

有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法

EQUIVALENCY BETWEEN FINITE ELEMENT METHOD AND FINITE
DIFFERENCE METHOD AND A NEW DISCRETIZATION APPROACH

坂井 藤 一*

By Fujikazu Sakai

1. ま え が き^{注1)}

近年、有限要素法はその数学的根拠が確立されるにつれて、単に連続体問題の解析にとどまらず、一般的な数値解析のための手法として、差分法とともにその広範な応用性が注目されている。

一般に従来の定説では、差分法は純然たる数学的近似であり、有限要素法は変分原理によって物理的近似に基づいているといわれている。さらにまた、差分法は一般の微分方程式に適用可能であるが、有限要素法は変分原理に基づくため、適用範囲が制限されているともいわれた。

そもそも、航空機の三角形翼の応力解析問題²⁾を端緒として展開された有限要素法は、その後開発者の一人である R.W. Clough によって土木構造の分野にいち早く取入れられ³⁾、多方面に応用され今日にいたっている。しかし、1960年代においては、主としてエネルギー原理にその基礎を置いていたので、エネルギー原理の適用可能な物理現象あるいは広義のエネルギー汎関数を設定できる問題に対象が限られていた。1960年代末から J.T. Oden^{4), 5)} などの努力および応用数学者の参加によって、有限要素法は、数学的基盤が確立され始め、それとともに Galerkin^{注2)} 法などの weighted residuals method も導入され、一般的な数値解析法として適用範囲が拡張しつつある。

本報告では以上の観点から主に次の諸点について述べることとする。

(1) 有限要素法と差分法の等価性に関する考察—差分要素法 (FDEM) の誘導

(2) 非自己随伴方程式あるいは初期値問題における有限要素法と差分法の関係に関する考察—最小二乗変分原理の導入

以上の結果として、一見相異なる根拠に基づく有限要素法と差分法は、本論の立場によれば等価な関係にあり、旧来の差分法の拡張あるいは有限要素法への差分概念の導入として差分要素法が誘導され得ることが示される。また、有限要素法と差分法の関連から、それらを包含する離散化手法の体系化と各手法の概念の明確化が可能ではないかと推察されるので、その一つの試みを示した。

2. 差分法と有限要素法の相関関係

(1) 差分汎関数

次のような汎関数の極値問題を考えよう。

$$J = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \dots \dots \dots (1)$$

ただし、

$$y(a) = A, y(b) = B \dots \dots \dots (2)$$

式(2)の条件を満足する連続(かつ一階微分可能)^{注3)}な関数の集合の中で、式(1)の J を極値にするものは、次の方程式を満足する。

$$F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

これは Euler 方程式である。このとき周知のように、 $\delta J = 0 \dots \dots \dots (4)$

同様に次のような汎関数 J_D を考える。

注1) 本論文の一部はマトリックス構造解析シンポジウム¹⁾および土木学会年次学術講演会²⁾にて発表された。本報告はそれらを中心にして、さらに詳細を論じ、離散化手法の体系化を意図したものである。

注2) Galerkin 法を有限要素法に適用した最も初期のものには、著者²⁾、R.H. Gallagher⁹⁾、B.A. Szabo et. al.⁹⁾ などがおり、最近のものには、J.W. Leonard et. al.¹⁰⁾、S.G. Hutton et. al.¹¹⁾ などがある。

注3) Weierstrass-Erdmann の定理によって、角点が存在してもかまわない。

$$J_D = \sum_{i=1}^{N-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) h_i \dots\dots\dots(5)$$

ここで,

$$x_i = a, x_N = b, y_i = y(x_i) \dots\dots\dots(6)$$

ただし,

$$y_1 = A, y_N = B \dots\dots\dots(7)$$

式(5)から,

$$\frac{\partial J_D}{h_i \partial y_i} = F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)}{h_i} \dots\dots\dots(8)$$

h_i, h_{i-1} はともに ϵ のオーダーを持つとすれば,
 $\epsilon \rightarrow 0$

に対し, 式(8)の右辺は次の値に収束する。

$$F_y(x, y, y') - \frac{\partial}{\partial x} \{F_{y'}(x, y, y')\} \dots\dots\dots(9)$$

このとき, 式(8)の左辺は

$$\frac{\partial J_D}{h_i \partial y_i} \rightarrow \frac{\delta J}{\delta y} \dots\dots\dots(10)$$

$\frac{\delta J}{\delta y}$ は変分導関数と呼ばれる。式(4)の条件は変分導関数が0になることと同じである。

以上の点から, 汎関数 J の極値問題と汎関数 J_D 極値問題は, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において一致することがわかる。式(8)の右辺を0とおけば,

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) - F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)}{h_i} \dots\dots\dots(11)$$

式(11)は汎関数 J_D の Euler 方程式であるとともに式(3)の差分表現であることがわかる。すなわち, 汎関数 J の近似として, 差分汎関数 J_D を定義すれば, その Euler 方程式は J の Euler 方程式の差分表現となっている。

ここで注意すべきことは, J は $y(x)$ の汎関数で, 許容関数 y は式(2)の条件とともに定義域 (a, b) で連続でなければならなかった。しかるに, J_D は $N+1$ 個の変数 y_i の汎関数となり, y_i は式(7)以外はなんら制限を持たないことである。

(2) 汎関数における局所化の性質¹²⁾

通常われわれが対象とする汎関数は局所化の性質を有する。すなわち, 定義域 (a, b) を部分領域 $[x_i, x_{i+1}]$ に分割するとき, 汎関数 J は次のようになる。

$$J = \sum_{i=1}^{N-1} J_i \dots\dots\dots(12)$$

ただし,

$$J_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, y, y') dx + C(x, y, y') \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \text{注4)} \dots\dots\dots(13)$$

このとき次の極値条件,

$$\delta J = \sum_{i=1}^{N-1} \delta J_i = 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$\delta J_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \dots\dots\dots(15)$$

は同値となる。

同様に, 汎関数 J_D についても,

$$\delta J_D = \sum_{i=1}^{N-1} \left[F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) h_i - F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) \right] \delta y_i + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) \delta y_{i+1} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

$$\delta J_{Di} = \delta F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) h_i - \delta C\left(x, y, \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0 \dots\dots(17)$$

($i=1, 2, \dots, N-1$)

両式は同値である。したがって, 式(16)は式(17)の重ね合せ^{注5)}の結果として得られ, δy_i の係数を0とおけば式(11)の差分式となる。

すなわち, 有限要素として領域 $[x_i, x_{i+1}]$ を考え, かつ汎関数として J_{Di} を用いるならば, 重ね合せの結果として差分表現を得る。

(3) 実例一棒の引張問題 (Fig. 1)

x 方向の変位を u とする。

基本方程式

$$EA(x) \frac{d^2 u}{dx^2} - k(x)u + \bar{p}(x) = 0 \dots\dots\dots(18)$$

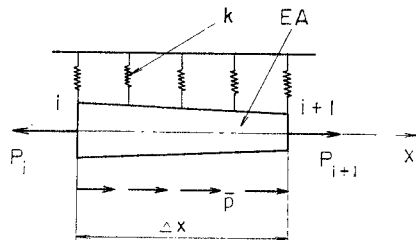


Fig. 1 Bar Problem.

注 4) C はいわゆる“横断性の条件”(自然条件—力学的境界条件)として考慮されるものである。

注 5) この汎関数の局所化性は有限要素法の基礎の一つになっていることに注目すべきである。これによって, 重ね合せに基づく直接剛性法が可能になり, マトリックスの組立てがきわめて容易になるのである。

ポテンシャルエネルギー

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta x} \left[EA(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2 \bar{p}(x)u + k(x)u^2(x) \right] dx + P_i u_i - P_{i+1} u_{i+1} \dots (19)$$

差分方程式

$$EA_i \frac{u_{i+1} + 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - k_i u_i + \bar{p}_i = 0 \dots (20)$$

差分ポテンシャルエネルギー

$$\Pi_{Di} = \frac{\Delta x}{2} \left[EA_i \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2 - 2 \bar{p}_i u_i + k_i u_i^2 + P_i u_i - P_{i+1} u_{i+1} \dots (21) \right]$$

a) 有限要素法

内挿関数を次のように選ぶ。

$$u = w^{(i)} u_i + w^{(i+1)} u_{i+1} \dots (22)$$

ここで、

$$w^{(i)} \equiv 1 - \frac{x}{\Delta x}, \quad w^{(i+1)} \equiv \frac{x}{\Delta x} \dots (23)$$

これを式 (19) に代入し、Castigliano の定理を適用すれば、次の要素剛性方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta_{i,i} & \text{sym.} \\ -\alpha + \beta_{i,i+1} & \alpha + \beta_{i+1,i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_i + r_i \\ P_{i+1} + r_{i+1} \end{Bmatrix} \dots (24)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{1}{(\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} EA dx \dots (25)$$

$$\beta_{mn} = \int_0^{\Delta x} kw^{(m)} w^{(n)} dx \dots (26)$$

$$r_i = \int_0^{\Delta x} \bar{p} w^{(i)} dx \dots (27)$$

これらはそれぞれ振動問題における mass との対応から注6) consistent rigidity, consistent spring coefficient, consistent load と呼んでよい。

A, k, \bar{p} が要素内で一定であるならば、式 (24) は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{\Delta x} + \frac{1}{3} k \Delta x & \text{sym.} \\ -\frac{EA}{\Delta x} + \frac{1}{6} k \Delta x & \frac{EA}{\Delta x} + \frac{1}{3} k \Delta x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_i + \frac{1}{2} \bar{p} \Delta x \\ P_{i+1} + \frac{1}{2} \bar{p} \Delta x \end{Bmatrix} \dots (28)$$

b) 差分法と有限要素法の関連

通常われわれは変断面などに対処するに、次のような step-wise な近似を行なっている (Fig. 2)。

その結果は式 (28) のようになるが、汎関数式 (19) の独立変数 $u(x)$ を式 (22) のような形でなく step-wise

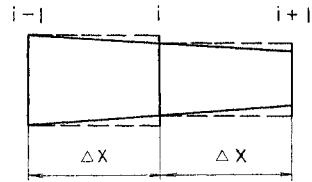


Fig. 2 Step-wise Approximation.

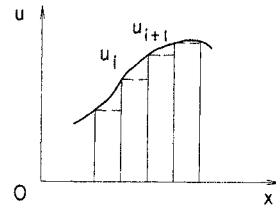


Fig. 3 Const. Displacement.

に近似したらどうなるであろうか (Fig. 3)。たとえば、要素内で $u \equiv u_i$ ($0 \leq x < \Delta x$) とする注7) ならば、式 (19) は式 (21) となり、そのときの剛性方程式は、

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_i}{\Delta x} + k_i \Delta x & \text{sym.} \\ -\frac{EA_i}{\Delta x} & \frac{EA_i}{\Delta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_i + \bar{p}_i \Delta x \\ P_{i+1} \end{Bmatrix} \dots (29)$$

となる。要素の重ね合せの結果は、

$$\begin{bmatrix} \dots & -\frac{EA_{i-1}}{\Delta x} & \frac{E(A_{i-1} + A_i)}{\Delta x} & + k_i \Delta x & -\frac{EA_i}{\Delta x} & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \bar{p}_{i-1} \Delta x \\ \bar{p}_i \Delta x \\ \bar{p}_{i+1} \Delta x \\ \vdots \end{Bmatrix} \dots (30)$$

すなわち、 $A_{i-1} = A_i$ ならば差分式 (20) と一致する。さらに、式 (29) は式 (24) あるいは式 (28) と比べ明らかに lumping が行なわれていることがわかる。

ここで、式 (20) の差分式の物理的意味を考えて見よう (Fig. 4 参照)。

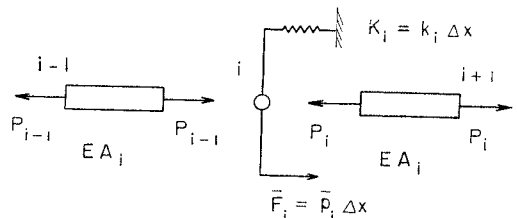


Fig. 4 Physical Model for Finite Difference.

注 7) ただし、このままでは要素境界で $\frac{du}{dx} \rightarrow \infty$ となってしまうので、 $\frac{du}{dx} \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$ と近似する。そのとき要素境界において $\frac{du}{dx}$ のギャップは有限である¹⁴⁾。

注 6) consistent なる概念は J.S. Archer¹³⁾ による。

Hooke 則 (各要素)

$$P_{i-1} = EA_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}, P_i = EA_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \dots (31)$$

力のつり合い (i 点)

$$\bar{F}_i - K_i u_i = P_i - P_{i-1} \dots (32)$$

これより, 差分式 (20) を得る。すなわち, 差分式は, 系を集中系にモデル化した場合の正解を表わしており, 明確な物理的意味を持っている注8)。

c) 差分要素法

以上から, 一見異なる根拠に立つ有限要素法と差分法はほぼ等価な関係にあり, 差分法は有限要素法の特別な場合と見ることもできる。逆に, 有限要素法における rigidity, load, mass などの step-wise な近似や lumping は差分概念と深い関連を持ち, 有限要素法は差分法の拡張と見なすことも可能である。

有限要素法と差分法を結合すれば, 両者の特徴を活用することができる。以上のような考え方を差分要素法と呼ぶことにする。

差分要素法の利点は次の諸点にあると考えられる。

イ) 汎関数の許容関数として課せられていた内挿関数の条件 (連続性など) をかなり緩めることができる。

ロ) 高次の微分を含む問題では, 未知変数の数が少なく済む。

ハ) non-compatible model, hybrid model に対して取束性, 誤差評価に差分法の数学的知識を活用できる。

ニ) 従来の差分法では取扱いの不便な不等差分, 境界条件の処理などを簡便にする。

ホ) 汎関数の局所化の性質を利用して, 直接剛性法によりマトリックス化が容易である。

ヘ) 汎関数が正値対称である場合には, 構成されるマトリックスは対称で, 性質も良好なものとなる。

(4) 実 例

a) はりの曲げ問題 (Fig. 5)

たわみを w とする。

基本方程式

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = \bar{q} \dots (33)$$

差分方程式

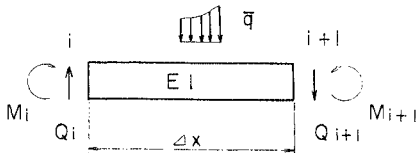


Fig. 5 Beam Problem.

注 8) このような差分式の物理的意味に着目して, 変分原理によらず, 有限要素法を展開したものに吉田¹⁵⁾の論文がある。

$$EI \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{(\Delta x)^4} = \bar{q}_i \dots (34)$$

ポテンシャルエネルギー

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta x} \left[EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - 2 \bar{q} w \right] dx + Q_i w_i - Q_{i+1} w_{i+1} - M_i \left(\frac{dw}{dx} \right)_i + M_{i+1} \left(\frac{dw}{dx} \right)_{i+1} \dots (35)$$

Hellinger-Reissner 汎関数¹⁶⁾

$$\Pi_{HRI} = \int_0^{\Delta x} \left[\left(\frac{dM}{dx} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right) - \frac{M^2}{2EI} - \bar{q} w \right] dx + \left\{ Q_i w_i - Q_{i+1} w_{i+1} \right\} + \left\{ (M_i - \bar{M}_i) \left(\frac{dw}{dx} \right)_i + M_i \left(\frac{dw}{dx} \right)_i \right\} - \left\{ (M_{i+1} - \bar{M}_{i+1}) \left(\frac{dw}{dx} \right)_{i+1} - M_{i+1} \left(\frac{dw}{dx} \right)_{i+1} \right\} \dots (36)$$

有限要素法は次のようになる。

1) 変形法

剛性方程式

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{(\Delta x)^3} & & & \\ & \frac{6}{(\Delta x)^2} & \frac{4}{\Delta x} & \\ & \frac{12}{(\Delta x)^3} & \frac{6}{(\Delta x)^2} & \frac{12}{(\Delta x)^3} \\ & \frac{6}{(\Delta x)^2} & \frac{2}{\Delta x} & \frac{6}{(\Delta x)^2} & \frac{4}{\Delta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_i \\ w_{i+1} \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{i+1} \\ \bar{M}_{i+1} \end{Bmatrix} \dots (37)$$

2) Hybrid Model

剛性方程式

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ \frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{\Delta x}{3EI} & \\ \frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & \frac{\Delta x}{6EI} & \frac{\Delta x}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_{i+1} \\ M_i \\ -M_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_{i+1} \\ -\left(\frac{dw}{dx} \right)_i \\ -\left(\frac{dw}{dx} \right)_{i+1} \end{Bmatrix} \dots (38)$$

内挿関数

$$w = w^{(i)}w_i + w^{(i+1)}w_{i+1} \dots \dots \dots (39)$$

$$M = w^{(i)}M_i + w^{(i+1)}M_{i+1} \dots \dots \dots (40)$$

ただし、 $w^{(i)}, w^{(i+1)}$ は式 (23) のものである。
 差分要素法は次のようになる。

1) 変位法 (Fig. 6)

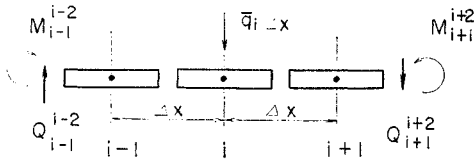


Fig. 6 Element for FDEM.

剛性方程式

$$\frac{EI}{(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} 1 & \text{sym} \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}Q_i^{i-1} - \frac{1}{\Delta x}M_i^{i-1} \\ \bar{q}_i \Delta x + \frac{1}{2}(Q_i^{i+1} - Q_i^{i-1}) + \frac{1}{\Delta x}(M_i^{i-1} + M_i^{i+1}) \\ \frac{1}{2}Q_i^{i+1} - \frac{1}{\Delta x}M_i^{i-1} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (41)$$

重ね合せの結果は差分方程式 (34) を得る。また、差分法の場合の境界条件とまったく同一の式を、差分汎関数の停留条件として得ることができる。

2) Hybrid Model

剛性方程式

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \text{sym.} \\ 0 & 0 & & \\ \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & -\frac{\Delta x}{EI} & \\ \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_{i+1} \\ M_i \\ -M_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_{i+1} \\ -\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)_i \\ -\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)_{i+1} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (42)$$

この式の物理的意味を考えて見よう。この場合の要素

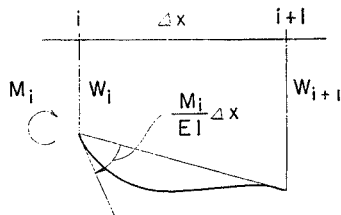


Fig. 7 Physical Meaning for Hybrid Model.

は一端の回転を拘束され、他端にモーメント M_i を受けるようなモーメント一定のほりに厳密に対応しており、上記の差分近似が明確に物理的近似を意味していることがわかる (Fig. 7 参照)。

b) 平面応力問題 (Fig. 8)

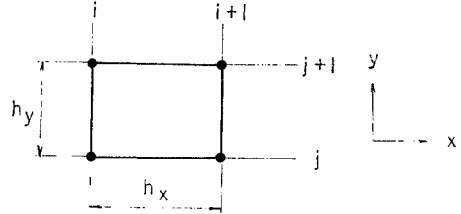


Fig. 8 Plane Stress Problem.

基礎方程式

$$E' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \bar{X} = 0 \dots \dots \dots (43)$$

$$G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + E' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \bar{Y} = 0 \dots \dots \dots (44)$$

差分方程式

$$E' \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} \right) + E' \nu \left(\frac{v_{i,j+i} - v_{i,j} - v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j}}{h_x h_y} \right) + G \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j} - v_{i+1,j-1} + v_{i,j-1}}{h_x h_y} \right) + G \left(\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} \right) + \bar{X}_{i,j} = 0 \dots \dots \dots (45)$$

$$G \left(\frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{h_x^2} \right) + G \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}}{h_x h_y} \right) + E' \nu \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}}{h_x h_y} \right) + E' \left(\frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{h_y^2} \right) + \bar{Y}_{i,j} = 0 \dots \dots \dots (46)$$

ここで、

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \dots \dots \dots (47)$$

差分ポテンシャルエネルギー

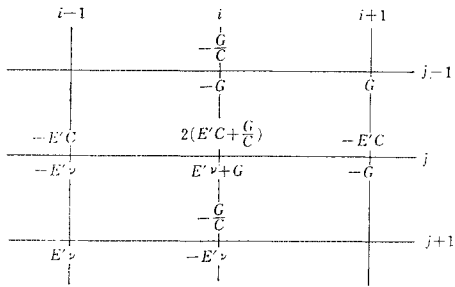
$$\Pi_{Di} = \frac{h_x h_y}{2} \left[E' \left\{ \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} \right) \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} \right) + \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} \right)^2 \right\} + G \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} \right)^2 \right] t$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\substack{i,j \\ i+1,j \\ i,j+1 \\ i+1,j+1}} \left\{ \frac{h_x h_y}{4} (\bar{X}_i u_i + \bar{Y}_j v_j) \right. \\
 & \left. + \frac{h_y}{2} S_{x_i} u_i + \frac{h_x}{2} S_{y_j} v_j \right\} t \dots \dots \dots (48)
 \end{aligned}$$

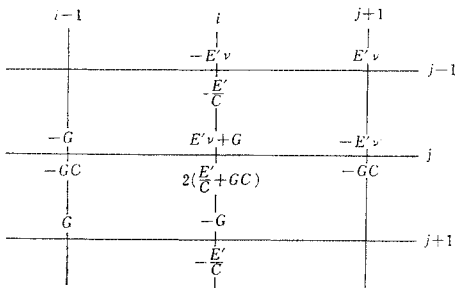
ここで、 t は板厚とする。

式 (48) より得られる剛性マトリックスから、重ね合せを行えば、 $u_{i,j}$ および $v_{i,j}$ に対して表-1 のような各係数を得る。

表-1 平面応力の節点変位関係 $C = h_y/h_x$



(a) $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial u_{i,j}}$ に対する各係数



(b) $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial v_{i,j}}$ に対する各係数

この結果は、差分汎関数を式 (48) のように採ったときの差分要素法が、差分方程式 (44) と一致することが確かめられた。

3. 非自己随伴方程式の場合

自己随伴方程式の場合には、エネルギー汎関数を設定することができ¹⁷⁾、従来の有限要素法の適用はほとんどこの場合に限られていた。このような問題における有限要素法と差分法の類似性については、鷲津¹⁸⁾、J.T. Oden¹⁹⁾、菊地ほか²⁰⁾ などに特定の問題に対して指摘されている。また、差分法の立場から変分原理を利用したものには、G.E. Forsythe and W.R. Wasow²¹⁾、W. Prager et. al.²²⁾、H. Tottenham²³⁾ などがあり、さらに D. Greenspan²⁴⁾ は 2.(1) と同様の考え方に基づき、非線形方程式も含めて、差分近似解法を示している。しかしながら、以上の研究のいずれにおいても、一般的な

方程式に対して有限要素法と差分法の等価関係について考察がなされていないように思われる。

ここでは非自己随伴方程式の場合についても、有限要素法を展開し、差分法との等価関係を考察しよう。この場合の基礎となる変分原理として、著者は最小二乗法の導入を提案しているが²⁵⁾、これと有限要素法を結合した最小二乗有限要素法はいくつかの有用性を持つと思われる。

(1) 例題—初期値問題

$$\frac{dy}{dt} + y = 0 \dots \dots \dots (49)$$

$$y(0) = 1 \dots \dots \dots (50)$$

a) 差分式と有限要素法

解析解

$$y = e^{-t} \dots \dots \dots (51)$$

差分方程式

$$\text{後退型 } \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} + y_{i+1} = 0 \dots \dots \dots (52)$$

$$\text{前進型 } \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} + y_i = 0 \dots \dots \dots (53)$$

有限要素法

$$\text{内挿関数 } y = w^{(i)} y_i + w^{(i+1)} y_{i+1} \dots \dots \dots (54)$$

$$w^{(i)} \equiv 1 - \frac{t}{\Delta t}, \quad w^{(i+1)} \equiv \frac{t}{\Delta t} \dots \dots \dots (55)$$

Galerkin 法

$$\int_0^{\Delta t} \left(\frac{dy}{dt} + y \right) w^{(j)} dt = 0 \dots \dots \dots (56)$$

$$(j = i, i+1)$$

最小二乗変分原理

$$J_i = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{dy}{dt} + y \right)^2 dt \dots \dots \dots (57)$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial y_j} = 0 \quad (j = i, i+1) \dots \dots \dots (58)$$

自己随伴形式に変換して有限要素法

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0 \dots \dots \dots (59)$$

$$y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = -1 \dots \dots \dots (60)$$

Hamilton 原理

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \left[\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y^2 \right] dt \dots \dots \dots (61)$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial y_j} = 0 \quad (j = i, i+1) \dots \dots \dots (62)$$

マトリックス形式で表わせれば次のようになる。

式 (51) の厳密解から、

$$\left\{ -1, 1 + \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{(\Delta t)^3}{6} + \dots \right\} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots \dots \dots (63)$$

式 (52) の後退差分から、

$$\{-1, 1+\Delta t\} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(64)$$

式 (53) の前進差分から,

$$\{-1+\Delta t, 1\} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(65)$$

式 (56) の Galerkin 法から,

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{2}{3}\Delta t & -1-\frac{1}{3}\Delta t \\ -1+\frac{1}{3}\Delta t & 1+\frac{2}{3}\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots(66)$$

重ね合せれば,

$$\left\{-1+\frac{1}{3}\Delta t, 2, -1-\frac{1}{3}\Delta t\right\} \begin{Bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots(67)$$

式 (58) の最小二乗変分原理から,

$$\begin{bmatrix} 1-\Delta t+\frac{1}{3}(\Delta t)^2 & \text{sym.} \\ -1+\frac{1}{6}\Delta t^2 & 1+\Delta t+\frac{1}{3}(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(68)$$

重ね合せれば,

$$\left\{-1+\frac{1}{6}(\Delta t)^2, 2+\frac{2}{3}(\Delta t)^2, -1+\frac{1}{6}(\Delta t)^2\right\} \begin{Bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(69)$$

式 (59) から中心差分近似をすれば,

$$\{-1, 2+(\Delta t)^2, -1\} \begin{Bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(70)$$

式 (62) の Hamilton 原理から,

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{3}(\Delta t)^2 & \text{sym.} \\ -1+\frac{1}{6}(\Delta t)^2 & 1+\frac{1}{3}(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots(71)$$

重ね合せれば,

$$\left\{-1+\frac{1}{6}(\Delta t)^2, 2+\frac{2}{3}(\Delta t)^2, -1+\frac{1}{6}(\Delta t)^2\right\} \begin{Bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(72)$$

本式は式 (69) と一致している注9)。

b) 差分要素法

内挿関数を次のように採る。

$$y = \begin{cases} y_i & (0 \leq t \leq \theta \Delta t) \\ y_{i+1} & (\theta \Delta t \leq t \leq \Delta t) \end{cases} \dots\dots\dots(73)$$

ただし, θ は次の関係を満たす定数である。

$$0 \leq \theta \leq 1 \dots\dots\dots(74)$$

すなわち, Fig. 9 よりこれは内挿関数を Heaviside

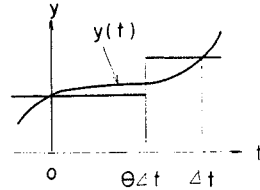


Fig. 9 Approximation with Heaviside Function.

関数とすることになり, 形状関数 $w^{(i)}, w^{(i+1)}$ は次のようになる。

$$w^{(i)} = w^{(i+1)} = 1 \dots\dots\dots(75)$$

これより有限要素法の手順に従えば, Galerkin 法式 (56) より,

$$\begin{bmatrix} 1-\theta \Delta t & -1-(1-\theta)\Delta t \\ -1+\theta \Delta t & 1+(1-\theta)\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots(76)$$

重ね合せれば,

$$\{-1+\theta \Delta t, 2+(1-2\theta)\Delta t, -1-(1-\theta)\Delta t\} \cdot \begin{Bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(77)$$

最小二乗変分原理式 (58) より,

$$\begin{bmatrix} 1-2\theta \Delta t + \theta(\Delta t)^2 & \text{sym.} \\ -1+(2\theta-1)\Delta t & 1+2(1-\theta)\Delta t + (1-\theta)(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(78)$$

重ね合せれば,

$$\{-1+(2\theta-1)\Delta t, 2-2(2\theta-1)\Delta t + (\Delta t)^2, -1+(2\theta-1)\Delta t\} \begin{Bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(79)$$

式 (76) の第 2 式で, $\theta=0$ あるいは 1 とおけば, それぞれ式 (64) あるいは式 (65) の差分式と一致する。また, 式 (78) の第 2 式で, $\theta=0$ あるいは 1 とおけば, それぞれ式 (64) あるいは式 (65) の差分式と一致する。さらに, 式 (79) で $\theta=1/2$ とおけば, 式 (70) の差分式と一致する。

式 (76) の第 2 式で $\theta=1/2$ とおけば次の式を得る。

$$\left\{-1+\frac{1}{2}\Delta t, 1+\frac{1}{2}\Delta t\right\} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(80)$$

式 (78) の第 2 式で $\theta=1/2$ とおけば次の式を得る。

$$\left\{-1, 1+\Delta t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\right\} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(81)$$

ここで, 比較のため次のことに触れておく。式 (49), (50) の初期値問題は次の積分方程式に変換される。

$$y = \int_0^t y dt + 1 \dots\dots\dots(82)$$

この式を Heaviside 関数で近似するならば, 区間 $[t_i, t_{i+1}]$ における関係式として次の式を得る。

$$y_{i+1} = \frac{\Delta t}{2}(y_i + y_{i+1}) + y_i \dots\dots\dots(83)$$

注 9) 自己随伴形式の場合, エネルギーノルムは二乗ノルムと定数項しかちがわない。

表一2 数値解の比較結果

method \ t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
exact (63)	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	
FD	(64)	0.909	0.826	0.751	0.683	0.621
	(65)	0.900	0.810	0.729	0.656	0.590
	(70)	0.900	0.809	0.726	0.650	0.581
FEM	(66)	0.906	0.821	0.744	0.675	0.611
	(68)	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607
FDEM (81)	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	
integral (83)	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	

注) Hamilton 原理に基づく有限要素法は極端に精度が悪いので載せていない。

本式は、Galerkin 差分要素法の式 (80) と一致している。

c) 数値解の比較

以上、いくつかの近似表現を得たので、これらの計算の比較を行えば、表一2 のようになる。この場合重ね合せは必ずしも得策でない。数値解の比較からこの場合の結果として次のことがわかる。

イ) 単純な2段の差分は、前進・後退ともに誤差が大きい。

ロ) 3段の中心差分は、 $t=0$ における1階の微係数の近似が原因して誤差が大きい。

ハ) 有限要素法は差分に比べて精度がよい。

ニ) 最小二乗有限要素法は Galerkin 有限要素法に比べて精度がよい。

ホ) Hamilton 原理に基づく有限要素法は極端に精度が落ちる。これは後述するように、自然条件の矛盾が解析領域が狭いと著しく影響するためである。

ヘ) 差分要素法は有限要素法と同程度の精度を有する。

ト) 積分方程式の step-wise な近似もかなり精度がよい。

以上の点は、次のような簡単な誤差解析によっても確かめることができる。すなわち、厳密解式 (63) と比べて誤差の大きさは、後退差分式 (64) で $O((\Delta t)^2/2)$ 、前進差分式 (65) で $O((\Delta t)^2/2)$ 、Galerkin 有限要素法式 (66) の第2式で $O((\Delta t)^2/6)$ 、最小二乗有限要素法式 (68) の第2式で $O((\Delta t)^2/12)$ 、最小二乗差分要素法式 (81) で $O((\Delta t)^2/6)$ 、積分方程式の step-wise 近似および Galerkin 差分要素法式 (80) で $O((\Delta t)^2/12)$ をそれぞれ有することがわかる。

上述の結果は、形状関数の採り方や差分スキームの種類などによって変わってくるものである。したがって、すべての場合に通用するものではなく、一つの参考例と見るのがよい。

(2) 自然境界条件について

最小二乗汎関数式 (57) において、 i 点の値が確定で

ある場合、 $i+1$ 点を自然境界とみなすことによって問題を要素 i の部分だけに限定してしまいうることができる。

この場合、変分は y_{i+1} についてのみ行なわれ、

$$\frac{\partial J_i}{\partial y_{i+1}} = 0 \dots\dots\dots (84)$$

から、 y_{i+1} の値を決定することができる。このようなことが可能なのは、対象としている問題が初期値問題であり、 $i+1$ 点より後の情報が要素 i の結果に影響を与えないからである。したがって、このような取扱いでは、重ね合せの原理は不要となり、実際 Galerkin 有限要素法式 (66)、最小二乗有限要素法式 (68) および差分要素法式 (81) などでは各要素ごとに問題を解く2段の差分法と同じプロセスが用いられている。

筆者の別報で述べているように、最小二乗変分原理に基づく有限要素法は、自然境界条件をうまく利用することができる。Hamilton 原理はこの点で時系列問題の有限要素法解析には不向きである。この原理を適用するには、自然境界条件が問題に合致するように修正されなければならない。

4. 発展方程式における差分法と有限要素法

偏微分方程式系において“適切な”初期値問題は、発展系と呼ばれるが²⁷⁾、これには拡散型と波動型があり、その代表的なものとして非定常熱伝導方程式と波動方程式がある。これらの方程式には Lax-Wendroff の差分法など著名な差分法がいくつかある。

ここでは、これらの方程式系に対しても時間軸を含めて有限要素法を展開し、かつ要素法の立場から既往の差分法に一致する式を誘導し得ることを示す。結果としてこのような発展系においても、有限要素法と差分法は等価な関係にあり、差分要素法を通じて両者を包含し得る可能性があることを指摘する。

(1) 放物型一熱伝導 (拡散, 圧密) 方程式

次のような空間1次元の非定常熱伝導方程式を考えよう。要素として Fig. 10(a) の長方形要素を採る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots\dots\dots (85)$$

a) 時間に関する有限要素法

最小二乗変分原理に基づくことにする。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (u_t - \kappa u_{xx})^2 dt \dots\dots\dots (86)$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (-u_{tt} + \kappa u_{xxt}) \delta u dt + (u_t - \kappa u_{xx}) \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \dots\dots\dots (87)$$

これより、Euler 方程式および境界条件はそれぞれ次のようになる。

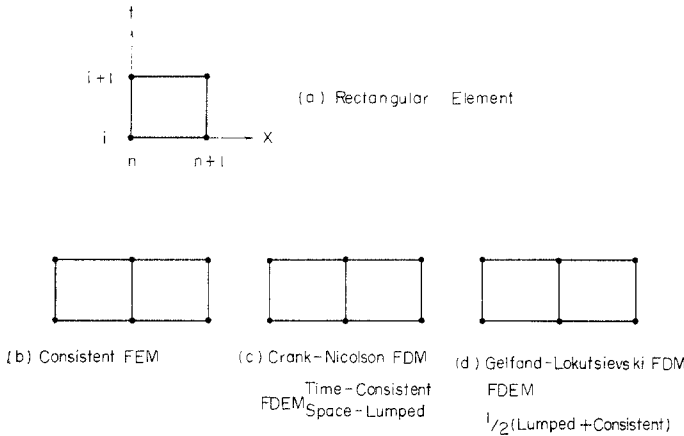


Fig. 10 Elements for Non-Stationary Heat-Transfer Equation.

$$u_{tt} - \kappa u_{xx} = 0 \quad \text{in } (t_0, t_1) \dots\dots\dots (88)$$

$$u = f(x) \quad \text{at } t = t_0 \dots\dots\dots (89)$$

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0 \quad \text{at } t = t_1 \dots\dots\dots (90)$$

すなわち、原式は $t = t_1$ における自然条件である。内挿関数を次のように採る。

$$u = w^{(i)} u_i(x) + w^{(i+1)} u_{i+1}(x) \dots\dots\dots (91)$$

ここで、 $w^{(i)}$, $w^{(i+1)}$ は式 (55) で定義されている。

$$J_i = \frac{1}{2} \int_0^{dt} (u_t - \kappa u_{xx})^2 dt \dots\dots\dots (92)$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial u_j} = 0 \quad (j = i, i+1) \dots\dots\dots (93)$$

これより、次のマトリックス方程式を得る。

$$\frac{1}{dt} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \frac{\kappa}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i,xx} \\ u_{i+1,xx} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (94)$$

上式から、次の二種の方程式を得る。

1) i 点確定とすれば、第 2 行より、

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{dt} - \kappa \frac{u_{i,xx} + u_{i+1,xx}}{2} = 0 \dots\dots\dots (95)$$

2) 重ね合わせれば、

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{dt} + \kappa \frac{u_{i+1,xx} - u_{i-1,xx}}{2} = 0 \dots\dots\dots (96)$$

式 (95) は原式 (85) の差分化であり、式 (96) は式 (88) の中央差分になっている。

b) 空間に関する有限要素法

時間に関する 2 段の離散化式 (95) から、空間座標に関する有限要素法を展開する。

エネルギー汎関数を次のように設定する。

$$\begin{aligned} \Pi_i^n = & \frac{1}{2} \int_0^{dx} \left[\kappa (u_{i+1,x})^2 + \frac{2}{dt} (u_{i+1})^2 \right. \\ & \left. + 2\kappa u_{i,x} u_{i+1,x} - \frac{4}{dt} u_i u_{i+1} \right] dx \dots\dots\dots (97) \end{aligned}$$

内挿関数を次のように採る。

$$u_j = w^{(n)} u_j^n + w^{(n+1)} u_j^{n+1} \dots\dots\dots (98)$$

$$(j = i, i+1)$$

式 (98) を式 (97) に代入して、

$$\frac{\partial \Pi_i^n}{\partial u_{i+1}^m} = 0 \quad (m = n, n+1) \dots\dots\dots (99)$$

なる条件から、次のマトリックス方程式を得る。

$$\left[\frac{\kappa}{(dx)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{dt} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right]$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} u^n \\ u^{n+1} \end{Bmatrix}_{i+1} \left[\frac{\kappa}{(dx)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$- \frac{1}{dt} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^n \\ u^{n+1} \end{Bmatrix}_i = 0 \dots\dots\dots (100)$$

重ね合わせれば (Fig. 10 (b)),

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\kappa}{(dx)^2} \{-1, 2, -1\} + \frac{1}{dt} \left\{ \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right\} \right] \\ & \cdot \begin{Bmatrix} u^{n-1} \\ u^n \\ u^{n+1} \end{Bmatrix}_{i+1} + \left[\frac{\kappa}{(dx)^2} \{-1, 2, -1\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{dt} \left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right\} \right] \begin{Bmatrix} u^{n-1} \\ u^n \\ u^{n+1} \end{Bmatrix}_i = 0 \dots\dots\dots (101) \end{aligned}$$

c) 空間に関する差分要素法

前と同様に式 (95) から出発し、汎関数式 (97) の差分近似を行なうことにする。

内挿関数を次のように採る。

$$u_j = \begin{cases} u_j^n & (0 \leq x \leq \frac{1}{2} dx) \\ u_j^{n+1} & (\frac{1}{2} dx \leq x \leq dx) \end{cases} \dots\dots\dots (102)$$

$$(j = i, i+1)$$

式 (97) の近似式としての差分汎関数 Π_{Di}^n の変分原理から、次のマトリックス方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\kappa}{(dx)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{dt} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u^n \\ u^{n+1} \end{Bmatrix}_{i+1} \\ & + \left[\frac{\kappa}{(dx)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{dt} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u^n \\ u^{n+1} \end{Bmatrix}_i = 0 \dots\dots\dots (103) \end{aligned}$$

重ね合わせれば (Fig. 10 (c)),

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\kappa}{(dx)^2} \{-1, 2, -1\} + \frac{1}{dt} \{0, 2, 0\} \right] \begin{Bmatrix} u^{n-1} \\ u^n \\ u^{n+1} \end{Bmatrix}_{i+1} \\ & + \left[\frac{\kappa}{(dx)^2} \{-1, 2, -1\} + \frac{1}{dt} \{0, -2, 0\} \right] \begin{Bmatrix} u^{n-1} \\ u^n \\ u^{n+1} \end{Bmatrix}_i = 0 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u^{n-1} \\ u^n \\ u^{n+1} \end{cases}_i = 0 \dots\dots\dots (104)$$

本式は、Crank-Nicolson の差分法と一致する。
式 (104) は明らかに式 (101) から lumping の結果として得られることがわかる。両者を平均すると次の式を得る (Fig. 10 (d))。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\kappa}{(\Delta x)^2} \{-1, 2, -1\} + \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{1}{6}, \frac{5}{3}, \frac{1}{6} \right\} \right] \\ & \begin{cases} u^{n-1} \\ u^n \\ u^{n+1} \end{cases}_{i+1} + \left[\frac{\kappa}{(\Delta x)^2} \{-1, 2, -1\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta t} \left\{ -\frac{1}{6}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{6} \right\} \right] \begin{cases} u^{n-1} \\ u^n \\ u^{n+1} \end{cases}_i = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (105)$$

本式は、Gelfand-Lokutsievski の差分法と一致する。この差分法は非定常熱伝導問題において現在の所最も効果的なものとされている。これが、時間軸を含めた完全な有限要素法の展開の結果として、lumped matrix と consistent matrix の平均として誘導されたということは興味深い注10)。

(2) 双曲型一波動方程式

次のような空間 1 次元の単独な波動方程式を考えよう。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (106)$$

この式は書替えれば通常の波動方程式となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (107)$$

式 (106) に対し次の最小二乗変分原理を適用する。

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (u_t + au_x)^2 dt dx \dots\dots\dots (108)$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (-u_{tt} - 2au_{tx} - a^2u_{xx}) dt dx \dots\dots\dots (109)$$

$$\begin{aligned} & + \int_{x_0}^{x_1} (u_t + au_x) \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} dx \\ & + \int_{t_0}^{t_1} a(u_t + au_x) \delta u \Big|_{x_0}^{x_1} dt = 0 \dots\dots\dots (110) \end{aligned}$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} & u_{tt} + 2au_{tx} + a^2u_{xx} = 0 \text{ in } (t_0, t_1), (x_0, x_1) \\ & u = f(x) \text{ on } t = t_0 \\ & u = g(t) \text{ on } x = x_0 \\ & u_t + au_x = 0 \text{ on } t = t_1 \text{ or } x = x_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (111)$$

a) 有限要素法

注 10) 振動問題においては lumped mass と consistent mass の平均が最も正確な結果を与えるということと帰を一にする。

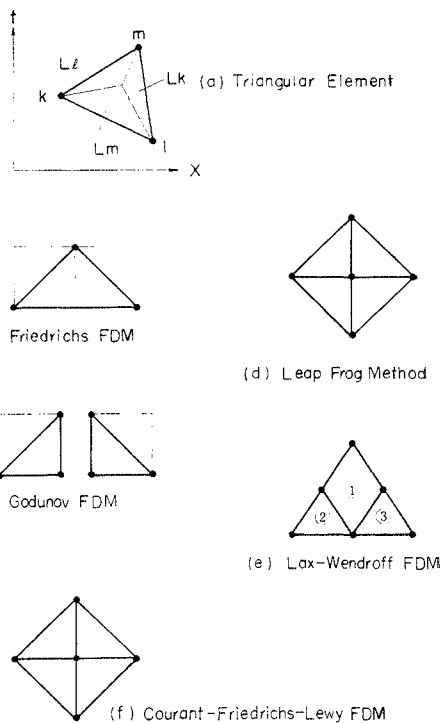


Fig. 11 Elements for Wave Equation.

Fig. 11(a) のような要素を考え、面積座標を $L_j (j=k, l, m)$ とする。

内挿関数を次のように採る。

$$u = L_j u_j = \{L^T\} \{u\} \dots\dots\dots (112)$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} & u_x = b_j u_j = \{b^T\} \{u\} \\ & u_t = c_j u_j = \{c^T\} \{u\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (113)$$

したがって、

$$J = \frac{1}{2} \int_d (\{u^T\} \{c + ab\} \{c + ab\}^T \{u\}) dt dx \dots\dots\dots (114)$$

ここで、

$$\{b\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} t_l - t_m \\ t_m - t_k \\ t_k - t_l \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (115)$$

$$\{c\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} x_m - x_l \\ x_k - x_m \\ x_l - x_k \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (116)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_k \\ u_l \\ u_m \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (117)$$

変分原理より次のマトリックス方程式を得る。

$$\{c + ab\} \{c + ab\}^T \{u\} = 0 \dots\dots\dots (118)$$

$\{c + ab\} \neq 0$ ならば、上式から、

$$\{c + ab\}^T \{u\} = 0 \dots\dots\dots (119)$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} x_m - x_l + a(t_l - t_m) \\ x_k - x_m + a(t_m - t_k) \\ x_l - x_k + a(t_k - t_l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_k \\ u_l \\ u_m \end{pmatrix} = 0 \dots (120)$$

b) 差分法との対応

1) Friedrichs の差分式

Fig. 11 (b) のような要素を採れば、式 (120) から、

$$\{-\Delta x - a \Delta t, -\Delta x + a \Delta t, 2 \Delta x\} \begin{pmatrix} u_i^{n-1} \\ u_i^{n+1} \\ u_{i+1}^n \end{pmatrix} = 0 \dots (121)$$

これより、次の Friedrichs 式を得る。

$$u_{i+1}^n = \frac{1}{2}(u_i^{n-1} + u_i^{n+1}) - \frac{a}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \dots (122)$$

2) Godunov の差分式

Fig. 11 (c) のような要素を採れば、式 (120) から、

$$\{-a \Delta t, -\Delta x + a \Delta t, \Delta x\} \begin{pmatrix} u_i^n \\ u_i^{n+1} \\ u_{i+1}^{n+1} \end{pmatrix} = 0 \dots (123)$$

これより、次の Godunov 式を得る。

$$u_{i+1}^{n+1} = u_i^{n+1} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^{n+1} - u_i^n) \dots (124)$$

3) leap frog method

Fig. 11 (c) のように 4 つの要素を採れば、式 (120) から、それぞれの要素に対して、

$$\left. \begin{aligned} \{ \Delta x, -a \Delta t, -\Delta x + a \Delta t \} \begin{pmatrix} u_{i+1}^n \\ u_i^{n-1} \\ u_i^n \end{pmatrix} &= 0 \\ \{-a \Delta t, -\Delta x, \Delta x + a \Delta t\} \begin{pmatrix} u_i^{n-1} \\ u_{i-1}^n \\ u_i^n \end{pmatrix} &= 0 \\ \{-\Delta x, a \Delta t, \Delta x - a \Delta t\} \begin{pmatrix} u_{i-1}^n \\ u_i^{n+1} \\ u_i^n \end{pmatrix} &= 0 \\ \{\Delta x, a \Delta t, -\Delta x - a \Delta t\} \begin{pmatrix} u_{i+1}^n \\ u_i^{n+1} \\ u_i^n \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (125)$$

重ね合わせれば、

$$\{-a \Delta t, -\Delta x, a \Delta t, \Delta x, 0\} \begin{pmatrix} u_i^{n-1} \\ u_{i-1}^n \\ u_i^{n+1} \\ u_{i+1}^n \\ u_i^n \end{pmatrix} = 0 \dots (126)$$

これより、leap frog method を得る。

$$u_{i+1}^n = u_{i-1}^n - a \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \dots (127)$$

4) Lax-Wendroff の差分式

Fig. 11 (e) のように 3 つの要素を採れば、式 (120) から、要素 ② と ③ に対して Friedrichs 式と同様にし

て、

$$\left. \begin{aligned} u_{i+1/2}^{n-1/2} &= \frac{1}{2}(u_i^{n-1} + u_i^n) - \frac{a}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_i^{n-1}) \\ u_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(u_i^n + u_i^{n+1}) - \frac{a}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^{n+1} - u_i^n) \end{aligned} \right\} \dots (128)$$

また、要素 ① に対して leap frog method と同様に

$$u_{i+1}^n = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n-1/2}) \dots (129)$$

式 (128) を上式に代入すれば、次の Lax-Wendroff 式を得る。

$$\begin{aligned} u_{i+1}^n &= u_i^n - \frac{a}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^{n-1} - u_i^{n-1}) \\ &+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}) \dots (130) \end{aligned}$$

5) Courant-Friedrichs-Lewy の差分式

波動方程式 (107) から、Hamilton 原理を適用する。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Delta} \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dt dx \dots (131)$$

式 (113) を代入して、

$$\Pi = \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{u}^T \} (- \{ \mathbf{c} \} \{ \mathbf{c}^T \} + a^2 \{ \mathbf{b} \} \{ \mathbf{b}^T \}) \{ \mathbf{u} \} \dots (132)$$

これより次のマトリックス方程式を得る。

$$(- \{ \mathbf{c} \} \{ \mathbf{c}^T \} + a^2 \{ \mathbf{b} \} \{ \mathbf{b}^T \}) \{ \mathbf{u} \} = 0 \dots (133)$$

Fig. 11 (f) のような 4 つの要素に対して、マトリックス方程式を導き、重ね合わせを行えば、次のような式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{u_n^{i-1} - 2u_n^i + u_n^{i+1}}{\Delta t^2} - a^2 \frac{u_{n-1}^i - 2u_n^i + u_{n+1}^i}{\Delta x^2} \\ &= 0 \dots (134) \end{aligned}$$

本式は、波動方程式 (107) の差分化そのものであり、このような方程式に差分法が有効であることを初めて示した Courant-Friedrichs-Lewy の方法と同じ結果となった。

5. 離散化手法の体系に関する考察 (結言)

以上いくつかの実例を通じて、差分法と有限要素法が本質的には等価であることを示した。有限要素法において、内挿関数として Heaviside 関数を採用し、差分概念を利用すれば、lumping が行なわれ、また適合性の条件など緩和され得る。さらに、有限要素法は差分法の一種の拡張とも見られ、両者は一つの離散化手法として包含され得る可能性がある。

有限要素法と差分法のそれぞれの特徴を結合することによって、差分要素法を提案したが、その利点は **2. (3) c)** に述べたような点にあると考えられる。

非自己随伴方程式の場合にも、最小二乗変分原理の導入によって、自己随伴方程式の場合とまったく同様のことが展開できることを示し、例として簡単な初期値問題の数値計算から、従来の差分法や Hamilton 原理に基づく有限要素法¹⁹⁾に比較して精度のよい結果を得た。

同様の手法を発展方程式系に適用し、時間軸を含めた有限要素法あるいは差分要素法の特別な場合として、従来の著名な種々の差分法が統一的に得られることを立証した。

本論文では、線形方程式のみしか扱わなかったが、非線形方程式の場合にも線形化を繰返す過程において同様の議論が成り立ち得ると想像される。したがって、若干の推論も交えるならば、一般的な方程式に対し以下のような離散化手法の体系を秩序づけることができるように思う。

すなわち、現在までに種々提案されている離散化手法は関数解析などの数学的基盤の上に、誤差論と物理的諸原理を基本原理としているが、大別して次の5種類がある。

- 1) 従来の変分法—変位・力などの未知量を対象領域全域にわたって連続かつ高階微分可能な関数によって近似する。
- 2) 有限要素法—未知量を要素領域内において連続かつ微分可能な形状関数によって近似する。ただし、隣接要素間の適合性は保証する。
- 3) 差分要素法—未知量を要素領域内において連続あるいは不連続な関数によって近似する。微分可能性ある

いは隣接要素間の適合性は必ずしも保証されないでよい。

4) 差分法—微分方程式の直接近似であるが、区分領域内で一定の関数 (Heaviside 関数) による近似と見ることでもある。

5) 選点法—微分方程式の直接近似であるが、選点において δ -関数を重み関数とする近似と見ることでもできる注11)。

これらの概念はそれぞれ混合されて用いられることも多いし、また結果として類似の表現が得られることもしばしばあるので、必ずしも相互の境界は判然としない。しかしながら、このように分類して認識したほうが便利だと思われるのは次の理由による。第一は、各方法に特有な概念が明確になり、解析対象に応じて上記の概念の中から最も効率のよい手法を選択することができる。第二は、ともすれば変分法による近似解法と差分法・選点法は異なる系統に属するものと考えられ、両者を同じ立場から意識することがなかったように見受けられる。差分要素法は両者の接点として重要な意味がある。

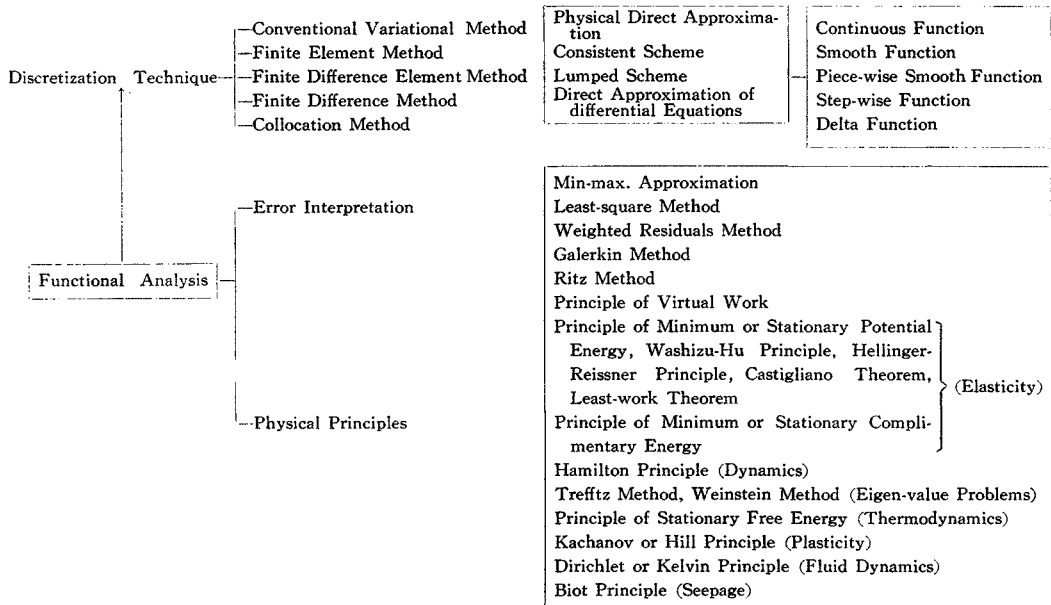
以上の点を要約すれば、表-3 のようになる。

要素法 2) および 3) を従来の方法 1), 4) および 5) と比較した場合、その特徴は次の諸点にある。

イ) 変分原理の適用によって、誤差の最小化またはなんらかの意味で最適化の操作が行なわれる。

ロ) 汎関数の局所化の性質を利用して、不等な任意形状のメッシュに対し直接剛性法によるマトリックス化を容易にしている。

表-3 離散化手法の系統



注 11) 補注参照。

ハ) 境界条件の処理が容易である。

6. 謝 辞

本論を草するに当り、常日頃ご指導と有益な助言を戴いている 東京大学土木工学科 奥村教授、ならびに本研究の機会を与えられた 当社鉄構事業部 前橋梁設計部 大久保部長に深甚なる感謝の意を表します。

【補 注】²⁸⁾

一般に、次の方程式を考える。

$$A\phi - f = 0$$

ここで、 A は領域 $[a, b]$ で定義される作用素であり、 ϕ は未知関数、 f は既知関数である。

有限個の関数 ϕ_i の線形結合によって ϕ を近似すれば、

$$\phi = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

これより、weighted residuals method は、

$$\int_a^b R(x) w_j(x) dx = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

から係数 c_i を決定することである。ただし、 w_j は weighting function であり、 R は残差で次の式で定義される。

$$R(x) \equiv A\left(\sum_{i=1}^N c_i \phi_i\right) - f$$

選点法は、点 $x = x_j$ において、次の関係を満足するように c_j を決定することである。

$$R(x_j) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

したがって、この場合 weighting function は次のようなデルタ関数と考えられる。

$$w_j = \delta(x - x_j)$$

参 考 文 献

- 1) 坂井藤一：有限要素法に関する基礎的考察（第1報），日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集，1973-6
- 2) 坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性，土木学会第28回年次学術講演会講演集，1973-10
- 3) Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. and Topp, L.J.: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, Jour. of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 9, Sept., 1956.
- 4) Clough, R.W.: The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Sept., 1960.
- 5) Oden, J.T.: A General Theory of Finite Elements. I. Topological Considerations, Int. Jour. of Numerical Methods in Engng., Vol. 1, No. 2, 1969.
- 6) Oden, J.T.: Some Aspects of Recent Contributions to the Mathematical Theory of Finite Elements, in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design edited by J.T. Oden, R.W. Clough and Y. Yamamoto, UAH Press, August, 1972.
- 7) 奥村敏恵・坂井藤一：
 - 7-1) 有限要素法と折板構造理論の関連について，日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集，1969-5
 - 7-2) 薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用，土木学会論文報告集，第176号，1970-4
- 8) Gallagher, R.H.: The Status and Outlook for Finite Element Analysis, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, August, 1969.
- 9) Szabo, B.A. and Lee, G.C.: Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method, Inst. Jour. of Numerical Methods in Engng., Vol. 1, No. 3, 1969.
- 10) Leonard, J.W. and Bramlette, T.T.: Finite Element Solutions to Differential Equations, Proc. ASCE, Vol. 96, EM 6, Dec., 1970.
- 11) Hutton, S.C. and Anderson, D.L.: Finite Element Method: A Galerkin Approach, Proc. ASCE, Vol. 97, EM 5, Oct., 1971.
- 12) Gelfand, I.M. and Fomin, S.V.: Calculus of Variations, Prentice-Hall, 1968 (関根智明訳，総合図書，1970)
- 13) Archer, J.S.: Consistent Mass Matrix for Distributed Mass System, Proc. 3rd. Conf. on Electronic Computation, ST 4, August, 1963.
- 14) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
- 15) 吉田 裕：Discrete Triangular Approximation of Moment and Displacement Surfaces for Plate Bending Analysis, in Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design edited by R.H. Gallagher, Y. Yamada and J.T. Oden, UAH Press, 1971.
- 16) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
- 17) 藤野 勉：Variational Principle of Linear Differential Equations, Mitsubishi Technical Bulletin, No. 77, 1972.
- 18) 鷲津久一郎：Some Remarks on Basic Theory for Finite Element Method, in Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, UAH Press, 1971.
- 19) Oden, J.T.: A General Theory of Finite Elements. II. Applications, Inst. Jour. of Numerical Methods in Engng., Vol. 1, No. 3, 1969.
- 20) 菊地文雄・安藤良夫：A Finite Element Method for Initial Value Problems, 3rd Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson, 1971.
- 21) Forsythe, G.E. and Wasow, W. R.: Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, 1960. (藤野精一訳，吉岡書店，1968)
- 22) Tanrikulu, M. and Prager, W.: Consistent Finite Difference Equations for Thin Elastic Disks of Variable Thickness. Int. Jour. of Solids and Structures, Vol. 3, 1967.
- 23) Tottenham, H.: A Direct Numerical Method for the Solution of Field Problems, Int. Jour. of Numerical Methods in Engng., Vol. 2, No. 1, 1970.
- 24) Greenspan, D.: On Approximating Extremals of

Functionals II. Theory and Generalizations related to Boundary Value Problems for Nonlinear Differential Equations, Int. Jour. of Engng. Science, Vol. 5, 1967.

- 25) 坂井藤一：有限要素法に関する基礎的考察（第2報—最小二乗変分原理の導入），1973-7
坂井藤一・河合三四郎：最小二乗変分原理に基づく有限

要素法，土木学会第28回年次学術講演会講演集，1973-10

- 26) Михлин, С.Г.и Смолицкий, Х.Л.: 微分・積分方程式の近似解法，筒井考胤訳，総合図書，1968.
27) 山口昌哉・野木達夫：数値解析の基礎，共立出版，1969.
28) Becker, M.: The Principle and Applications of Variational Methods, MIT Press, 1964.

(1973.6.27・受付)
