、 δr_{zs}^N 、 $\delta\epsilon_z^L$ に代入し、2. と同様の過程を経ることにする。この場合ひずみの非線項において u_0 、 v_0 、 θ の代りにそれぞれ $u_0 + u_0^{(0)}$ 、 $v_0 + v_0^{(0)}$ 、 $\theta + \theta^{(0)}$ とすれば、2. とまったく同じであるから次のような方程式ならびに境界条件を得る。

式 (86)~(88) から、

$$\begin{aligned} EI_y u_0^{IV} - [P^{(0)}\{u_0' + u_0^{(0)'} - y_0(\theta' + \theta^{(0)'})\} \\ - q_x e_y (\theta + \theta^{(0)})]' + \{M_x^{(0)}(\theta + \theta^{(0)})\}'' \\ = q_x + q_x' e_x \dots\dots\dots (130) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_x v_0^{IV} - [P^{(0)}\{v_0' + v_0^{(0)'} + x_0(\theta' + \theta^{(0)'})\} \\ + q_x e_x (\theta + \theta^{(0)})]' - \{M_y^{(0)}(\theta + \theta^{(0)})\}'' \\ = q_y + q_y' e_y \dots\dots\dots (131) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_\omega \theta^{IV} - GJ\theta'' - [P^{(0)}\{y_0(u_0' + u_0^{(0)'}) \\ - x_0(v_0' + v_0^{(0)'})\} + (r_s^2 P^{(0)} + 2\beta_y M_x^{(0)} \\ + 2\beta_x M_y^{(0)})(\theta' + \theta^{(0)'})]' \\ + M_x^{(0)}(u_0'' + u_0^{(0)''}) - M_y^{(0)}(v_0'' + v_0^{(0)''}) \\ - q_x\{e_y(u_0' + u_0^{(0)'}) - e_x(v_0' + v_0^{(0)'})\} \\ - \left(\int_F \sigma_r(x^2 + y^2)tds\right)\theta'' \text{注9)} \\ + \{q_x(a_x + \beta_x - x_0) + q_y(b_y + \beta_y - y_0)\}(\theta + \theta^{(0)}) \\ = m_T + q_x' \omega(e_x, e_y) \dots\dots\dots (132) \end{aligned}$$

これらは初期変形を含む線形化有限変位理論の一般式である。

同様に境界条件は表-2 に示される。

表-2 初期変形のある場合の境界条件

(a)	(b)
$u_0 + u_0^{(0)} = 0$	$P_x = -EI_y u_0^{IV} + P^{(0)}\{u_0' + u_0^{(0)'} + y_0(\theta' + \theta^{(0)'})\}' - [M_x^{(0)}(\theta + \theta^{(0)})]'$
$u_0' + u_0^{(0)'} = 0$	$M_y = -EI_x u_0''$
$v_0 + v_0^{(0)} = 0$	$P_y = -EI_x v_0^{IV} + P^{(0)}\{v_0' + v_0^{(0)'} - x_0(\theta' + \theta^{(0)'})\}' + [M_y^{(0)}(\theta + \theta^{(0)})]'$
$v_0' + v_0^{(0)'} = 0$	$M_x = -EI_x v_0''$
$\theta + \theta^{(0)} = 0$	$M_T = -EI_\omega \theta^{IV} + GJ\theta'' + [P^{(0)}\{y_0(u_0' + u_0^{(0)'}) - x_0(v_0' + v_0^{(0)'})\}]' + (r_s^2 P^{(0)} + 2\beta_y M_x^{(0)} + 2\beta_x M_y^{(0)})(\theta' + \theta^{(0)'}) - M_x^{(0)}(u_0' + u_0^{(0)'}) + M_y^{(0)}(v_0' + v_0^{(0)'}) + (\beta_y Q_y^{(0)} + \beta_x Q_x^{(0)}) \cdot (\theta + \theta^{(0)})$
$\theta' + \theta^{(0)'} = 0$	$M_\omega = -EI_\omega \theta''$

(a) 幾何学的境界条件

(b) 力学的境界条件

5. ポテンシャルエネルギーと有限要素法

(1) ポテンシャルエネルギー

微分方程式系式 (86)~(88) あるいは式 (130)~(132)

注9) 残留応力に関しては $\theta^{(0)}$ は影響しない。

を直接解くことは一般に困難であり、近似解法によることになる。近似解法としてはエネルギー原理に基づく Ritz 法, Galerkin 法あるいは有限要素法などが有力である。この場合に必要となるポテンシャルエネルギーを求めておく。

$$\pi = U - V \dots\dots\dots (133)$$

$$U = \pi_1 + \pi_2 \dots\dots\dots (134)$$

$$V = \pi_3 \dots\dots\dots (135)$$

とすれば、 U は strain energy であり、 V は external work を表わす。

式 (46), (52), (55), (56) の関係から、

$$\begin{aligned} \pi_1 = & \int_0^l \left[\frac{1}{2} E \{ F w_0'^2 + I_y u_0''^2 + I_x v_0''^2 + I_\omega \theta''^2 \} \right. \\ & + P^{(0)} \left\{ \frac{1}{2} u_0'^2 + \frac{1}{2} v_0'^2 + \frac{1}{2} r_s^2 \theta'^2 \right. \\ & + (y_0 u_0' - x_0 v_0') \theta' \left. \right\} \\ & + M_x^{(0)} (-u_0' + \beta_y \theta') \theta' + M_y^{(0)} (v_0' + \beta_x \theta') \theta' \\ & + Q_x^{(0)} (v_0' + \beta_x \theta') \theta + Q_y^{(0)} (-u_0' + \beta_y \theta') \theta \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'^2 \right] dz \dots\dots\dots (136) \end{aligned}$$

式 (37) から、

$$\pi_2 = \int_0^l \frac{1}{2} G J \theta'^2 dz \dots\dots\dots (137)$$

したがって、式 (136) および (137) から、独立な w_0 に関する項を除き、式 (78), (80) の関係を考慮すれば

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_0^l (EI_y u_0''^2 + EI_x v_0''^2 + EI_\omega \theta''^2 + GJ \theta'^2) dz \\ & + \int_0^l \left[P^{(0)} \left\{ \frac{1}{2} u_0'^2 + \frac{1}{2} v_0'^2 + \frac{1}{2} r_s^2 \theta'^2 \right. \right. \\ & + (y_0 u_0' - x_0 v_0') \theta' \left. \right\} \\ & - \{ (M_x^{(0)} \theta)' + q_x e_y \theta \} (u_0' - \beta_x \theta') \\ & + \{ (M_y^{(0)} \theta)' + q_x e_x \theta \} (v_0' + \beta_x \theta') \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'^2 \right] dz \dots\dots\dots (138) \end{aligned}$$

式 (39) から、独立な w_0 に関する項を除いて、

$$\begin{aligned} V = & \pi_3 = \int_0^l \left[q_x \left\{ u_0 - \frac{1}{2} (a_x - x_0) \theta^2 \right\} \right. \\ & + q_y \left\{ v_0 - \frac{1}{2} (b_y - y_0) \theta^2 \right\} + q_z \{ -e_x u_0' \\ & - e_y v_0' - \omega (e_x, e_y) \theta' \} + m_T \theta \left. \right] dz \\ & + P_x(l) \left\{ u_0(l) - \frac{1}{2} (a_x - x_0)_l \theta^2(l) \right\} \\ & - P_x(0) \left\{ u_0(0) - \frac{1}{2} (a_x - x_0)_0 \theta^2(0) \right\} \\ & + P_y(l) \left\{ v_0(l) - \frac{1}{2} (b_y - y_0)_l \theta^2(l) \right\} \\ & - P_y(0) \left\{ v_0(0) - \frac{1}{2} (b_y - y_0)_0 \theta^2(0) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - M_y(l) u_0'(l) + M_y(0) u_0'(0) - M_x(l) v_0'(l) \\ & + M_x(0) v_0'(0) + M_T(l) \theta(l) - M_T(0) \theta(0) \\ & - M_\omega(l) \theta'(l) + M_\omega(0) \theta'(0) \dots\dots\dots (139) \end{aligned}$$

初期変形が存在するときには、 U および V は次のようになる。

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_0^l (EI_y u_0''^2 + EI_x v_0''^2 + EI_\omega \theta''^2 + GJ \theta'^2) dz \\ & + \int_0^l \left[P^{(0)} \left\{ \frac{1}{2} (u_0' + u_0^{(0)'})^2 + \frac{1}{2} (v_0' + v_0^{(0)'})^2 + \frac{1}{2} r_s^2 \right. \right. \\ & \cdot (\theta' + \theta^{(0)'})^2 + \{ y_0 (u_0' + u_0^{(0)'}) - x_0 (v_0' + v_0^{(0)'}) \} \\ & \cdot (\theta' + \theta^{(0)'}) - \{ (M_x^{(0)} (\theta + \theta^{(0)}))' + q_x e_y \} \\ & \cdot \{ u_0' + u_0^{(0)'} - \beta_x (\theta' + \theta^{(0)'}) \} + \{ (M_y^{(0)} (\theta + \theta^{(0)}))' \\ & + q_x e_x \} \{ v_0' + v_0^{(0)'} + \beta_y (\theta' + \theta^{(0)'}) \} \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \theta'^2 \right] dz \dots\dots\dots (140) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & \int_0^l \left[q_x \left\{ u_0 - \frac{1}{2} (a_x - x_0) (\theta + \theta^{(0)})^2 \right\} \right. \\ & + q_y \left\{ v_0 - \frac{1}{2} (b_y - y_0) (\theta + \theta^{(0)})^2 \right\} \\ & + q_z \{ -e_x u_0' - e_y v_0' - \omega (e_x, e_y) \theta' \} + m_T \theta \left. \right] dz \\ & + P_x(l) \left\{ u_0(l) - \frac{1}{2} (a_x - x_0)_l (\theta(l) + \theta^{(0)}(l))^2 \right\} \\ & - P_x(0) \left\{ u_0(0) - \frac{1}{2} (a_x - x_0)_0 (\theta(0) + \theta^{(0)}(0))^2 \right\} \\ & + P_y(l) \left\{ v_0(l) - \frac{1}{2} (b_y - y_0)_l (\theta(l) + \theta^{(0)}(l))^2 \right\} \\ & - P_y(0) \left\{ v_0(0) - \frac{1}{2} (b_y - y_0)_0 (\theta(0) + \theta^{(0)}(0))^2 \right\} \\ & - M_y(l) u_0'(l) + M_y(0) u_0'(0) - M_x(l) v_0'(l) \\ & + M_x(0) v_0'(0) + M_T(l) \theta(l) - M_T(0) \theta(0) \\ & - M_\omega(l) \theta'(l) + M_\omega(0) \theta'(0) \dots\dots\dots (141) \end{aligned}$$

(2) 有限要素法の適用

薄肉部材の立体安定問題に対する有限要素法の適用は、本論の特別な場合に対してはすでに考えられている³¹⁾。本論のような一般の場合を有限要素法で解析した例は従来皆無であると思われる。一般の場合への適用に

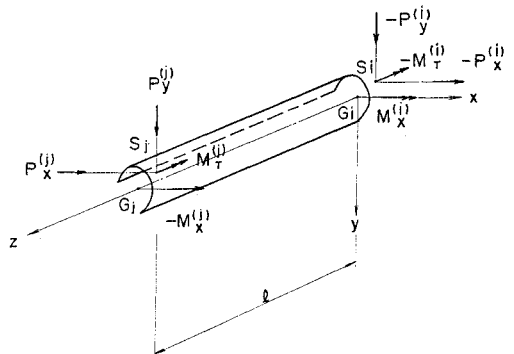


Fig. 6 Finite element $i-j$ and nodal loads

関しては別の機会に述べることにし、ここでは、従来の理論と若干相違を生ずる横荷重を受けるはりの横座屈問題を例に採って、有限要素法をいかに適用するか説明する。

図-6 に示すような要素 ij を考えよう。その節点を i および j とし、その長さを l とする。水平方向の移動およびねじりを生ずる横座屈問題として図のような節点荷重を考える。

この場合の strain energy は式 (138) から、

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_y u_0''^2 + EI_\omega \theta''^2 + GJ \theta'^2) dz - \int_0^l (M_x^{(0)} \theta' + Q_y^{(0)} \theta) (u_0' - \beta_y \theta') dz + \frac{1}{2} \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \int_0^l \theta'^2 dz \quad \dots (142)$$

変位関数 (形状関数) を次のように仮定する。

$$u_0 = \{\mathbf{a}\}^t \{\mathbf{z}\} = \{\mathbf{z}\}^t \{\mathbf{a}\} \quad \dots (143.a)$$

$$\theta = \{\mathbf{b}\}^t \{\mathbf{z}\} = \{\mathbf{z}\}^t \{\mathbf{b}\} \quad \dots (143.b)$$

ここで、

$$\{\mathbf{a}\}^t \equiv \{a_0, a_1, a_2, a_3\} \quad \dots (144)$$

$$\{\mathbf{b}\}^t \equiv \{b_0, b_1, b_2, b_3\} \quad \dots (145)$$

$$\{\mathbf{z}\}^t \equiv \{1, z, z^2, z^3\} \quad \dots (145)$$

係数 $\{\mathbf{a}\}$, $\{\mathbf{b}\}$ と節点変位との関係は、次のようになる。

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{T}] \{\mathbf{u}_0\} \quad \dots (146.a)$$

$$\{\mathbf{b}\} = [\mathbf{T}] \{\boldsymbol{\theta}\} \quad \dots (146.b)$$

ここで、

$$\{\mathbf{u}_0\}^t \equiv \{u_{0i}, u_{0i}', u_{0j}, u_{0j}'\} \quad \dots (147)$$

$$\{\boldsymbol{\theta}\}^t \equiv \{\theta_{0i}, \theta_{0i}', \theta_{0j}, \theta_{0j}'\} \quad \dots (148)$$

$$[\mathbf{T}] \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{pmatrix} \quad \dots (149)$$

さらに、次のような定義を置く。

$$\{\mathbf{z}'\}^t \equiv \{0, 1, 2z, 3z^2\} \quad \dots (150)$$

$$\{\mathbf{z}''\}^t \equiv \{0, 0, 2, 6z\} \quad \dots (151)$$

したがって、

$$u_0' = \{\mathbf{a}\}^t \{\mathbf{z}'\} = \{\mathbf{z}'\}^t \{\mathbf{a}\} \quad \dots (152.a)$$

$$u_0'' = \{\mathbf{a}\}^t \{\mathbf{z}''\} = \{\mathbf{z}''\}^t \{\mathbf{a}\} \quad \dots (153.a)$$

$$\theta' = \{\mathbf{b}\}^t \{\mathbf{z}'\} = \{\mathbf{z}'\}^t \{\mathbf{b}\} \quad \dots (152.b)$$

$$\theta'' = \{\mathbf{b}\}^t \{\mathbf{z}''\} = \{\mathbf{z}''\}^t \{\mathbf{b}\} \quad \dots (153.b)$$

式 (142) に式 (143), (152), (153) の各関係を代入して次の式を得る。

$$U = \frac{1}{2} \left[EI_y \{\mathbf{a}\}^t \left(\int_0^l \{\mathbf{z}''\} \{\mathbf{z}''\}^t dz \right) \{\mathbf{a}\} + EI_\omega \{\mathbf{b}\}^t \left(\int_0^l \{\mathbf{z}''\} \{\mathbf{z}''\}^t dz \right) \{\mathbf{b}\} \right]$$

$$+ GJ \{\mathbf{b}\}^t \left(\int_0^l \{\mathbf{z}'\} \{\mathbf{z}'\}^t dz \right) \{\mathbf{b}\} - M_x^{(0)} \left[\{\mathbf{b}\}^t \left(\int_0^l \{\mathbf{z}'\} \{\mathbf{z}'\}^t dz \right) \{\mathbf{a}\} - \beta_y \{\mathbf{b}\}^t \left(\int_0^l \{\mathbf{z}'\} \{\mathbf{z}'\}^t dz \right) \{\mathbf{b}\} \right] - Q_y^{(0)} \left[\{\mathbf{b}\}^t \left(\int_0^l \{\mathbf{z}\} \{\mathbf{z}'\}^t dz \right) \{\mathbf{a}\} - \beta_y \{\mathbf{b}\}^t \left(\int_0^l \{\mathbf{z}\} \{\mathbf{z}'\}^t dz \right) \{\mathbf{b}\} \right] + \frac{1}{2} \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) \{\mathbf{b}\}^t \left(\int_0^l \{\mathbf{z}'\} \{\mathbf{z}'\}^t dz \right) \{\mathbf{b}\} \quad \dots (154)$$

さらに、上式に式 (146) の関係を代入して、

$$U = \frac{1}{2} \left[\{\mathbf{u}_0\}^t [\mathbf{T}]^t EI_y [\mathbf{Z}_{22}] [\mathbf{T}] \{\mathbf{u}_0\} + \{\boldsymbol{\theta}\}^t [\mathbf{T}]^t \left[EI_\omega [\mathbf{Z}_{22}] + GJ [\mathbf{Z}_{11}] \right] [\mathbf{T}] \{\boldsymbol{\theta}\} - \{\boldsymbol{\theta}\}^t [\mathbf{T}]^t \left[M_x^{(0)} [\mathbf{Z}_{11}] + Q_y^{(0)} [\mathbf{Z}_{01}] \right] [\mathbf{T}] \{\mathbf{u}_0\} - \{\boldsymbol{\theta}\}^t [\mathbf{T}]^t \left[-M_x^{(0)} [\mathbf{Z}_{11}] - Q_y^{(0)} [\mathbf{Z}_{01}] \right] \beta_y - \frac{1}{2} \left(\int_F \sigma_r (x^2 + y^2) t ds \right) [\mathbf{Z}_{11}] [\mathbf{T}] \{\boldsymbol{\theta}\} \right] \quad (155)$$

ここで、

$$[\mathbf{Z}_{22}] = \int_0^l \{\mathbf{z}''\} \{\mathbf{z}''\}^t dz \quad \dots (156.a)$$

$$[\mathbf{Z}_{11}] = \int_0^l \{\mathbf{z}'\} \{\mathbf{z}'\}^t dz \quad \dots (156.b)$$

$$[\mathbf{Z}_{01}] = \int_0^l \{\mathbf{z}\} \{\mathbf{z}'\}^t dz \quad \dots (156.c)$$

以上の展開において、剛性 EI_y , EI_ω , GJ および内力 $M_x^{(0)}$, $Q_y^{(0)}$, σ_r は要素内で一様と見られている。これらが要素内で変化する場合には上記の積分項に組み込んで処理すればよい。

変位ベクトル $\{\boldsymbol{\theta}\}$ を次のように定義する。

$$\{\boldsymbol{\theta}\} = \{\delta_k\} \equiv \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_0\} \\ \{\boldsymbol{\theta}\} \end{Bmatrix} \quad \dots (157)$$

剛性マトリックス $[\mathbf{K}]$ と初期応力マトリックス $[\mathbf{I}]$ が次の関係より得られる。

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial \delta_k} \right\} = [[\mathbf{K}] - [\mathbf{I}]] \{\boldsymbol{\theta}\} \quad \dots (158)$$

すなわち、

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}]^t EI_y [\mathbf{Z}_{22}] [\mathbf{T}] & \text{sym.} \\ 0 & [\mathbf{T}]^t [EI_\omega [\mathbf{Z}_{22}] + GJ [\mathbf{Z}_{11}]] [\mathbf{T}] \end{bmatrix} \quad \dots (159)$$

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 0 \\ [\mathbf{T}]^t [M_x^{(0)} [\mathbf{Z}_{11}] + Q_y^{(0)} [\mathbf{Z}_{01}]] [\mathbf{T}] \\ \text{sym.} \\ -[\mathbf{T}]^t [2\beta_y (M_x^{(0)} [\mathbf{Z}_{11}] + Q_y^{(0)} [\mathbf{Z}_{01}])] \\ + R [\mathbf{Z}_{11}] [\mathbf{T}] \end{bmatrix} \quad \dots (160)$$

ただし,

$$R = \int_F \sigma_x (x^2 + y^2) t ds \dots\dots\dots (161)$$

この場合の external work は式 (139) から,

$$V = P_x^{(j)} \left\{ u_{0j} - \frac{1}{2} (a_x - x_0)_j \theta_j^2 \right\} - P_x^{(i)} \left\{ u_{0i} - \frac{1}{2} (a_x - x_0)_i \theta_i^2 \right\} + P_y^{(j)} \left\{ -\frac{1}{2} (b_y - y_0)_j \theta_j \right\} - P_y^{(i)} \left\{ -\frac{1}{2} (b_y - y_0)_i \theta_i \right\} - M_T^{(j)} u_{0j}' + M_T^{(i)} u_{0i}' + M_T^{(j)} \theta_j - M_T^{(i)} \theta_i \dots\dots\dots (162)$$

外力ベクトル $\{f\}$ は次の関係より得る。

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial \delta_k} \right\} = \{f\} \dots\dots\dots (163)$$

すなわち,

$$\{f\} = \begin{bmatrix} -P_x^{(i)} \\ M_y^{(i)} \\ P_x^{(j)} \\ -M_y^{(j)} \\ -M_T^{(i)} + [P_x^{(i)} (a_x - x_0)_i + P_y^{(i)} (b_y - y_0)_i] \theta_i \\ 0 \\ M_T^{(j)} - [P_x^{(j)} (a_x - x_0)_j + P_y^{(j)} (b_y - y_0)_j] \theta_j \\ 0 \end{bmatrix} = \{F\} + [I_e] \{\delta\} \dots\dots\dots (164)$$

ここで,

$$\{F\}^t = \{-P_x^{(i)}, M_y^{(i)}, P_x^{(j)}, -M_y^{(j)}, -M_T^{(i)}, 0, M_T^{(j)}, 0\} \dots\dots\dots (165)$$

$$[I_e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [P_x^{(i)} (a_x - x_0)_i + P_y^{(i)} (b_y - y_0)_i] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 - [P_x^{(j)} (a_x - x_0)_j + P_y^{(j)} (b_y - y_0)_j] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (166)$$

式 (158) と (163) および (164) から,

$$[[K] - [I] - [I_e]] \{\delta\} = \{F\} \dots\dots\dots (167)$$

この式は横座屈安定に関する要素 ij の節点外力と節点変位との関係を示す剛性方程式である。はり構造全体に対しては各要素の関係を重ね合わせればよい。

$$\sum_{ij} [[K] - [I] - [I_e]] \{\delta_{all}\} = \{F_{all}\} \dots\dots\dots (168)$$

式 (168) において,

$$\{F_{all}\} = 0 \dots\dots\dots (169)$$

であるならば,

$$[\sum_{ij} [[K] - [I] - [I_e]]] \{\delta_{all}\} = 0 \dots\dots\dots (170)$$

すなわち, 固有方程式を得る。したがって,

$$|\sum_{ij} [[K] - [I] - [I_e]]| = 0 \dots\dots\dots (171)$$

これより, 固有値としての座屈限界値を得る。

6. 考 察

(1) 初期応力におよぼす変形の影響

本論のような一般的な部材の安定問題においては, 逐次荷重の増大とともに部材相互の位置関係や内力(断面力)が変化する。したがって, これを厳密に考慮するには, いわゆる非線形安定問題としての取扱いが必要となる。すなわち, 時々刻々のポテンシャルエネルギー π の二次変分 $\delta^2 \pi$ に関して,

$$\delta^2 \pi \leq 0$$

なる関係の成り立つ時を問題にするわけである。

ここでは, 問題を線形化しているから, このような点にまで立入ることはできない。しかしながら, 初期断面力に変形の影響を考慮しても, 依然として線形問題の範囲内で取り扱える特別な場合がある。

2.(4)b) の場合には, 式 (99) が安定方程式であるが, この初期断面力 $M_x^{(0)}$ は次のように求められる。

式 (93) から,

$$EI_x v_0'' + P v_0'' = 0$$

あるいは, 式 (87) から,

$$EI_x v_0'' + P v_0'' = q_y$$

あるいは, 式 (131) から,

$$EI_x v_0'' + P (v_0'' + v_0^{(0)''}) = q_y$$

これらの式から, 所与の境界条件の下に v_0 を求めれば, $M_x^{(0)}$ を得ることができる。すなわち,

$$M_x^{(0)} = -EI_x v_0'' \text{注10)}$$

このように独立な変形に関しては, その影響を考慮に入れることが可能であり, すでに Massonnet, C.³²⁾ や Pekoz, T.B. and Winter, G.³³⁾ も触れている所である。

(2) 安定論から見た本論の立場

Ziegler, H.³⁴⁾ は彼の一般弾性安定論の著述において, 座屈限界の決定法として次の4法をあげ, それぞれの安定論上の意味を述べている。

- a) エネルギー法
- b) 振動法
- c) 静的方法 (平衡条件による法)

注10) たとえば, 両端単純支持で偏心圧縮力 P を $y=e$ に受ける部材では,

$$M_x^{(0)} = -EI_x v_0'' = P(e + v_0)$$

d) 初期変形法

それぞれの意味が異なることによって、より一般的な安定問題では結果が違ふ場合のあることを示している。

本論では保存系の座屈安定を論じているから、上述の4法によって得られる座屈限界点は同一になるものと思われる。ここでは、薄肉開断面材の一般の座屈安定基礎式を、a), c), d) の立場から導き、予期した結果を得た。

この問題に関する従来の研究では、主として c) に基礎を置いたものが多く、a) に基づくものでも幾何学的直観に頼る部分があるため、不十分な結果に至っているものと推察される。本論では Green のひずみを用いた連続体の有限変位理論から出発することによって、徹底して a) の立場を探ることができ、より厳密なフォーミュレーションになっているものと思われる。

7. 結 論

(1) 連続体力学の有限変位理論から出発し、エネルギー原理を適用することによって、薄肉開断面材の一般座屈安定に関する厳密なフォーミュレーションを行った。

(2) このような一般的な変形状態の場合にも、有限変位理論を線形化することと微小線形後の平衡条件を考えることが等価であることを示した。

(3) 以上の結果から、従来の諸研究の結果は不十分なものであり、特に有限 St. Venant ねじりのねじり中心に注意が払われていないように思われる。

(4) 従来部分的にしか得られていない薄肉開断面材の立体的変形および安定の問題に対する有限要素法適用の可能性について述べ、鉛直荷重を受けるはりの横座屈問題を例に採りその適用法を示した。

(5) 本論の展開はまた、従来ほとんど試みられていない薄肉部材のねじりを伴う有限変形現象の非線形解析へ、道をつけるものと考えられる。

一般の場合への有限要素法の適用ならびに実際の数値計算については別の機会に述べることにした。

謝辞：本報告を草するに当り、常々指導戴いている東京大学土木工学科 奥村敏恵教授、また、6.(1) で有益な示唆を戴いた同工学部総合試験所 西野文雄助教授に深謝致します。

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.P. : The Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961 or Stability of Beams, Columns, Plates and Shells, (in Russian), Nauka, 1971
- 2) Goodier, J.N. : Torsional and Flexural Buckling of Bars of Thin Walled Open Section Under Compressive and Bending Loads, J. of Applied Mechanics, Vol. 64, Sept. 1942
- 3) Bleich, F. and H. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952
- 4) Vlasov, V.Z. : Thin Walled Elastic Beams, National Science Foundation, 1961
- 5) Kollbrunner, K.C. and Meister, M. : Knicken, Biegedrill-knicken, Kippen, Springer-Verlag, 1961
- 6) Kuranishi, M. : Some Recent Investigation on the Elastic Stability of Bars, Report of the Research Institute Technology, Nihon Univ., No. 1, 1952
- 7) 奥村敏恵 :
 - 7.1) 曲げモーメントと軸圧縮力を受ける部材の安定, 土木学会論文集, 第33号, 1956年4月
 - 7.2) 溶接組材の座屈に関する研究, 溶接学会誌, 21巻10号, 1952年10月
- 8) 仲 威雄・加藤 勉 : 単一材の座屈, 東京大学出版会, 1959年4月
- 9) 川井忠彦 : 薄肉開断面材の弾性力学 I~VII, 生産研究, 第16巻第1号~第17巻5号, 1964年1月~1965年5月
- 10) Goodier, J.N. and Barton, M.V. : The Effect of Web Deformation on the Torsion of I-Beams, J. of Applied Mechanics, Vol. 2, 1944
- 11) Bijlaard, A.A. and Fisher, G.P. : Interaction of Column and Local Buckling in Compression Members, NACA TN 2640, March 1952
- 12) Suzuki, Y. and Okumura, T. : Influence of Cross-sectional Distorsion on Flexural-Torsional Buckling, Final Report of 8th Congress of IABSE, 1968
- 14) 西野文雄 : 柱の全体座屈におよぼす局部座屈の影響, 土木学会第22回年次学術講演会講演概要, 昭和42年5月
- 14) Bulson, P.S. : Local Stability and Strength of Structural Sections, Thin-walled Structures edited by Chilver, A.H., Chatto and Windus, 1967
- 15) Goldberg, J.E., Bogdanoff, J.L. and Glauz, W.D. : Lateral and Torsional Buckling of Thin-Walled Beams, Pub. of IABSE, 1967
- 16) Martin, H.C. :
 - 16.1) On the derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems, Proc. of the First Air Force Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Nov. 1965
 - 16.2) Finite Elements and the Analysis of Geometrically Nonlinear Problems, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, Aug. 1969
- 17) Mallett, R.H. and Marcal, P.V. : Finite Element Analysis of Nonlinear Structures, Proc. of ASCE, ST 9, Sept. 1968
- 18) Hartz, B.J. and Nathar, N.D. : Finite Element Formulation of Geometrically Non-linear Problems of Elasticity, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, Aug. 1969
- 19)
 - 19.1) 築地恒夫 : 薄肉開き断面はりの座屈に関する基礎方程式, 第22回応用力学連合講演会講演論文抄録集, 昭和47年12月
 - 19.2) 川井忠彦・藤谷義信 : 仮想仕事の原理による柱の弾性座屈に関する基礎方程式の誘導について, 日本鋼構造協会構造解析小委員会資料, 1973年3月
 - 19.3) 結城皓曠 : 薄肉梁の幾何学的非線形解析, 日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集, 1973年

- 6 月
- 19.4) Nishino, F., Kasemset, G. and Lee, S.L. : Variational Formulation of Stability Problems for Thin-walled Members, to be submitted to Ingenieur-Archiv, Jan., 1973
- 20) Fung, Y.C. : Foundations of Solid Mechanics, translated into Japanese by Ohhashi, Y. et. al., Baifukan, 1970
- 21) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968
- 22) 奥村・坂井：箱型梁における断面変形と中間ダイアフラムの影響，土木学会論文報告集，第190号，1971年6月
- 23) 藤田 譲：柱の不安定現象におよぼす残留応力の影響について，造船協会論文集，第107号，1960年5月
- 24) Chwalla, E. : Einige Ergebnisse der Theorie des aussermittig gedruckten Stabes mit duennwandigem, offenem Querschnitt, Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues, H. 6, Berlin, Springer, 1943
- 25) Galambos, T.V. and Fukumoto, Y. : Inelastic Lateral Torsional Buckling of Beam-Columns, Report of Fritz Eng. Lab., Lehigh Univ., August 1963
- 26) Culver, C.G. : Initial Imperfections in Biaxial Bending, Proc. of ASCE, ST 3, June 1966
- 27) Barta, T.A. : On the Torsional-Flexural Buckling of Thin-walled Elastic Bars with Monosymmetric Open Cross-section, Thin-walled Structures edited by Chilver, A.H., Chatto and Windus, 1967
- 28) Kindem, S.E. : Biegung, Drehung und Knickung gerader Stabe mit offenem Profil im elastischen Bereich, Tapirs Forlag, 1949
- 29) Kappus, von R. : Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen, Z. angew. Math. Mech., Bd. 19, Nr. 5, Okt. und Nr. 6, Dez., 1939
- 30) 倉西正嗣：弾性学，機械学会
- 31) 川井忠彦・村木豊彦：有限要素法による骨組構造の振動および座屈問題の解析，マトリックス構造解析論文集，JSSC, 1969年5月
- 32) Massonnet, C. : Stability Considerations in the Design of Steel Columns, Proc. of ASCE, ST 7, 1959
- 33) Pekoz, T.B. and Winter, G. : Torsional-Flexural Buckling of Thin-walled Sections under Eccentric Load, Proc. of ASCE, ST 5, 1969
- 34) Ziegler, H. : On the Concept of Elastic Stability, Advances in Applied Mechanics IV, Academic Press, 1956

(1973. 7. 9・受付)