

# プレートガーダーの非弾性横倒れ座屈強度

## LATERAL BUCKLING STRENGTH OF INELASTIC PLATE GIRDERS

吉 田 博\*  
By Hiroshi Yoshida

### 1. 緒 言

はりの弾性横倒れ座屈に関する研究は古くからなされ多くの研究成果が発表されてきた。はりの非弾性横倒れ座屈に関しても、最初、Timoshenko<sup>1)</sup> および Bleich<sup>2)</sup> によって、その取扱ひ方が示されて以来、はりの曲げおよび曲げねじり剛性に塑性域の拡がりを考慮した、非弾性横倒れ座屈理論が確立され<sup>3)</sup>、非弾性域でのはりの横倒れ座屈強度は、はりの製作の際導入される残留応力によって、大きく変化することが示され<sup>4)</sup>、この方面の広い研究が行なわれてきた<sup>5)~8)</sup>。

これら、弾性および非弾性横倒れ座屈強度には、はり断面の弱軸まわりの曲げ剛性、St. Venant のねじり剛性、曲げねじり剛性などが関連し、また、比較的ずんぐりとした長いはり、薄肉断面の短いはりでは、これらの剛性の座屈強度に関する割合が異なり、最も簡単なI形断面ばかりについてすら、断面形状と横倒れ座屈強度との直接の関係が明確にされていない。これまでの研究においては、一般的な断面形状と座屈強度に関する研究はわずかで<sup>9)</sup> 特定の断面形についてのみの検討がなされてきた。福本ら<sup>10)</sup>は各種I形ばりの座屈実験結果を整理するのに、縦軸に降伏応力で無次元化した座屈応力を、横軸に断面形状とスパンに関する各種のパラメーターをとり、実験結果のばらつきを検討を行なっている。一般に、弾性解の平方根の逆数を横軸にとると<sup>9)</sup>、同一の残留応力分布形状に対して、断面形状に関係なく同一の座屈曲線を弾性域において得ることができるが、断面形状と座屈強度の直接の関係が不明確であり、また、荷重状態および境界条件によっては、弾性解を陽な形で得ることが困難な場合が多い。

本研究においては、フランジ厚さに比較して、厚さのうすいウェブを有するI形プレートガーダーについて、

ウェブの影響を無視して、弾性および非弾性横倒れ座屈強度を論ずるものであり、座屈強度は、ウェブ高さと同断面の高さの比のみによって表わされることを示し、いくつかの計算例を用いて、この影響を検討しようとするものである。

### 2. 解析方法

#### (1) 仮 定

解析に用いた仮定は次のとおりである。

- 1) プレートガーダー断面は、I形2軸対称断面で、断面の各種剛性および断面諸定数は、ウェブを無視して計算する(図-1(a))。
- 2) 横倒れ座屈に対しては初期変形はなく、横断面形は座屈前後で変化はないものとする。
- 3) 鉛直変位は小さいものとする。
- 4) 応力・ひずみ関係は完全弾塑性体のものを用いる。
- 5) はり断面の残留応力はフランジのみに分布し、圧延成形断面および溶接組立断面の残留応力分布を理想化した図-1(b)のPattern(A)および(c)のPattern(B)のものを用いる。
- 6) はりの非弾性域における曲げ剛性および曲げねじり剛性は弾性域のみを有効とする Tangent Modulus

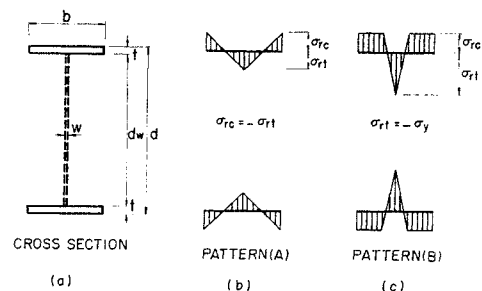


図-1 断面および理想化された残留応力分布

\* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

Theory によるものとし、St. Venant のねじり剛性は全断面を有効とする塑性流れ理論によるものとする。

プレートガーダーの弱軸まわりの曲げ剛性および曲げねじり剛性におよぼすウェブの影響は無視できると考えられ、また、St. Venant のねじり剛性に関しても、通常の断面<sup>10)</sup>では  $d_w w^3/2bt^3=0.06$  程度であるので、ウェブの影響は無視できると考えられる。ここに、 $d_w$  はウェブ高さ、 $w$  はウェブ厚さ、 $b$  はフランジ幅、 $t$  はフランジ厚さである。また、通常プレートガーダーにおいては、両フランジが降伏するとほとんど耐荷力が期待できないことから、1) の仮定は妥当と考えられる。

(2) 非弾性域での断面の剛性および定数

図-2 に示すように、フランジ幅  $b$  を  $n$  等分、フランジ厚さ  $t$  を  $m$  等分し、 $ij$  番目の微小長方形要素の図心の  $x$  座標、 $y$  座標をそれぞれ、 $\xi b$  および  $\eta d$  で表わすことにする。各微小要素の図心のひずみ  $\epsilon$  は曲げによって生じ、図心からの距離に比例するひずみ  $\epsilon_0$ 、断面に一樣に生ずるひずみ  $\epsilon_y$  および残留応力によるひずみ  $\epsilon_r$  の和で、

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_y + \epsilon_r = 2\epsilon_y \frac{\phi}{\phi_y} \eta + \epsilon_0 + \epsilon_r \dots (1)$$

にて与えられる。ここに、 $\epsilon_y$  は降伏ひずみを、 $\phi_y$  は降伏曲率を示している。各微小要素の図心の応力  $\sigma$  は、

$$\sigma = E\epsilon \quad |\epsilon| \leq \epsilon_y \dots (2a)$$

$$\sigma = \sigma_y \quad |\epsilon| \geq \epsilon_y \dots (2b)$$

にて与えられる。ここに、 $E$  は材料の縦弾性係数であり、 $\sigma_y$  は降伏応力である。軸方向のつり合いより、

$$\sum_E \frac{\epsilon}{\epsilon_y} + \sum_P \text{sgn}(\epsilon) = 0 \dots (3)$$

を満足せねばならず、与えられた曲率に対して、式(1)の  $\epsilon_0$  を変化させて、試行錯誤により、各微小要素の応力およびひずみを知ることができる。ただし、 $\sum_E$  は弾性の微小要素のみの和を、 $\sum_P$  は塑性の微小要素の和を示している。また、このときの曲げモーメント  $M$  は、

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{mn(1+\beta+\beta^2)} \left( \sum_E \frac{\epsilon}{\epsilon_y} \eta + \sum_P \text{sgn}(\epsilon) \eta \right) \dots (4)$$

にて与えられる。ここに、 $M_y$  は断面の降伏モーメントであり、 $\beta$  はウェブ高さ  $d_w$  と断面の高さ  $d$  の比、 $\beta = d_w/d$  である。この応力状態に対する  $y$  軸まわりの断

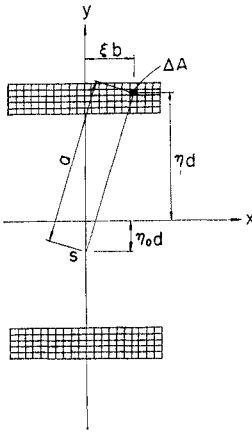


図-2 I形断面のフランジの分割

面 2 次モーメント  $I_y$ 、曲げねじり定数  $I_w$ 、St. Venant のねじり剛性  $GK_T$  と直応力によって生ずるせん断中心まわりのねじりモーメントに関する係数、 $\int \sigma a^2 dA$  の和、 $G\bar{K}_T$  および断面係数  $S$  はそれぞれ、

$$I_y = \mu_{iy} \kappa_{iy} b^3 d \dots (5a)$$

$$I_w = \mu_{iw} \kappa_{iw} b^3 d^3 \dots (5b)$$

$$G\bar{K}_T = GK_T + \int_A \sigma a^2 dA = \mu_{kt} \kappa_{kt} b d^3 \dots (5c)$$

$$S = \mu_s b d^2 \dots (5d)$$

にて与えられる。ここに、 $\mu$  は  $\beta$  のみの関数で、

$$\mu_{iy} = \frac{1}{12} (1-\beta) \dots (6a)$$

$$\mu_{iw} = \frac{1}{192} (1-\beta)(1+\beta)^2 \dots (6b)$$

$$\mu_{kt} = \frac{1}{12} (1-\beta)^3 \dots (6c)$$

$$\mu_s = \frac{1}{6} (1-\beta)^2 \dots (6d)$$

にて与えられる。また、 $\kappa$  は非弾性域での各係数のてい減係数を示し、

$$\kappa_{iy} = \frac{6}{mn} \sum_E \xi^2 \dots (7a)$$

$$\kappa_{iw} = \frac{6}{mn} \frac{\sum_E \xi^2 \sum_{E'} \xi^2}{\sum_E \xi^2} \left( \frac{\sum_E \xi^2 \eta}{\sum_E \xi^2} - \frac{\sum_{E'} \xi^2 \eta}{\sum_{E'} \xi^2} \right)^2 \dots (7b)$$

$$\kappa_{kt} = 1.0 - \frac{6}{mn(1+\beta+\beta^2)} \bar{\nu} \epsilon_y \cdot \left[ \left\{ \sum_E \frac{\epsilon}{\epsilon_y} (\eta - \eta_0)^2 + \sum_P \text{sgn}(\epsilon) (\eta - \eta_0) \right\} + \alpha^2 \left\{ \sum_E \frac{\epsilon}{\epsilon_y} \xi^2 + \sum_P \text{sgn}(\epsilon) \xi^2 \right\} \right] = 1.0 - \frac{6}{1+\beta+\beta^2} \bar{\nu} \epsilon_y (S_{g1} + \alpha^2 S_{g2}) \dots (7c)$$

にて与えられる。ここに、 $\sum_E$  は上フランジの弾性の微小要素の和を、 $\sum_{E'}$  は下フランジの弾性要素の和を示す。 $\bar{\nu}$  は縦弾性係数とせん断弾性係数の比、 $\bar{\nu} = E/G$  を、また  $\alpha$  はフランジ幅  $b$  と断面の高さ  $d$  との比、 $\alpha = b/d$  を示している。また、 $\eta_0 d$  はせん断中心の  $y$  座標で、

$$\eta_0 = \frac{\sum_E \xi^2 \eta}{\sum_E \xi^2} \dots (8)$$

にて与えられる。ただし、図心より上方が正である。

これらの計算の詳細を付録に示す。

図-3~6 は 3 つの残留応力の大きさ、 $\sigma_{rc} = 0.1 \sigma_y$ 、 $\sigma_{rc} = 0.3 \sigma_y$  および  $\sigma_{rc} = 0.5 \sigma_y$  に対し、 $1/\beta = 1.03, 1.05$  および  $1.07$  の 3 つのケースについて、 $\kappa_{iy}$ 、 $\kappa_{iw}$  および式(7c)の第2項の  $S_{g1}$  および  $S_{g2}$  を縦軸に降伏曲げモーメントで無次元化した曲げモーメントを用いて示したものである。図からわかるように、これらの値は  $\beta$  に

はほとんど関係しないことが明らかである。

(3) 解析方法

解析には文献11)に示されている伝達マトリックスを無次元化して用いる。無次元化された状態量ベクトルお

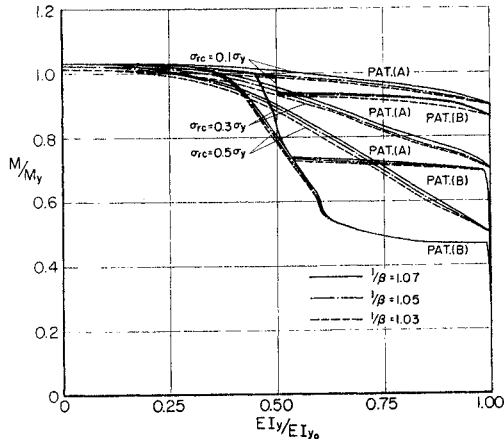


図-3  $M/M_y$  と  $\kappa_{iy}$  の関係

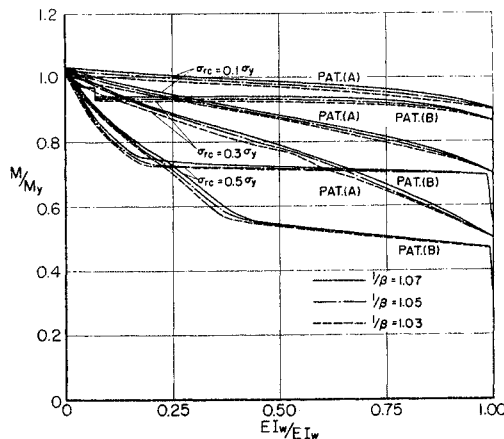


図-4  $M/M_y$  と  $\kappa_{iw}$  の関係

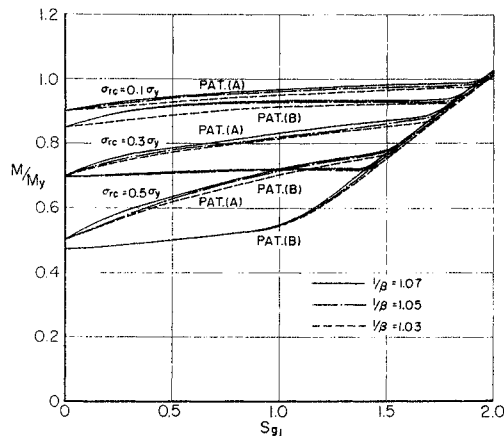


図-5  $M/M_y$  と  $S_{\theta 1}$  の関係

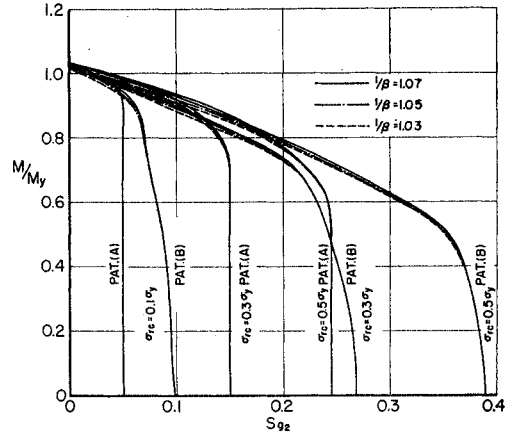


図-6  $M/M_y$  と  $S_{\theta 2}$  の関係

よび格間伝達マトリックスを付録に示す。無次元化された格間伝達マトリックスは  $\beta$  のみの関数となり、 $\alpha$  が関係するのは、St. Venant の等価ねじり剛性  $GK_T$  のみである。

計算に当っては、はりを微小要素に分割して、各分割要素内では曲げモーメントは一定であるととし、降伏曲げモーメントで無次元化された曲げモーメントに対する断面の定数のてい減係数  $\kappa$  を用い、各分割要素の格間伝達マトリックス  $F$  を左端より右端へと前掛して、左端と右端の状態量ベクトルを結びつけることができる。この伝達マトリックスに左端と右端の境界マトリックス  $R$  および  $R'$  を用いて、座屈条件式を次式のように得ることができる<sup>11)</sup>。

$$|R'F_n F_{n-1} \dots F_2 F_1 R| = 0 \dots \dots \dots (9)$$

式(9)を満足する曲げモーメントが座屈曲げモーメントであり、試行錯誤によって求めることができる。

3. 計算例および考察

以下の計算においては、通常のプレートガーダーにおいては、 $1/\beta = 1.03 \sim 1.07$  の範囲であると考えるので、 $1/\beta$  の値として、1.03, 1.05 および 1.07 の3種類を用いることにする。

(1) 一様曲げモーメントを受ける場合

一様曲げを受けるプレートガーダーの横倒れ座屈強度に影響をおよぼす因子として、フランジ幅と断面の高さとの比、 $\alpha = b/d$ 、残留応力の大きさおよび降伏ひずみの大きさが考えられる。

前述のとおり格間伝達マトリックスには、 $\alpha$  は陽に現われていないが、式(7c)にて与えられる St. Venant の等価ねじり剛性に関する係数に  $\alpha$  が関係している。しかし、一般のプレートガーダーにおける  $\alpha$  の値は、0.1

~0.5 程度と考えられ、また、 $\alpha$  に関する  $S_{g2}$  は  $S_{g1}$  に比較して数分の 1 であり、特に、非弾性域ではその比は減少するので、 $\alpha$  の影響は、ほぼ無視できるものと考えられる。試みに、 $\sigma_{rc}=0.3\sigma_y$ 、 $\epsilon_y=0.0012$  として、 $\alpha=0.1$  と  $\alpha=0.5$  の 2 つの場合を計算してみた。その結果、両者の差は弾性域で 1% 以下であり、非弾性域ではさらに小さいことがわかった。したがって、以後の計算においては、 $\alpha=0.3$  を用いることにした。

図-7 は 3 種類の残留応力の大きさ、 $\sigma_{rc}=0.1\sigma_y$ 、 $0.3\sigma_y$  および  $0.5\sigma_y$  に対して計算を行なった結果を縦軸に  $M/M_y$  を、横軸に  $L/b$  をとって示している。 $\epsilon_y=0.0012$  を用い、両端で、横曲げおよびねじりに対して単純支持となっている。この図より、プレートガーダーの横倒れ座屈には  $\beta$  が非常に大きく影響することがわかる。この影響は弾性域で最も大きく、非弾性域ではしだいに小さくなっていく。座屈曲線は、残留応力の Pattern (A) に対しては、 $\sigma_{rc}=0.3\sigma_y$  の場合、非弾性域ではほぼ直線となるが、 $\sigma_{rc}=0.1\sigma_y$  では上に凸、 $\sigma_{rc}=0.5\sigma_y$  では下に凸の曲線となる。Pattern (B) に対しては、 $\sigma_{rc}=0.1\sigma_y$  では、 $M/M_y=0.9$ 、 $\sigma_{rc}=0.3\sigma_y$  では  $M/M_y=0.7$ 、 $\sigma_{rc}=0.5\sigma_y$  では  $M/M_y=0.5$  付近で座屈長さは急激に減少し、この間では  $\beta$  の影響が減少するが、座屈荷重の増加とともに再び影響が顕著となる。

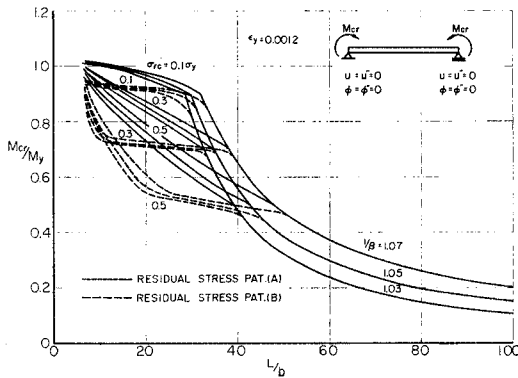


図-7 残留応力の大きさと横倒れ座屈強度

通常用いられるプレートガーダーの横構、対傾構などによる固定点間距離程度をスパンとするはりでは、長さが比較的短く、St. Venant のねじり剛性を無視しても比較的横倒れ座屈強度はよく一致するといわれている<sup>12), 13)</sup>。この点を検討するため、弾性域および非弾性域で比較したのが図-8 である。 $\sigma_{rc}=0.3\sigma_y$ 、 $\epsilon_y=0.0012$  とし、一様曲げを受ける場合について、本理論によるものを太い実線 (Pattern (A)) および鎖線 (Pattern (B)) で、St. Venant のねじり剛性を無視したものを、それぞれ細い実線および鎖線で示してある。St. Venant のねじり剛性を無視したものは、比較的長いスパンでは  $\beta$  に

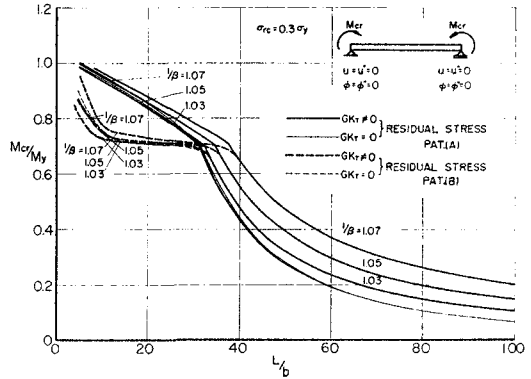


図-8 横倒れ座屈強度におよぼす St. Venant のねじり剛性

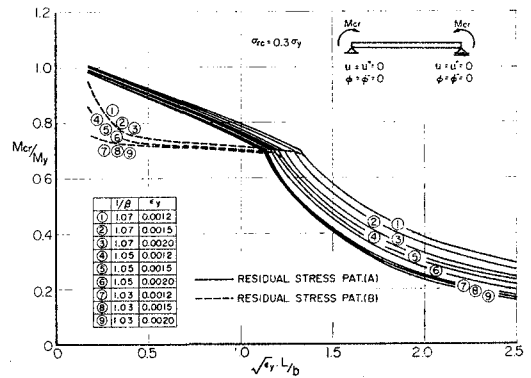


図-9 降伏ひずみの大きさと横倒れ座屈強度

無関係となるが、短いスパンの非弾性域では  $\beta$  によりわずかに差異が認められる。 $1/\beta=1.03$  では、St. Venant のねじり剛性を無視したものと考慮したものの差は少ないが、 $1/\beta=1.07$  では St. Venant のねじり剛性を無視した場合、かなり安全側になることがわかる。

図-9 は  $\sigma_{rc}=0.3\sigma_y$  とした場合の 3 種類の降伏ひずみ、 $\epsilon_y=0.0012$ 、 $0.0015$  および  $0.0020$  についての計算結果を縦軸に  $M/M_y$  を、横軸に  $\sqrt{\epsilon_y} \cdot L/b$  をとって示したものである。曲げねじり剛性に比較して St. Venant のねじり剛性が無視できる比較的短いスパンにおいては、横軸に  $\sqrt{\epsilon_y} \cdot L/b$  をとって座屈曲線を図示すると異なった  $\epsilon_y$  の値に対して、座屈曲線は重なる。弾性域においては、 $1/\beta=1.07$  の場合かなりの差が認められるが、 $1/\beta=1.03$  に対しては、ほぼ重なると考えられる。非弾性域においては、残留応力分布が Pattern (A) の場合、 $\epsilon_y$  の影響は弾性域よりさらに小さくなるが、その割合はやはり  $\beta$  によって異なっている。Pattern (B) に関しては、 $M/M_y$  が 0.7 付近では  $\epsilon_y$  および  $\beta$  の影響はほとんど見られない。これらのことは図-8 から理解できる。

図-10 は文献 9) に見られるはりおよびプレートガ

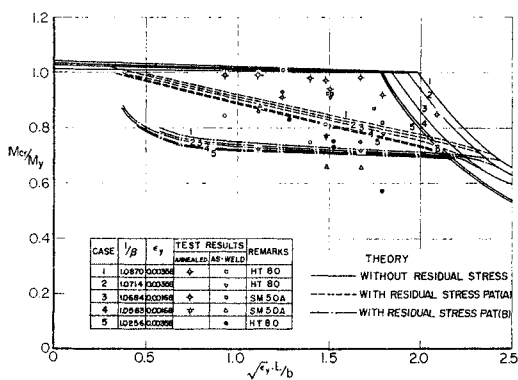


図-10 理論値と実験結果

ーダーの座屈実験結果をプロットしたもので、 $\sigma_{rc} = 0.3 \sigma_y$  とし、Pattern (A) の理論計算値を鎖線で、Pattern (B) のものを一点鎖線で、また、残留応力のないものを実線で示してある。境界条件は、実験が横曲げおよびねじりに対して両端固定で行なわれているので、理論計算も同様のものを用いた。

実験は5種類の $\beta$ の値に対して行なわれており、実験値はほぼ  $1/\beta$  の大きい値に対して大きい座屈値を示していることが図から理解される。焼なまししたはりの実験値は、残留応力を有しない理論値にかなり近い値を示しているが、焼なまししないはりは、残留応力の Pattern (B) よりむしろ Pattern (A) の理論値に近い値を示している。

(2) 曲げモーメント勾配を有する場合

図-11 は  $\sigma_{rc} = 0.3 \sigma_y$ 、 $\epsilon_y = 0.0012$  とした場合の不等曲げを両端でうける場合の横倒れ座屈曲線を示している。一端の作用曲げモーメントが他端の  $q$  倍とし、 $q$  を 1.0, 0.5, 0, -0.5, -1.0 の5通りについて計算を行なった。 $q$  が 1.0 より小さくなると曲げモーメント勾配が急になることを示しており、座屈荷重が上昇する。図からもわかるように、曲げモーメント勾配が急になるにしたがって、 $\beta$  の影響が大きくなることがわかるが、 $q = -1.0$  では再び減少していることがわかる。

(3) 各種の荷重を受ける場合

図-12 は3種類の荷重に対する座屈曲線を示している。 $\sigma_{rc} = 0.3 \sigma_y$ 、 $\epsilon_y = 0.0012$  とし、通常の単純ばりの載荷状態に対し、最も大きい座屈モーメントを与える一点集中荷重、最も小さい座屈モーメントを与える一様曲げおよびその中間の座屈荷重を与える等分布荷重の3種類の曲げモーメント分布についての座屈曲線を示している。これらの曲げモーメント分布の相違に対する $\beta$ の影響はほとんど見られない。

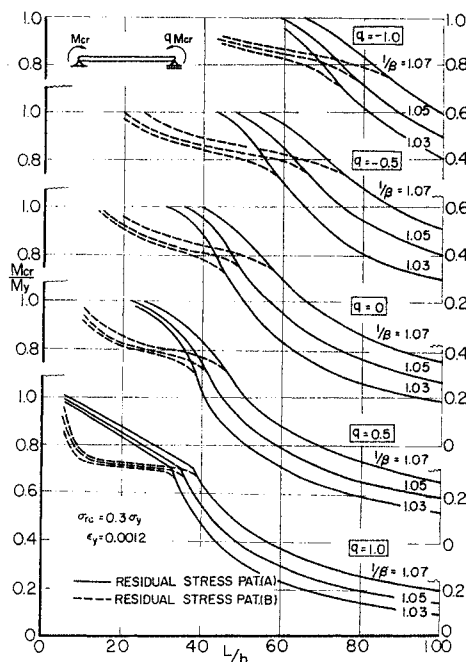


図-11 モーメント勾配と横倒れ座屈強度

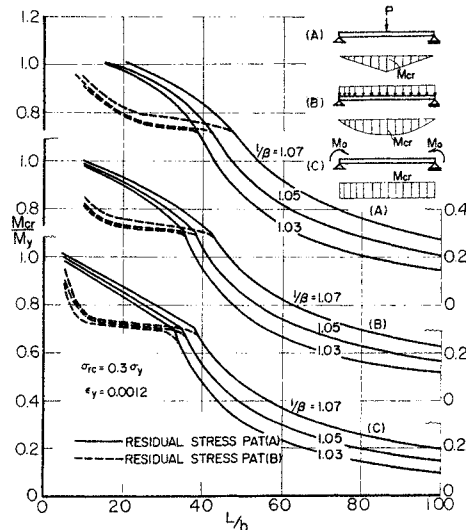


図-12 荷重の種類と横倒れ座屈強度

4. 結 論

本研究においては、I形プレートガーダーの弾性および非弾性横倒れ座屈強度を断面のウェブを無視することにより、ウェブ高さと同断面の高さの比 $\beta$ のみをパラメーターとして表わすことができることを示し、いくつかの計算例を示した。得られた主な結果は次のとおりである。

- (1) 非弾性域における断面の弱軸まわりの断面2次

モーメント，曲げねじり定数は  $\beta$  のみの関数であり，St. Venant の等価ねじり剛性は， $\alpha$  と  $\beta$  の関数であるが，通常のプレートガーダーでは， $\alpha$  の影響は無視できる。

(2) あらゆる境界条件および荷重条件に対する横倒れ座屈強度は  $\beta$  と  $\epsilon_y$  のみの関数で表わすことができる。

(3)  $\beta$  の相違による座屈強度の変化は，非弾性域においてはスパンの減少とともに小さくなる。

(4) St. Venant のねじり剛性を無視した座屈強度は， $1/\beta$  の大きい値に対しては安全側にある。

なお，本研究においては，名古屋大学大型計算機センター FACOM 230-60 および金沢大学計算機センター FACOM 230-35 を使用した。

#### 用いた記号

- $a$  : セン断中心からフランジ内の微小要素の図心までの距離
- $b$  : フランジ幅
- $d$  : I形断面の高さ
- $d_w$  : ウェブの高さ
- $E$  : 縦弾性係数
- $EI_w, (EI_{w0})$  : 曲げねじり剛性 (弾性域での曲げねじり剛性)
- $EI_y, (EI_{y0})$  : 弱軸まわりの曲げ剛性 (弾性域での曲げ剛性)
- $F$  : 格間伝達マトリックス
- $G$  : セン断弾性係数
- $GK_T, (G\bar{K}_T)$  : St. Venant のねじり剛性 (St. Venant の等価ねじり剛性)
- $L$  : スパン長
- $l$  : 格間長
- $\bar{l}$  :  $l/b$
- $M$  : 作用曲げモーメント
- $M_{cr}$  : 座屈曲げモーメント
- $M_0$  : はり要素の曲げモーメント
- $M_y$  : 残留応力のないはりの弾性限界曲げモーメント (降伏モーメント)
- $m, n$  : フランジ幅，フランジ厚の分割数
- $m_0$  :  $M_0/M_y$
- $q$  : 右端に作用する曲げモーメントの左端に作用する曲げモーメントに対する比
- $R, (R')$  : 左端 (右端) の境界マトリックス
- $S$  : 断面係数
- $t$  : フランジ厚さ
- $w$  : ウェブ厚さ
- $\alpha$  : フランジ幅と断面の高さの比， $b/d$
- $\beta$  : ウェブ高さとの断面の高さの比， $d_w/d$

$4A$  : フランジ内微小要素の断面積

$\epsilon$  : フランジ内微小要素の図心のひずみ

$\epsilon_\phi$  : フランジ内微小要素の図心の曲率によるひずみ

$\epsilon_0$  : 断面内に一様に生ずるひずみ

$\epsilon_r$  : フランジ内微小要素の図心の残留応力によるひずみ

$\epsilon_y$  : 降伏ひずみ

$\eta d$  : フランジ内微小要素の図心の  $y$  座標

$\eta_0 d$  : セン断中心の  $y$  座標

$\kappa_{kt}, \kappa_{iw}, \kappa_{iy}$  : St. Venant の等価ねじり剛性，曲げねじり剛性，弱軸まわりの曲げ剛性のてい減係数

$\mu_{kt}, \mu_s, \mu_{iy}, \mu_{iw}$  : St. Venant のねじり剛性，断面係数，弱軸まわりの断面 2 次モーメント，曲げねじり定数に関する係数

$\bar{\nu}$  : 縦弾性係数とせん断弾性係数の比， $E/G$

$\epsilon b$  : フランジ内微小要素の  $x$  座標

$\sigma$  : フランジ内微小要素の図心の応力

$\sigma_{rc}, \sigma_{rt}$  : 残留圧縮応力，残留引張応力

$\sigma_y$  : 降伏応力

$\phi$  : はりの曲率

$\phi_y$  : 降伏モーメントに対応するはりの曲率

#### 参考文献

- 1) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1961.
- 2) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
- 3) Baker, J., Horne, M.R. and Heyman, J. : The Steel Skeleton, Vol. 2, Plastic Behaviour and Design, Cambridge Univ. Press, 1965.
- 4) Galambos, T.V. : Inelastic Lateral Buckling of Beams, Proc. of ASCE, Vol. 89, No. ST 5, pp. 217-242, Oct., 1963.
- 5) Massey, C. and Pitman, F.S. : Inelastic Lateral Stability Under a Moment Gradient, Proc. of ASCE, Vol. 92, No. EM 2, pp. 101-111, April, 1966.
- 6) Lay, M.G. and Galambos, T.V. : Inelastic Beams Under Moment Gradient, Proc. of ASCE, Vol. 93, No. ST 1, pp. 381-398, Feb., 1967.
- 7) Nethercot, D.A. : Factors Affecting the Buckling Stability of Partially Plastic Beams, Instn of Civil Engrs, Proc., Part 2, Vol. 53, pp. 285-304, Sept., 1972.
- 8) Trahair, N.S. and Kitipornchai, S. : Buckling of Inelastic I-Beams Under Uniform Moment, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. ST 11, pp. 2551-2566, Nov., 1972.
- 9) 福本 啓士・藤原 稔・渡辺 信夫 : 溶接 I 形部材の横倒れ座屈に関する実験的研究，土木学会論文報告集，No. 189, pp. 35~51, 1971 年 5 月
- 10) 建設省土木研究所 : 道路橋標準設計図集 3, 日本道路協会, 1963 年
- 11) 吉田 博・井本 芳宏 : 拘束をうけるはりの弾性および非弾性横倒れ座屈解析，土木学会論文報告集，No. 208, pp. 1~12, 1972 年 12 月

- 12) 小松定夫：道路橋示方書（1971年）座屈関連規定の論拠（上），橋梁と基礎，Vol. 6, No. 6, pp. 1~9, 1972年6月  
 13) 福本啓士：プレート・ガーダーの曲げ圧縮座屈強度—道路橋示方書許容曲げ圧縮応力度規定の背景—，橋梁と基礎，Vol. 6, No. 8, pp. 1~6, 1972年8月

【付 録】

（1）非弾性域での断面の剛性および定数の決定は図-2を参照して，次のように行なうことができる。

最初，降伏曲率で無次元化された曲率  $\phi/\phi_y$  を与えると，任意の分割要素の圆心のひずみは，

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_y} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_y} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_y} + 2 \frac{\phi}{\phi_y} \cdot \eta$$

にて与えられる。 $|\epsilon/\epsilon_y| \leq 1.0$  より，分割要素が降伏しているかどうか判定され，軸方向力のつり合い式，

$$P = \sum \sigma \Delta A = \sum \sigma \frac{1-\beta}{2nm} bd \\ = \frac{1-\beta}{2nm} bd \left( \sum_E E \epsilon + \sum_P \sigma_y \cdot \text{sgn}(\epsilon) \right)$$

より，

$$\frac{P}{P_y} = \frac{1}{2nm} \left( \sum_E \frac{\epsilon}{\epsilon_y} + \sum_P \text{sgn}(\epsilon) \right)$$

となり，このつり合い式が満足されるように， $\epsilon_0/\epsilon_y$  を決定する。これより，曲げモーメントは，

$$M = \sum \sigma y \Delta A = \frac{1-\beta}{2nm} bd^2 \left( \sum_E E \epsilon \eta + \sum_P \sigma_y \text{sgn}(\epsilon) \eta \right)$$

より，

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{nm(1+\beta+\beta^2)} \left( \sum_E \frac{\epsilon}{\epsilon_y} \eta + \sum_P \text{sgn}(\epsilon) \eta \right)$$

を得る。y軸まわりの断面2次モーメントは，

$$I_{yu} = \sum x^2 \Delta A = \frac{1-\beta}{2nm} b^2 d \sum_{Eu} \xi^2 \quad (\text{上フランジ})$$

$$I_{yl} = \sum x^2 \Delta A = \frac{1-\beta}{2nm} b^2 d \sum_{El} \xi^2 \quad (\text{下フランジ})$$

より，

$$\kappa_y = \frac{EI_y}{EI_{y0}} = \frac{I_{yu} + I_{yl}}{I_{y0}} = \frac{6}{nm} \sum_E \xi^2$$

となるせん断中心のy座標は，

$$\tau_0 c l = \frac{\sum x^2 \eta d \Delta A}{\sum x^2 \Delta A}$$

より，

$$\eta_0 = \frac{\sum \xi^2 \eta}{\sum \xi^2}$$

となる。また，曲げねじれ定数は，

$$I_w = \frac{I_{yu} I_{yl}}{I_{yu} + I_{yl}} \left( \frac{\sum_{Eu} x^2 y \Delta A}{\sum_{Eu} x^2 \Delta A} - \frac{\sum_{El} x^2 y \Delta A}{\sum_{El} x^2 \Delta A} \right)^2$$

より，

$$\kappa_{iw} = \frac{EI_w}{EI_{w0}} = \frac{6}{nm} \frac{\sum_E \xi^2 \sum_{El} \xi^2}{\sum_E \xi^2} \\ \cdot \left( \frac{\sum_E \xi^2 \eta}{\sum_E \xi^2} - \frac{\sum_{El} \xi^2 \eta}{\sum_{El} \xi^2} \right)^2$$

となる。また，St. Venantの等価ねじり剛性は，

$$G\bar{K}_T = GK_T - \sum \sigma a^2 \Delta A \\ = GK_T - \left[ \sum_E E \epsilon \{ (\eta - \eta_0)^2 d^2 + \xi^2 b^2 \} \Delta A \right. \\ \left. + \sum_P \sigma_y \cdot \text{sgn}(\epsilon) \{ (\eta - \eta_0)^2 d^2 + \xi^2 b^2 \} \Delta A \right]$$

より，

$$\kappa_{kl} = \frac{G\bar{K}_T}{GK_T} = 1.0 - \frac{6}{nm(1+\beta+\beta^2)} \bar{\nu} \epsilon_y \\ \cdot \left[ \sum_E \frac{\epsilon}{\epsilon_y} (\eta - \eta_0)^2 + \sum_P \text{sgn}(\epsilon) \cdot (\eta - \eta_0)^2 \right] \\ + \alpha^2 \left[ \sum_E \frac{\epsilon}{\epsilon_y} \xi^2 + \sum_P \text{sgn}(\epsilon) \cdot \xi^2 \right]$$

を得る。

（2）無次元化された状態量ベクトルを，文献13)の記号をそのまま用いて，

$$V = \{ u/b \quad \theta \quad \phi/\alpha \quad \rho b/\alpha \quad S/\alpha \sigma_y d^2 \quad M_y/\alpha^2 \sigma_y d^3 \\ M_z/\alpha \sigma_y d^3 \quad M_w/\alpha^2 \sigma_y d^4 \}$$

のように表示すると，無次元化された格間伝達マトリクス， $F$ ，の各要素は，次のように表示される。

$$(1, 1) = 1.0$$

$$(1, 2) = \bar{l}$$

$$(1, 4) = m_0 \frac{\epsilon_y}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iy} \kappa_{iw}} \frac{\mu_s \mu_{kt}}{\mu_{iy} \mu_{iw}} \frac{1}{A_2^2} \left( \bar{l} - \frac{\bar{D}_6}{A_1 A_2} \right)$$

$$(1, 5) = -\epsilon_y \frac{1}{\kappa_{iy}} \frac{1}{\mu_{iy}} \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\bar{D}_9}{A_1 A_2} + \bar{l} A_3 \right)$$

$$(1, 6) = -\epsilon_y \frac{1}{\kappa_{iy}} \frac{1}{\mu_{iy}} \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\bar{D}_8}{A_1} + \bar{A}_3 \right)$$

$$(1, 7) = m_0 \epsilon_y^2 \frac{1}{\kappa_{iy} \kappa_{iw}} \frac{\mu_s}{\mu_{iy} \mu_{iw}} \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\bar{D}_6}{A_1 A_2} - \bar{l} \right)$$

$$(1, 8) = m_0 \epsilon_y^2 \frac{1}{\kappa_{iy} \kappa_{iw}} \frac{\mu_s}{\mu_{iy} \mu_{iw}} \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\bar{D}_5}{A_1} - 1 \right)$$

$$(2, 2) = 1.0$$

$$(2, 4) = m_0 \frac{\epsilon_y}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iy} \kappa_{iw}} \frac{\mu_s \mu_{kt}}{\mu_{iy} \mu_{iw}} \frac{1}{A_2^2} \left( 1 - \frac{\bar{D}_5}{A_1} \right)$$

$$(2, 5) = -\epsilon_y \frac{1}{\kappa_{iy}} \frac{1}{\mu_{iy}} \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\bar{D}_8}{A_1} + \bar{A}_3 \right)$$

$$(2, 6) = -\epsilon_y \frac{1}{\kappa_{iy}} \frac{1}{\mu_{iy}} \frac{\bar{D}_6}{A_1 A_2}$$

$$(2, 7) = m_0 \epsilon_y \frac{1}{\kappa_{iy} \kappa_{iw}} \frac{\mu_s}{\mu_{iy} \mu_{iw}} \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\bar{D}_5}{A_1} - 1 \right)$$

$$(2, 8) = m_0 \epsilon_y^2 \frac{1}{\kappa_{iy} \kappa_{iw}} \frac{\mu_s}{\mu_{iy} \mu_{iw}} \frac{\bar{D}_3}{A_1 A_2}$$

$$(3, 3) = 1.0$$

$$(3, 4) = \bar{l} + \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_3}{A_1 A_2}$$

$$(3, 5) = \frac{1}{m_0} \frac{1}{\mu_s} \left( \frac{\bar{D}_6}{A_1 A_2} - \bar{l} \right)$$

$$(3, 6) = \frac{1}{m_0} \frac{1}{\mu_s} \left( \frac{\bar{D}_5}{\bar{A}_1} - 1 \right)$$

$$(3, 7) = -\varepsilon_y \frac{1}{\kappa_{iw}} \frac{1}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_3}{\bar{A}_1 \bar{A}_2}$$

$$(3, 8) = \varepsilon_y \frac{1}{\kappa_{iw}} \frac{1}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1}$$

$$(4, 4) = 1 - \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1}$$

$$(4, 5) = \frac{1}{m_0} \frac{1}{\mu_s} \left( \frac{\bar{D}_5}{\bar{A}_1} - 1 \right)$$

$$(4, 6) = \frac{1}{m_0} \frac{1}{\mu_s} \frac{\bar{A}_2 \bar{D}_3}{\bar{A}_1}$$

$$(4, 7) = \varepsilon_y \frac{1}{\kappa_{iw}} \frac{1}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1}$$

$$(4, 8) = -\varepsilon_y \frac{1}{\kappa_{iw}} \frac{1}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_2}{\bar{A}_1}$$

$$(5, 4) = -m_0 \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_s \mu_{kt}}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1}$$

$$(5, 5) = \frac{\bar{D}_5}{\bar{A}_1}$$

$$(5, 6) = \frac{\bar{A}_2 \bar{D}_3}{\bar{A}_1}$$

$$(5, 7) = m_0 \varepsilon_y \frac{1}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_s}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1}$$

$$(5, 8) = -m_0 \varepsilon_y \frac{1}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_s}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_2}{\bar{A}_1}$$

$$(6, 4) = m_0 \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_s \mu_{kt}}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_3}{\bar{A}_1 \bar{A}_2}$$

$$(6, 5) = \frac{\bar{D}_5}{\bar{A}_1 \bar{A}_2}$$

$$(6, 6) = \frac{\bar{D}_5}{\bar{A}_1}$$

$$(6, 7) = -m_0 \varepsilon_y \frac{1}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_s}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_3}{\bar{A}_1 \bar{A}_2}$$

$$(6, 8) = m_0 \varepsilon_y \frac{1}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_s}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1}$$

$$(7, 4) = \frac{1}{\varepsilon_y} \kappa_{kt} \mu_{kt} \cdot \left( \frac{1}{\bar{\nu}} - \frac{1}{\bar{\nu}^2} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1} - \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\bar{D}_4}{\bar{A}_1} \right)$$

$$(7, 5) = \frac{1}{m_0} \frac{1}{\varepsilon_y} \frac{1}{\mu_s} \left\{ \frac{1}{\bar{\nu}} \kappa_{kt} \mu_{kt} \left( \frac{\bar{D}_5}{\bar{A}_1} - 1 \right) + \kappa_{iw} \mu_{iw} \frac{\bar{A}_2^2 \bar{D}_1}{\bar{A}_1} \right\}$$

$$(7, 6) = \frac{1}{m_0} \frac{1}{\varepsilon_y} \frac{1}{\mu_s} \left\{ \frac{1}{\bar{\nu}} \kappa_{kt} \mu_{kt} \bar{D}_3 \right.$$

$$\left. - \kappa_{iw} \mu_{iw} \bar{A}_2 \bar{D}_2 \right\} \frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}$$

$$(7, 7) = \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1} + \frac{\bar{D}_4}{\bar{A}_1}$$

$$(7, 8) = -\frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} \frac{\bar{D}_2}{\bar{A}_1} + \frac{\bar{D}_7}{\bar{A}_1}$$

$$(8, 4) = -\frac{1}{\varepsilon_y} \frac{1}{\bar{\nu}} \kappa_{kt} \mu_{kt} \frac{\bar{D}_2}{\bar{A}_1}$$

$$(8, 5) = -\frac{1}{m_0} \frac{1}{\varepsilon_y} \kappa_{iw} \frac{\mu_{iw}}{\mu_s} \frac{\bar{A}_2 \bar{D}_3}{\bar{A}_1}$$

$$(8, 6) = \frac{1}{m_0} \frac{1}{\varepsilon_y} \kappa_{iw} \frac{\mu_{iw}}{\mu_s} \frac{\bar{A}_2^2 \bar{D}_1}{\bar{A}_1}$$

$$(8, 7) = \frac{\bar{D}_2}{\bar{A}_1}$$

$$(8, 8) = \frac{\bar{D}_4}{\bar{A}_1}$$

ただし、上記以外の要素は0である。また、ここに、  
 $\bar{l} = l/b$ ,  $m_0 = M_0/M_y$ ,  $\bar{\nu} = E/G$ ,  $\varepsilon_y = \sigma_y/E$

であり、

$$\bar{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} + \sqrt{\frac{1}{\bar{\nu}^2} \left( \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \right)^2 \left( \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} \right)^2} + 4 m_0^2 \varepsilon_y^2 \frac{1}{\kappa_{iy} \kappa_{iw}} \frac{\mu_s^2}{\mu_{iy} \mu_{iw}} \right\}}$$

$$\bar{\alpha}_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} + \sqrt{\frac{1}{\bar{\nu}^2} \left( \frac{\kappa_{kt}}{\kappa_{iw}} \right)^2 \left( \frac{\mu_{kt}}{\mu_{iw}} \right)^2} + 4 m_0^2 \varepsilon_y^2 \frac{1}{\kappa_{iy} \kappa_{iw}} \frac{\mu_s^2}{\mu_{iy} \mu_{iw}} \right\}}$$

$$\bar{A}_1 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_2^2$$

$$\bar{A}_2 = \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{A}_3 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_2^2$$

$$\bar{D}_1 = -\cosh \bar{l} \bar{\alpha}_1 + \cos \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{D}_2 = \bar{\alpha}_1 \sinh \bar{l} \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \sin \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{D}_3 = \bar{\alpha}_2 \sinh \bar{l} \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1 \sin \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{D}_4 = \bar{\alpha}_1^2 \cosh \bar{l} \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2^2 \cos \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{D}_5 = \bar{\alpha}_2^2 \cosh \bar{l} \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_1^2 \cos \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{D}_6 = \bar{\alpha}_2^3 \sinh \bar{l} \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_1^3 \sin \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{D}_7 = \bar{\alpha}_1^3 \sinh \bar{l} \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2^3 \sin \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{D}_8 = \bar{\alpha}_2^4 \cosh \bar{l} \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1^4 \cos \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{D}_9 = \bar{\alpha}_2^5 \sinh \bar{l} \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1^5 \sin \bar{l} \bar{\alpha}_2$$

である。

(1973.4.13・受付)