

軸力、曲げおよび一樣ねじりを受ける
薄肉開断面の降伏後の挙動INELASTIC BEHAVIOR OF THIN-WALLED OPEN SECTIONS UNDER
COMBINED AXIAL FORCE, BENDING AND TWISTING

宇佐美 勉*

By Tsutomu Usami

1. 緒 言

最近の電子計算機の著しい発達と相まった構造解析法の飛躍的な進歩は、平面構造物のみならず立体構造物の非弾性解析も徐々に可能ならしめてきている。しかしながら、立体構造物を構成する部材は、一般に、軸力、曲げおよびねじりの作用を受け、その非弾性挙動はきわめて複雑であって厳密に解析することは非常に困難になってくる。それゆえ、これまでの立体構造物もしくはその構成部材の非弾性解析では、ねじりに伴って生ずるせん断応力が材の降伏におよぼす影響を無視する^{1),2)}か、または弾塑性域の拡がりを考えない、いわゆる塑性関節法^{3),4)}(Plastic Hinge Method)によって行なわれてきた。後者の方法では、軸力、曲げモーメントおよびねじりモーメントの降伏曲面(Yield Surface)を知る必要があるが、通常はその下界曲面⁵⁾(または下界曲面の近似曲面)を用いることで満足しているのが現状である。

さて、本研究は立体構造物の非弾性解析の基礎的研究として、鋼薄肉開断面をとりあげてそれに軸力、曲げおよび一樣ねじりが作用したときの弾塑性および全塑性状態での挙動を実験的、理論的に調べたものである。ただし、この論文の解析では、部材の長さを考慮していないため、そりねじり(Warping Torsion)の影響は考えていない。実験はそりねじりが無視できると考えられる山形鋼断面を用いて行ない、純ねじりおよび曲げとねじりの組合せ荷重下における部材の弾塑性挙動を調べている。また、理論的研究においては、一般の薄肉開断面に軸力、2主軸回りの曲げおよび一樣ねじりが作用したときの弾塑性挙動をひずみ増分理論⁶⁾に基づいて解析する方法を述べ、その数値計算結果を実験結果と比較、検討している。さらに、矩形およびH形断面に対して得ら

れた軸力、曲げおよびねじりの降伏曲面の正解値を既存の上界および下界曲面と比較を行ないそれらの精度を検討している。

2. 実験内容

曲げとねじりの組合せ荷重を部材に与える実験方法は種々考えられるが、本研究では単純に支持した部材の両端部にまず等曲げモーメントを与え、その後曲げモーメントを一定に保ちつつ部材中央に集中トルクを加える方法を採用した。このような載荷方法により、部材全体には等曲げモーメント、部材の両半分には等ねじりモーメントが作用することとなり、実験結果を後に述べる解析結果と比較するのに都合よくなる。さらに、この実験方法は部材のねじれ変形によって曲げ荷重の方向が変化しないという利点を持つ。実験に用いた山形鋼は熱間圧延形鋼でその断面寸法は L 50.8×50.8×6.35 mm (L 2"×2"×1/4") であり材質は ASTM A 36 鋼(公称降伏点応力度=25.3 kg/mm²)である。実験は Table 1 に示すように3つのシリーズに分けられ、F-シリーズは純ねじり実験、G-シリーズは断面の強軸(x軸)まわりの曲げ(M_x)とねじり(M_z)の組合せ実験、H-シリーズは弱軸(y軸)まわりの曲げ(M_y)とねじりの組合せ実験である。GおよびH-シリーズの実験において最初に加える曲げモーメント、すなわち初期曲げモーメント(Initial Bending Moment)の大きさは、断面の強軸または弱軸まわりの降伏曲げモーメント(それぞれ、 M_{xy} または M_{yz})で無次元化して同表に示してある。なお、等脚山形断面の強軸および弱軸まわりの曲げに対する塑性断面係数(Shape Factor)はそれぞれ1.54および1.84である(Table 3 参照)。

Fig. 1(a)および(b)は、それぞれ、実験装置の側面図およびローラー支持部の細部を示している。山形鋼部材は端部ボックスに取り付けられているL字形の剛性

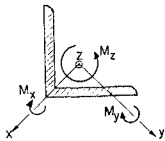
* 正会員 D. Sc. 岐阜大学助教授 工業短期大学部土木工学科

の高い壁 (End Blocks) にボルト接合されている。端部ボックスはシャフトを介して一対のボール・ベアリングで支持されており、ジャッキによって加えられた上向きの力により部材に端モーメントが作用するように設計してある。ジャッキの荷重は図に示すようにロード・セル (容量約 5 t) によって測定している。なお同図では山形鋼部材に弱軸まわりの曲げが加わるようになってい

るが、強軸まわりの曲げを与えるためには L 字形の壁が取り付けられている板 (End Plate) を図の位置から部材軸まわりに 90° 回転すればよい。Fig. 2(a), (b) は部材中央に集中トルクを与えるための装置を示したものである。部材中央には Fig. 2(b) に示したような T 形鋼片を溶接接合し、それにレバー・アーム (Torsional Lever Arm) を取り付け、一対の水平力 F を与えるこ

Table 1 Program of Combined Bending and Torsion Tests

Test Series	F		G			H				
Test Number	F-1	F-2	G-1	G-2	G-3	H-1	H-2	H-3	H-4	
Effective Beam Length* (cm)	124.5	64.0	63.8	63.8	63.5	125.0	124.7	125.0	124.5	
Initial Bending Moment	None		$M_x/M_x Y =$			$M_y/M_y Y =$				
			0.85	1.109	1.326	0.85	1.10	1.357	1.601	
Deformations corresponding to Initial Bending Moment**	$\epsilon_r/\epsilon Y$	None	-0.0015	-0.0269	-0.1097	0.	-0.007	-0.0412	-0.1066	
			$\phi_y/\phi_y Y$	0.859	1.195	1.641	0.	0.	0.	0.
			$\phi_x/\phi_x Y$	0.0054	0.0861	0.3083	0.8672	1.15	1.525	2.05
Remarks	M_z : increases		M_x : constant M_z : increases			M_y : constant M_z : increases				



* See Fig. 1, ** See Fig. 5 for notations.

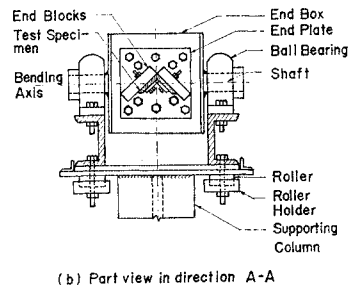
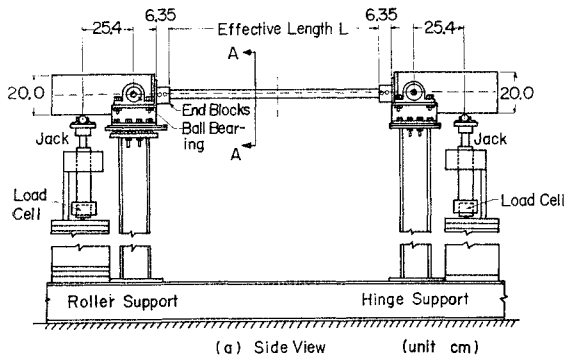
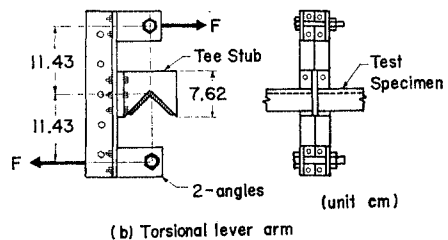
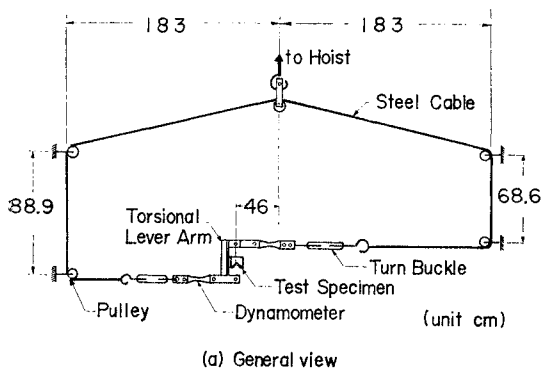


Fig. 1 Loading System for Applying Bending.



(a) General view

(b) Torsional lever arm

Fig. 2 Loading System for Applying Torque.

とにより山形断面のせん断中心（両脚の交差点）まわりにトルク荷重を作用させている。一对の水平力 F は Fig. 2 (a) に示したループをなすケーブル（直径 6.35 mm）を実験室にそなえつけの手動のホイストで吊り上げることによって与えている。この載荷方法は、変形制御によってトルク荷重を増分させることができるため、非弾性域での実験には非常に有効であった。なお、水平力 F の測定には Fig. 2 (a) に示したような一对の Dynamometer（容量約 0.5 t）を使用し、部材中央のねじり角の測定のために縦に 10 cm 間隔で置いた 2 個のダイヤル・ゲージによりレバー・アームの水平変位を測定している。

部材の断面寸法はマイクロ・メーターで測定したが、公称寸法と大差なかったため以後すべて公称寸法を用いる。また部材の有効長（Fig. 1(a) の L ）は部材を実験装置にセットした後でテープ尺で測定した。測定値は Table 1 にまとめている。実験部材の材料性質は引張試験片 2 本を山形鋼材から切り出して測定した。測定結果の平均値は、弾性係数 E 、降伏応力 σ_Y 、降伏点ひずみ ϵ_Y 、ひずみ硬化開始点のひずみ ϵ_{st} と ϵ_Y との比 s 、 E とひずみ硬化係数 E_{st} との比 h および最大引張応力 σ_u について Table 2 にまとめている。また公称断面寸法および測定した材料性質から計算して求めた L 50.8 × 50.8 × 6.35 mm の断面の性質は Table 3 にまとめている。ここに、下記号 Y のついた量は降伏点での量、 ρ のついた量は全塑性状態での量であることを示す。なお、せん断弾性係数 G の値は $G = E/2(1+\nu) = E/2.6$ （ここに、 ν = ポアソン比 = 0.3）より求めた。

さて、次に曲げとねじりの組合せ実験の方法を簡単に説明する。まず、部材を実験装置にセットした後、部材に接着したひずみゲージの 0 調整を行なう。次に、部材が弾性範囲内に留る程度の曲げ荷重をジャッキによって与え、部材を端部ボックスに接合しているボルトを締めつける。その後、荷重を 0 に戻し、ひずみゲージの読みが完全に 0 に戻っているかどうかを確かめ、戻っていない

れば上の操作を繰り返す。以上の調整が終了したら曲げ荷重を所定の量だけ加え、変形後の部材中央の床面からの高さを測定してトルク載荷用ケーブルがほぼ水平になるように滑車の位置の高低を調整する。次にケーブルをレバー・アームに接続してトルク荷重を徐々に増加させてゆく。その際、ケーブルが十分緊張するまではケーブル端部に取りつけた一对のターンバックル（Fig. 2 (a) 参照）によってトルク荷重を与える。その後はホイストによってケーブルを吊り上げてトルク荷重を加えてゆくことになるが、実験は次の順序にしたがって行なった：① 部材中央のねじり角がある量だけ増分するまでホイストを上げる、② どちらかのターンバックルをゆるめて一对の水平力 F が等しくなるようにする、③ 曲げ荷重が変化しておれば調整する、④ 水平力 F のバランスを再度チェックする。以上の一連の操作を終了したら実験を約 5 分間放置し部材の変形を安定させる。放置後曲げ荷重および水平力 F が変化していなければ部材の変形、ひずみを測定して次の荷重段階にゆくが、もし変化しておれば上の ③-④一放置を今一度追加させる。不安定現象が生じて崩壊した部材（G-2 および G-3 部材）を除いては、通常、上記の ①-④一放置の 1 回の操作で満足すべき結果が得られた。Fig. 3 は実験部材 H-4 の最終荷重時の変形状態を示したものである。ただし、ねじり角測定のダイヤルゲージは除去してある。なお、

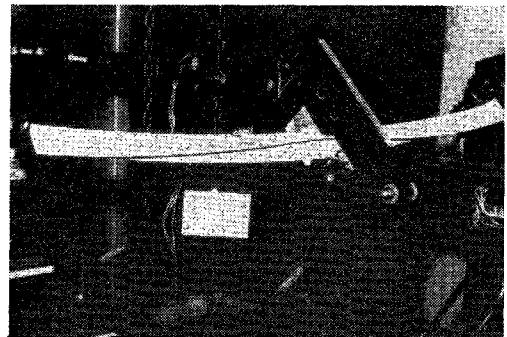


Fig. 3 Beam H-4 at Final Load.

Table 2 Tension Coupon Test Results*

Material	E (10 ⁶ kg/cm ²)	σ_Y (kg/cm ²)	ϵ_Y	$s = \epsilon_{st}/\epsilon_Y$	$h = E/E_{st}$	σ_u (kg/cm ²)
ASTM A 36	2.09	2 790	$1\ 340 \times 10^{-6}$	15.9	59.4	4 020

* See Fig. 4 for notations.

Table 3 Cross-section Properties of L 50.8 × 50.8 × 6.35

Reference Axis	x-axis	y-axis	z-axis
Cross-section Constant (cm ⁴)	$I_x = 23.0^*$	$I_y = 5.95^*$	$K_T = 0.812^{**}$
Moment at First Yielding (kg-cm)	$M_{xY} = 17.8$	$M_{yY} = 7.80$	$M_{zY} = 2.06$
Deformation at First Yielding	$\phi_{yY} = 0.000370$ (1/cm)	$\phi_{xY} = 0.000627$ (1/cm)	$\theta_Y = 0.00316$ (radian/cm)
Fully Plastic Moment (kg-cm)	$M_{x\beta} = 27.5$	$M_{y\beta} = 14.4$	$M_{z\beta} = 3.04$
Shape Factor	$f_x = 1.54$	$f_y = 1.84$	$f_z = 1.48$

* I_x, I_y : Moment of inertia about the reference axis.

** K_T : St. Venant torsional constant.

実験結果は 4. で解析結果とともに述べることにする。

3. 解析方法

ここでは、軸力、曲げおよび一様ねじりの作用を受ける薄肉開断面の非弾性解法について述べる。この問題の解法は非常にむずかしく、最近では全ひずみ理論による近似解法⁶⁾、有限要素法による解法⁷⁾が試みられているが、ここで述べる方法は薄肉開断面の弾性解法に断面の降伏による影響をひずみ増分理論に基づいて取り入れた近似解法である。解析には有限変形の影響は一般に考慮されていないが、特に山形断面の場合には Goodier⁸⁾ などによって研究された St. Venant のねじりにおよぼす軸方向応力の影響は近似的な形で考慮されている。

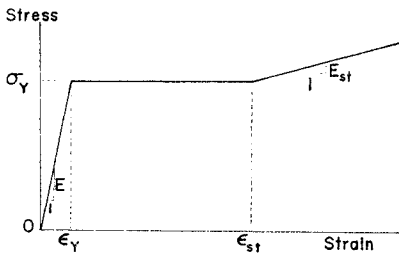
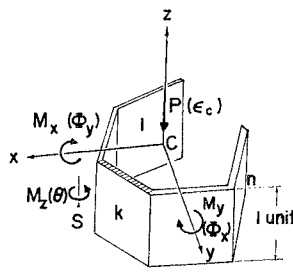
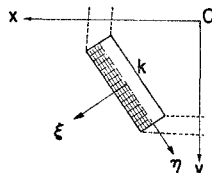


Fig. 4 Assumed Unit Stress-Strain Diagram

さて、解析の基本となる仮定および条件を列挙すると、① 断面は薄肉矩形板の集合と考える (Fig. 5)、② 変形は微小である、③ 板厚方向のせん断応力は板の中心線方向のせん断応力に比べて小さく無視できる、④ 板厚方向の軸方向ひずみの変化を無視する、⑤ 材の単軸引張応力-ひずみ曲線は Fig. 4 に示すように理想化できる、⑥ 非弾性域 (塑性域およびひずみ硬化域) では Prandtl-Reuss Fig. 5 A Thin-Walled Member Subjected to Axial Force, Bending and Torsional Moments. のひずみ増分理論⁹⁾が適用できる、⑦ 応力の除荷を考えない、および⑧ そりねじりの影響を考えないなどである。いま、Fig. 5 において断面の主軸を x, y 軸また重心軸を z 軸とする。断面に作用する外力は軸方向圧縮力 P 、



(a) Positive directions of forces and deformations



(b) k -th rectangular plate

曲げモーメント M_x, M_y 、およびねじりモーメント M_z である。それに対応する変形 (一般ひずみ) は重心軸での圧縮ひずみ ϵ_c 、 z - y 平面および z - x 平面内の曲率 ϕ_y および ϕ_x 、そして単位長さ当りのねじれ角 θ である。それらの正の方向は Fig. 5(a) に示した方向である。また、断面の一矩形板 $k(k=1 \sim n)$ の重心を原点に局所座標 $\xi\eta$ を Fig. 5(b) のように取る。ここに、 η 軸は矩形板の肉厚中心線で ξ 軸はそれに直交する軸である。矩形板 k に存在する応力成分は、弾性解からの類推により、 z 方向の垂直応力 σ および z 面に作用する η 方向のせん断応力 τ であり、ひずみ成分は z, ξ, η 方向の垂直ひずみ $\epsilon, \epsilon_\xi, \epsilon_\eta$ および η 方向のせん断ひずみ r であるとする。もちろん、 z 面上の ξ 方向のせん断応力は存在するのであるが、仮定 ③ により無視できるものとする。さて、以上の応力とひずみの間には弾性域においては Hooke の法則が成立し、非弾性域ではそれらの増分の間に Prandtl-Reuss の方程式が成り立つ。いま、増分を表わす記号として Δ を用いれば、応力増分とひずみ増分との間の関係式は次のようになる^{9), 9)}。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\tau \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon \\ \Delta r \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

上式中のマトリックス $[S]$ の表現式は補遺 (1) に与えられている。次に、次式で定義される一般応力の増分ベクトル $\{df\}$ と一般ひずみの増分ベクトル $\{dx\}$ との関係式を導く。

$$\{df\} = [\Delta P, \Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_{SV}]^T \dots\dots\dots (2)$$

$$\{dx\} = [\Delta\epsilon_c, \Delta\phi_x, \Delta\phi_y, \Delta\theta]^T \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 ΔM_{SV} は St. Venant のねじりモーメントの増分で、 $\{ \}$ は列ベクトル、 $[\]$ は行ベクトル、 T は転置行列を表わす。一般応力増分 $\Delta P, \Delta M_x, \Delta M_y$ と応力増分 $\Delta\sigma$ の間の関係式は周知のように次式で表わされる。

$$\Delta P = - \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \Delta\sigma \cdot dA \dots\dots\dots (4)$$

$$\Delta M_x = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \Delta\sigma \cdot y \cdot dA \dots\dots\dots (5)$$

$$\Delta M_y = - \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \Delta\sigma \cdot x \cdot dA \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 n は矩形板の総数、 A_k は k 矩形板の断面積である。一方、St. Venant のねじりモーメントの増分 ΔM_{SV} と Δr との間には次式が成り立つ。

$$\Delta M_{SV} = 2 \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \Delta r \cdot \xi \cdot dA \dots\dots\dots (7)$$

式 (4)~(7) をマトリックス表示すれば、

$$\{df\} = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} [C]^T \begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta r \end{Bmatrix} dA \dots\dots\dots (8)$$

ここに、

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

となる。次に、ひずみの増分と一般ひずみの増分との関係として次式を用いる。

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon \\ d\gamma \end{Bmatrix} = [C]\{dx\} \dots\dots\dots(10), (11)$$

式 (10) は断面の平面保持を仮定したことになり、式 (11) は肉厚中心線方向のせん断ひずみが肉厚中心線からの距離に比例するという弾性解と同じ式を用いたものである。断面の一部が非弾性域に入ると、上式特に式 (11) の妥当性は疑問になるが、ここでは文献 6) にしたがって上式は非弾性域でも成り立つと仮定した。式 (1), (8), (10), (11) より

$$\{df\} = [D]\{dx\} \dots\dots\dots(12)$$

$$[D] = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} [C]^T [S] [C] dA \dots\dots\dots(13)$$

を得る。式 (12) は一般応力の増分と一般ひずみの増分との間に成り立つ関係式で、 $[D]$ は一種の接線剛性マトリックスである。したがって、一般応力増分の条件が与えられれば、式 (12) から一般ひずみの増分が

$$\{dx\} = [D]^{-1}\{df\} \dots\dots\dots(14)$$

として簡単に求まる。ここで、 $\{df\}$ のうち $\Delta P, \Delta M_x, \Delta M_y$ については外力の増分そのものを表わす。いっぽう、外力のねじりモーメントの増分 ΔM_z は軸方向応力による付加的なねじりを考慮しないときは ΔM_{SV} に等しいが、この影響を考えると、

$$\Delta M_z = \Delta M_{SV} + \theta \left(\sum_{k=1}^n \int_{A_k} \sigma \cdot a^2 dA \right) \dots\dots(15)$$

となる。ここに、 a はせん断中心と断面の任意点との距離であり、右辺第 2 項が付加的なねじりの増分を表わす。この付加的なねじりの計算にはせん断中心の座標を知る必要があるが、非弾性域でのこの位置は、一般には、そりねじりを考慮しなければ求めることはできない。したがって、山形断面の場合には非弾性域におけるせん断中心の位置を弾性域におけるそれと同一と仮定して式 (15) 右辺第 2 項の計算を行なうことにした。また、その他の断面の場合にはこの項を考慮しないこととし、 ΔM_z は ΔM_{SV} に等しいものとみなした。

さて、この論文では外力の負荷条件として次の 4 つの場合を考える。

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \Delta M_{SV} \neq 0, \Delta P = \Delta M_x = \Delta M_y = 0 \\ \text{b) } \Delta P \neq 0, \Delta M_x = \Delta M_y = \Delta M_{SV} = 0 \\ \text{c) } \Delta M_x \neq 0, \Delta P = \Delta M_y = \Delta M_{SV} = 0 \\ \text{d) } \Delta M_y \neq 0, \Delta P = \Delta M_x = \Delta M_{SV} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

⑥ の負荷条件は 2. で述べた実験におけるそれと一致している。以下、負荷条件 ⑥ の場合について数値計算方法を簡単に説明する。

1) 矩形板を Fig. 5 (b) に示したように小さな要素に分割し、初期荷重 P, M_x, M_y および残留応力によ

って要素重心に生ずる応力、ひずみなどを計算する。

2) 各要素の応力—ひずみ関係式の係数 (式 (1) の $[S]$) を求め、マトリックス $[D]$ を求める。

3) 一般ひずみは式 (14) より

$$\{dx\} = \Delta M_{SV} [D]^{-1} [0, 0, 0, 1]^T \dots\dots\dots(17)$$

となる。したがって、 ΔM_{SV} の値が求まれば $\{dx\}$ は求まり、応力およびひずみの各増分は式 (1), (10), (11) より求まる。さらに、式 (15) から外力のねじりモーメントの増分 ΔM_z が求められる。 ΔM_{SV} の値は $[D]$ が接線剛性マトリックスであるためできるだけ小さいほうが望ましいが、ここでは M_{zY} の 1% および次の 2 つの条件から求まる ΔM_{SV} のうちの最小値を採った。

① 弾性域にある要素の相当応力 $\bar{\sigma}$ (補遺 (1) の式 A.1) が σ_Y に達する最小の ΔM_{SV} 。

② 塑性域にある要素の相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ (式 A.2) が $\epsilon_{st} - \epsilon_Y$ に達する最小の ΔM_{SV} 。

4) 上記 2)~3) のステップを θ が与えられた値に達するまで繰り返す。

上記ステップ 1) の与えられた初期荷重および残留応力から各要素の応力、ひずみを求める計算は断面の一部が非弾性域に入るとかなりやっかいである。そこで、実際の数値計算では与えられた初期荷重に対応する一般ひずみ $\epsilon_c, \phi_y, \phi_x$ をあらかじめ別の計算で求めておき、後者の値をインプット・データとして与える方法を採用している。

4. 実験および解析結果

(1) 実験結果と解析結果の比較

ここでは、2. で述べた山形鋼部材の実験結果と解析結果との比較について述べる。実験で与えた初期モーメントに対応する一般ひずみの値は Table 1 に示してある。これは前述のように数値計算におけるインプット・データとして与えたものである。圧延山形鋼に存在する残留応力の分布形として文献 10) に示したものを、最大圧縮残留応力の値は実測値 $0.3\sigma_Y$ を用いた。山形断面の両脚はともに肉厚中心線方向 (η 方向) に 20 等分、それと直角方向 (ξ 軸の正の方向) に 10 等分して計算を行なった。また材料性質のインプット・データとしては Table 2 に示した実測値を用いた。

Fig. 6 は純ねじり (F-シリーズ) 実験の結果と解析結果を示したものである。ねじりモーメント M_z およびねじれ角 θ は、それぞれ、 M_{zY} および θ_Y で無次元化してある。 M_z の実験値は次式によって求め、 θ のそれはやはり中央のねじり角の測定値 φ を $L/2$ で除して求めた。

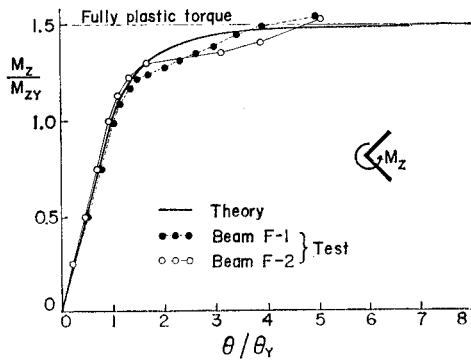


Fig. 6 Comparison of Theoretical and Experimental Results, Pure Torsion.

$$M_z = 11.43 \cdot F \cdot \cos \varphi \text{ (kg-cm)}$$

実験結果は2本のはりについて示されているが、類似した曲線を描いている。すなわち、実験値は $\theta/\theta_y = 1.5$ までは計算値に沿って上昇し、それ以後勾配が急変して最終的には計算より求めた全塑性トルクに達する。 $\theta/\theta_y = 1.5$ での部材中央のねじり角は F-1 はりで約 17° 、F-2 はりで約 9° であり、かなりの変形量であるため一次解析が適用できる範囲外であるかもしれない。非弾性域

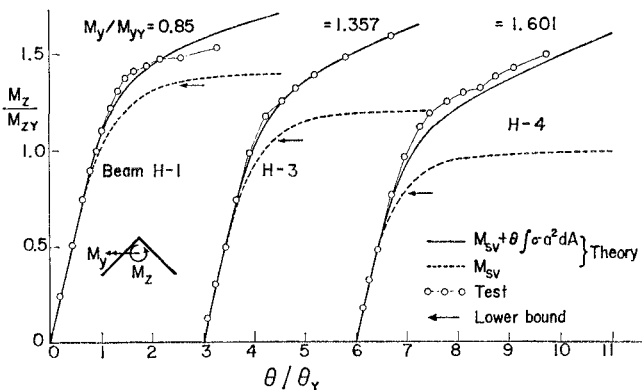


Fig. 7 Comparison of Theoretical and Experimental Results, Combined Weak-axis Bending and Twisting.

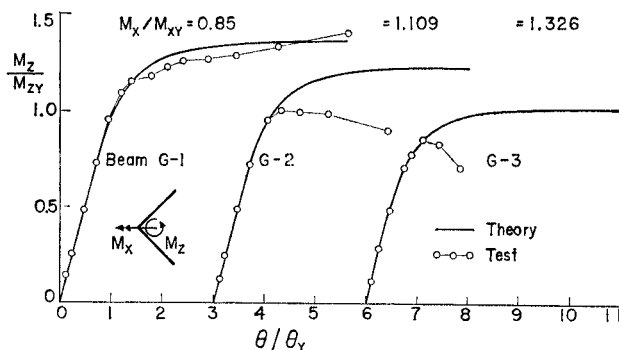


Fig. 8 Comparison of Theoretical and Experimental Results, Combined Strong-axis Bending and Twisting.

におけるねじりの大変形理論はまだ研究された例がないが、弾性域においては次式が提案されている¹¹⁾。

$$M_z = GK_T \theta + 1/2 E (K_0 - I_0^2/A - K_y^2/I_y) \theta^3 \dots (18)$$

ここに、 K_T は St. Venant のねじり定数であり、 K_0, I_0, K_y は次式で表わされる。

$$K_0 = \int_A a^4 dA, I_0 = I_x + I_y, K_y = \int_A a^2 x dA$$

式 (18) の第2項が大変形による影響を表わす。実験に用いた山形断面について上式を計算すると、 $\theta = \theta_y = 0.00316$ (ラジアン/cm) のとき右辺第2項は第1項の高々0.3% であって、弾性域では大変形の影響が無視できるようである。

Fig. 7 は弱軸まわりの曲げとねじれの組合せ (H-シリーズ) 実験結果を解析結果と比較したものである。理論解は軸方向応力の存在による付加ねじりを考慮した場合 (実線) と考慮しない場合 (破線) の両方について示してある。これらの図より非弾性域ではこの付加ねじりの影響が非常に大きく、H-4 はりについて考察すれば、 $\theta/\theta_y = 2$ で St. Venant のねじりモーメントを30% も増加させることがわかる。図中の矢印で示した下界値は曲げとねじりを受ける一般断面の降伏曲線の下界解⁵⁾

$$(M_y/M_{yp})^2 + (M_z/M_{zp})^2 = 1 \dots (19)$$

から求めたトルク値であるが、実験値はこの値をはるかに上まわって上昇していることがわかる。また付加ねじりを考慮した理論解はねじれ変形のかかなり大きな領域まで実験結果をよく説明しているといえよう。

強軸まわりの曲げとねじれの組合せ実験 (G-シリーズ) の結果は理論解とともに Fig. 8 に示されている。この場合、軸方向応力の存在による付加ねじりは非常に小さい (残留応力がない) ときはこの影響はない) ので、理論解は St. Venant のねじり成分についてのみ示してある。初期曲げモーメントが比較的大きい G-2 および G-3 はりは、ねじりによる部材の不安定現象によって耐荷力が決定されている。これは部材がねじれることによって生じた弱軸まわりの付加的な曲げモーメントが不安定現象を生ぜしめたと思われる。この種の不安定現象は過去に研究された例はないが、はりの横倒れ座屈後の挙動と関連があると思われる興味ある問題である。さて、解析には、この付加的な曲げモーメントの影響を考慮していないので、この不安定現象を予測できなかったけれども、それが生ずるまでの G-2, G-3 はりの実験結果とは良

好一致がみられる。また、G-1 はりの解析結果は H-シリーズのはりの場合と同様に、ねじれ変形のかかなり大きな領域まで実験結果の挙動をよく捉えているといえよう。

(2) 降伏曲面

材料をひずみ硬化のない完全弾塑性体と仮定して前述の非弾性解析を行なったときの全断面降伏域における一般応力の組合せは、剛塑性体が降伏を開始するときの一般応力の組合せすなわち降伏曲面の正解値と一致するはずである。軸力、曲げおよびねじりに対する降伏曲面の正解値を求めることは非常に難しく、これまで 2, 3 の断面(円形, パイプ, 箱形)について解かれているにすぎないが、その上界および下界解については数多くの研究がある。ここでは、薄肉矩形および H 形断面について得られた解析結果を、Hill⁹⁾, Gaydon¹²⁾ らの上界、下

界解と比較することにする。ただし、前述したように軸方向応力の存在による付加ねじりについてはここでは考慮しない。

Fig. 9 は高さと厚さの比が 10 : 1 の薄肉矩形断面に軸力とねじりが作用したときの解析結果を上界, 下界解と比較したものであり, Fig. 10 は同様な比較を軸力, 強軸まわりの曲げ (M_x) およびねじりが作用した場合について示したものである。同図中, p, m_x および m_z は

$$p = P/A \sigma_Y, \quad m_x = M_x/M_{xp}, \quad m_z = M_z/M_{zp} \quad \dots\dots\dots(20)$$

で定義される無次元量である。図の下界曲線は

$$p^2 + m_x \sqrt{1 - m_z^2} + m_z^2 = 1 \quad \dots\dots\dots(21)$$

で表わされる。また, Fig. 10 の $p=0$ に対する上界曲線は前述の Gaydon らの論文から採り, その他の上界曲線は Hill らが求めた式⁹⁾を Gaydon らと同じ方法で解いたものである。Fig. 9 および 10 で $p=0$ の場合については, P または M_x が初期荷重で M_z が増大する場合(式(16)の負荷条件 ㉔) および M_z が初期荷重で P または M_x が増大する場合(負荷条件 ㉕ または ㉖)の両負荷条件に対する数値計算結果が示してある。図より, これら両負荷径路より得られた解はまったく一致し, かつ降伏曲線の上界値に内接していることがわかる。ただし, Fig. 10 の $p=0$ のときの上界値は m_x が小さいとき $m_z > 1$ となるが, 解析結果は当然 $m_z \leq 1$ の範囲内に収まっている。

Fig. 11 は Fig. 10 と同様な比較を H 形鋼 (200 × 200 × 8 × 12 mm) について示したものである。図の下界曲線は式(21)で $p=0$ とおいた式に一致し, 上界曲線は Gaydon が求めたものである。ここでも, 両負荷径路から得られた数値計算結果はまったく一致し, m_x の小さいときを除いて, 上界曲線にはほぼ内接していることがわ

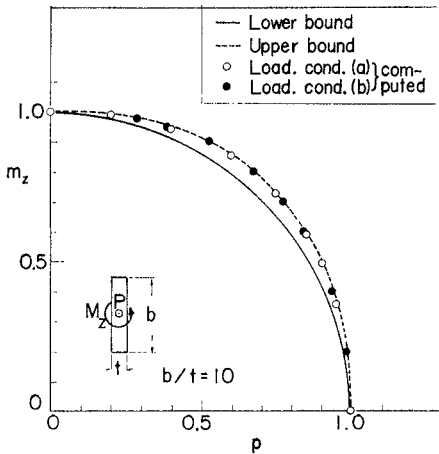


Fig. 9 Yield Surface for Combined Axial Force and Twisting, Rectangular Cross-Section.

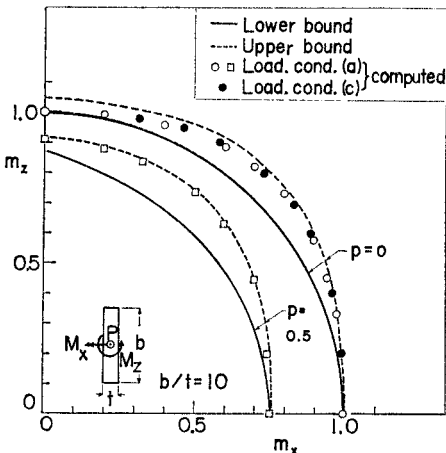


Fig. 10 Yield Surface for Combined Axial Force, Bending and Twisting, Rectangular Cross-Section.

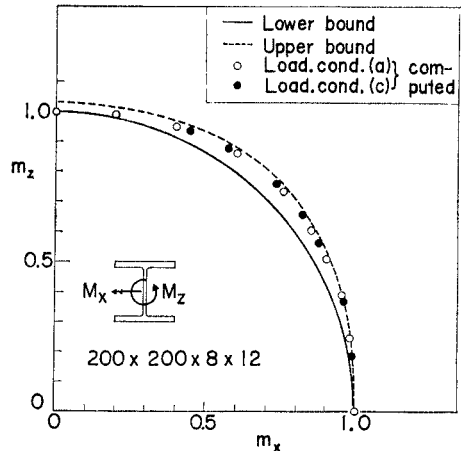


Fig. 11 Yield Surface for Combined Bending and Twisting, H-Section.

かる。

5. 結 語

山形鋼部材を用いて行なった純ねじりおよび曲げとねじりの組合せ実験結果、および軸力、曲げ、一様ねじりの作用を受ける薄肉開断面の非弾性解析結果について述べた。曲げとねじりの組合せ実験は強軸または弱軸まわりに等曲げをまず最初に与え、その後曲げを一定に保ちつつ部材中央をねじるといふ負荷径路をとった。そのため、Fig. 1, 2 に示した実験装置を試作したが、ほぼ満足すべき結果が得られたと思われる。特に、ケーブルをホイストによって吊り上げてトルクを与えるという方法は、変形制御によって荷重を増分させることができるため非弾性域での実験に好適であった。解析結果は強軸まわりに大きな曲げとねじりの組合せ実験の場合を除いて、ねじり変形のかなり大きな領域まで実験結果をよく説明することができた。強軸まわりに大きな曲げを受ける部材はねじれによる不安定によって崩壊したため、解析より得られた変形挙動と大きな差が生じた。この場合の解析には変形の影響を取り入れた 2 次解析 (Second Order Analysis) の必要があろう。最後に、矩形および H 形断面の解析より求められた軸力、曲げおよびねじりの降伏曲面の正解値を既存の上界、下界値と比較し、解析結果が Gaydon らの求めた上界解にほぼ内接していることが確かめられた。

ここで述べた解析では、一般の薄肉開断面材では影響の大きいそりねじりを考えておらず、また変形の影響も考慮していなかった。これらの影響を取り入れた一般の薄肉開断面材の非弾性解析法については現在研究中である。

この論文は、筆者が米国ワシントン大学 (セントルイス市) に留学中に行なった研究⁹⁾をその後の知見をもとに取りまとめたものである。ご指導を賜わったワシントン大学土木工学科主任教授 T.V. Galambos 博士および名古屋大学土木工学科 助教授 福本啓士博士に深謝したい。なお、数値計算はワシントン大学所有の IBM 360/50 および名古屋大学大型計算機センターの FACOM 230/60 を使用した。

6. 補 遺

(1) マトリックス [S]

相当応力 $\bar{\sigma}$ および相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ を次式で定義する。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \dots \dots \dots (A.1)$$

$$\bar{\epsilon}^p = \sum d\bar{\epsilon}^p = \sum (J_1 d\epsilon + J_2 d\gamma) \dots \dots \dots (A.2)$$

ここに、 $d\bar{\epsilon}^p$ は相当塑性ひずみ増分であり、 \sum は考えている負荷径路に沿っての $d\bar{\epsilon}^p$ の和を示す。いま、[S] を

$$[S] = \begin{bmatrix} E(1-S_1) & ES_2 \\ ES_2 & G(1-S_3) \end{bmatrix}$$

とおくと、係数 $S_1 \sim S_3$ および式 (A.2) の係数 J_1, J_2 は次のようになる。

- i) 弾性域 ($\bar{\epsilon}^p = 0, \bar{\sigma} < \sigma_Y$)
 $S_1 = S_2 = S_3 = J_1 = J_2 = 0$
- ii) 塑性域 ($0 < \bar{\epsilon}^p \leq \epsilon_{st} - \epsilon_Y, \bar{\sigma} = \sigma_Y$)
 $S_1 = (E/3G)\sigma^2/B_1, S_2 = -\sigma\tau/B_1, S_3 = 3\tau^2/B_1$
 $J_1 = (E/3G)\sigma \cdot \bar{\sigma}/B_1, J_2 = \tau\bar{\sigma}/B_1$

ここに、

$$B_1 = (E/3G - 1)\sigma^2 + \sigma_Y^2$$

- iii) ひずみ硬化域 ($\epsilon_{st} - \epsilon_Y \leq \bar{\epsilon}^p, \bar{\sigma} > \sigma_Y$)

塑性域での各式の B_1 を次式の B_2 に置き換える。

$$B_2 = (E/3G)\bar{\sigma}^2/(h-1) + (E/3G-1)\sigma^2 + \bar{\sigma}^2$$

参 考 文 献

- 1) Chen, W.F. and Santathadaporn, S.: Review of Column Behavior under Biaxial Loading, ASCE, Vol. 94, No. ST 12, Dec. 1968.
- 2) Janatowski, J.J. and Birnstiel, C.: Elasto-Plastic Analysis of Space Frames, Research Division Report, New York Univ., Sept. 1969.
- 3) Bruinette, K.E. and Fenves, S.J.: A General Formulation of the Elastic-Plastic Analysis of Space Frameworks, International Conference on Space Structures, Univ. of Surrey, 1966.
- 4) Ueda, Y. et al.: A New Theory on Elastic-Plastic Analysis of Frame Structures, Technology Reports of Osaka Univ., Vol. 19, No. 875, March, 1969.
- 5) 山田嘉昭: 塑性力学, 日刊工業社, 1964.
- 6) 木村 衛・鈴木敏郎: 薄肉矩形等断面材の弾塑性振り, 日本建築学会論文報告集, 第 166 号, 1969 年 12 月.
- 7) 山田嘉昭・高塚公郎: 組合せ荷重を受ける棒の弾塑性解析 I, 日本鋼構造協会第 5 回マトリックス構造解析講演論文集, 1971.
- 8) Engel, H.L. and Goodier, J.N.: Measurements of Torsional Stiffness Changes and Instability due to Tension, Compression and Bending, Journal of Applied Mechanics, Dec., 1953.
- 9) Usami, T.: Restrained Single-Angle Columns under Biaxial Bending, D.Sc. Dissertation, Washington Univ., Jan., 1971.
- 10) 宇佐美勉・T.V. Galambos: 2 軸曲げを受ける単一山形鋼柱の強度, 土木学会論文報告集, 第 191 号, 1971 年 7 月.
- 11) Black, M.M.: Non-linear Behavior of Thin-Walled Unsymmetrical Beam-Sections Subjected to Bending and Torsion, in Thin-Walled Structures, ed. A.H. Chilver, John Wiley & Sons, 1967.
- 12) Gaydon, F.A. and Nuttall, H.: On the Combined Bending and Twisting of Beams of Various Sections, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 6, 1957.