

## しない定規による道路線形設計の検討

## SOME DISCUSSION OF DESIGN OF ALIGNMENT BY SPLINE

薄 慶 治\*

By Keiji Susuki

## 1. 緒 言

道路を新設しようとする場合、まず、その平面線形設計が先行するが、この段階の作業の精粗ができあがる道路の成果を左右する大きな要素である。現在、自動車専用道路の平面線形設計<sup>1)</sup>は広い土木技術を背景にして、相当の経験と習熟をもとにした試行修正による円弧とクロノイド曲線の組み合わせによっている。すなわち、円弧の中心の位置とその半径、クロノイド曲線の起点（または終点）の位置とそのパラメーターという無数の選択の自由度の中から、路線としての最適の組み合わせが求められている。

本研究では、一つの簡単な物理現象である“しない定規”を適当にたわませるときできる一つの滑らかな曲線いわゆる弾性曲線をそのまま求めようとする線形とする設計の手法を考えてみたものである。まず、このような曲線の座標計算式を求め、次に、これにより実際に設計する場合の手法を述べ、さらに、このような曲線が路線としての適性があるかどうかを考察したものである。

## 2. 設計理念

自動車専用道路の線形設計の基本的考え方は、その線形の“滑らかさ”である。さらに具体的には、車の走行時における物理的および運転心理的安全性、快適性、乗りごこち、環境との調和、経済性、設計の簡便さなどである。

走行時の車の運動状態と乗りごこちを支配するのは、主として、ドライバーのアクセルおよびブレーキの操作とハンドルさばきのいかんである。したがって、これらができるだけ滑らかに、かつ、無理なく自然に行なわれるような線形でなければならないことになる。このため

には車の走行力学的な検討として、遠心力したがって曲率の変化の状態が問題である。一般に曲率の変化がなんらかの要素の連続関数で表わされることが必要である。たとえば、放物線が $x$ 座標のレミニスケートが弦長の、クロノイドが弧長（または遠心力）の連続関数となっているようなものである。

ここでは、この要素に定規の曲げモーメントを考えたもので、このような量を変数に選べば、簡単な物理現象であるから、作図およびその視覚的検討が容易になると思われる。

3. 弾性曲線<sup>2)</sup>

均等質で軸方向に等断面、すなわち、曲げ剛さ ( $EI$ ) が変わらない適当な細長い棒（たとえば、バツテン、スチールテープ、現寸テープなど）を適当に配置された文鎮やピンにからませて自然に（支点で定規の軸に直角な反力のみ生ずる）たわませると一つの滑らかな曲線が描かれる。この曲線は任意の支点で単純支持された弾性曲線ということになる（写真-1、図-1 参照）。

一般にこのような曲線の座標計算式は、次のようにし

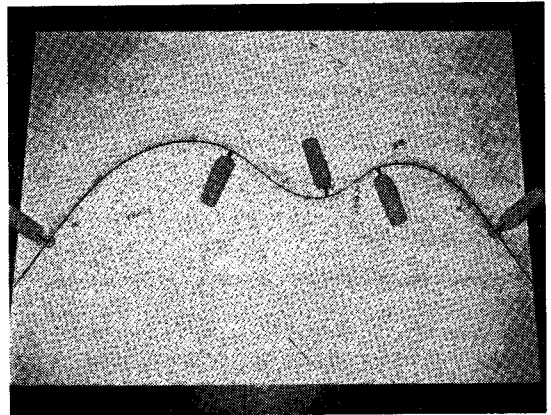


写真-1 弾性曲線の姿

\* 正会員 九州産業大学教授 工学部土木工学科

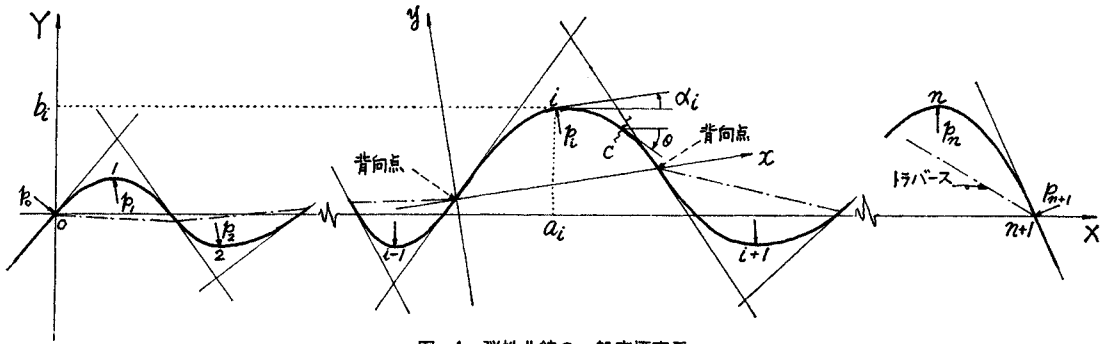


図-1 弾性曲線の一般座標表示

て求められる。すなわち、図-1 において、 $i$  ( $i=0 \sim n+1$ ) を任意の支点、 $p_i, a_i, b_i$  を支点  $i$  における支点反力、接線角およびその座標、断面  $c$  を支点  $i$  と支点  $i+1$  の間の曲線上の任意点、 $\theta$  を点  $c$  における接線角とすれば、つり合いの条件から

$$\sum_{i=0}^{n+1} p_i \sin \alpha_i = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} p_i \cos \alpha_i = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (p_i \sin \alpha_i \cdot b_i + p_i \cos \alpha_i \cdot a_i) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

となる。次に、点  $C$  における座標を  $X, Y$ 、曲線長を  $s$ 、曲げモーメントを  $M$ 、曲げ剛さを  $EI$ 、曲率半径を  $\rho$  とすれば、

幾何学的条件と弾性力学的条件から

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここに、

$$M = - \left( \sum_{i=0}^i p_i \sin \alpha_i \right) Y - \left( \sum_{i=0}^i p_i \cos \alpha_i \right) X + \sum_{i=0}^i (p_i \sin \alpha_i b_i + p_i \cos \alpha_i a_i)$$

であるから、いま、 $\sum_{i=0}^i p_i \sin \alpha_i = P \sin \alpha$ 、 $\sum_{i=0}^i p_i \cos \alpha_i = P \cos \alpha$  とおきかえると、

$$\frac{dM}{ds} = -P \cos(\alpha - \theta) \dots\dots\dots (6)$$

となる。したがって式 (4), (5), (6) より

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{2P}{EI}} \sqrt{\sin(\alpha - \theta)} \dots\dots\dots (7)$$

式 (7) を積分すれば

$$s = \sqrt{\frac{EI}{P}} (F - F') \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここに、 $F$  は  $\cos^{-1} \sqrt{\sin(\alpha - \theta)}$ 、 $\sqrt{1/2}$  をパラメーターとする第1種の楕円積分、 $F'$  はその完全楕円積分とする。次に、 $dX = \cos \theta \cdot ds$  および  $dY = \sin \theta \cdot ds$  であるから、式 (7) を  $\theta$  について積分すれば

$$\left. \begin{aligned} X &= -\sqrt{\frac{EI}{2P}} \left\{ \cos \alpha \cdot 2\sqrt{\sin(\alpha - \theta)} \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cdot (\sqrt{2} F - 2\sqrt{2} E - \sqrt{2} F' + 2\sqrt{2} E') \right\} \\ Y &= -\sqrt{\frac{EI}{2P}} \left\{ \sin \alpha \cdot 2\sqrt{\sin(\alpha - \theta)} \right. \\ &\quad \left. - \cos \alpha \cdot (\sqrt{2} F - 2\sqrt{2} E - \sqrt{2} F' + 2\sqrt{2} E') \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここに、 $E$  は  $\cos^{-1} \sqrt{\sin(\alpha - \theta)}$ 、 $\sqrt{1/2}$  をパラメーターとする第2種の楕円積分、 $E'$  はその完全楕円積分とする。

したがって、式 (7), (8), (9) より弾性曲線の任意点の曲率、曲線長、座標が計算されることになる。しかし、支点の数が多い場合は、式が複雑であるから、計算の煩に堪えられない。ところが、図-1 の中央部  $x-y$  座標で示されるように、一般に各支点の間に背向点があり、この点では曲率が 0、すなわち定規に曲げモーメントが生じていないので、かりにこの点で定規を切り離し、そのかわりに単純支点でおきかえたものとして考えることができる (写真-2 参照)。このように切り離された曲線部分を弾性曲線の基本形とよぶことにすれば、全曲線を背向点とその接線を媒介とする基本形の組み合わせとして取り扱えることになる。このような組み合わせはクロソイド曲線の S 形に相当し、多く使用されている。も

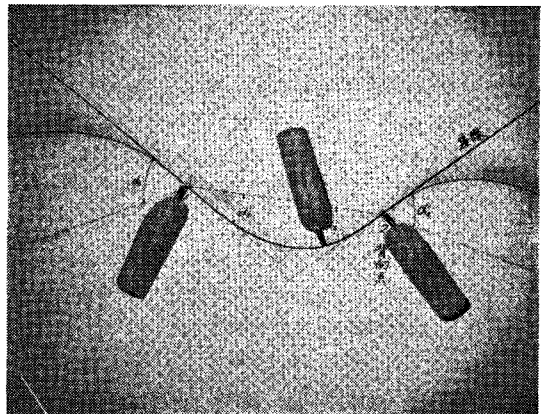


写真-2 基本形

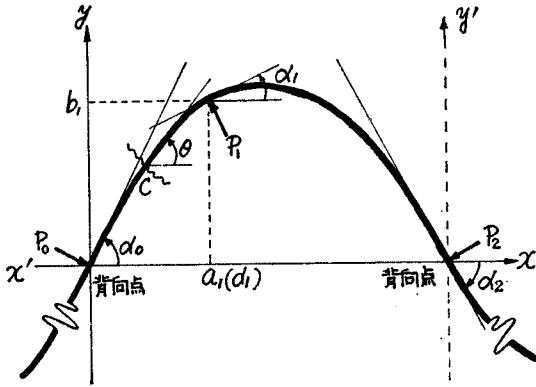


図-2 基本形の座標表示

し、背向点間に2支点以上ある場合には(クロソイド曲線の卵形や複合形に相当する)、やむをえず一般式(1)~(9)から求めるが、計算が煩雑となる。

この基本形についての計算式は式(1),(2),(7),(8),(9)より次のようになる(図-2参照)。

$$\begin{aligned}
 p_0 \sin \alpha_0 + p_1 \sin \alpha_1 + p_2 \sin \alpha_2 &= 0 \\
 p_0 \cos \alpha_0 + p_1 \cos \alpha_1 + p_2 \cos \alpha_2 &= 0 \\
 a_1 &= -\sqrt{\frac{EI}{2 p_0}} \{ \cos \alpha_0 \cdot 2 \sqrt{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)} \\
 &\quad + \sin \alpha_0 \cdot (\sqrt{2} F_0 - 2\sqrt{2} E_0 - \sqrt{2} F_0' + 2\sqrt{2} E_0') \} \\
 b_1 &= -\sqrt{\frac{EI}{2 p_0}} \{ \sin \alpha_0 \cdot 2 \sqrt{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)} \\
 &\quad - \cos \alpha_0 \cdot (\sqrt{2} F_0 - 2\sqrt{2} E_0 - \sqrt{2} F_0' + 2\sqrt{2} E_0') \} \\
 d_1 &= -\sqrt{\frac{EI}{2 p_2}} \{ \cos \alpha_2 \cdot 2 \sqrt{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \\
 &\quad + \sin \alpha_2 \cdot (\sqrt{2} F_2 - 2\sqrt{2} E_2 - \sqrt{2} F_2' + 2\sqrt{2} E_2') \} \\
 b_1 &= -\sqrt{\frac{EI}{2 p_2}} \{ \sin \alpha_2 \cdot 2 \sqrt{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \\
 &\quad - \cos \alpha_2 \cdot (\sqrt{2} F_2 - 2\sqrt{2} E_2 - \sqrt{2} F_2' + 2\sqrt{2} E_2') \} \\
 x &= -\sqrt{\frac{EI}{2 p_0}} \{ \cos \alpha_0 \cdot 2 \sqrt{\sin(\alpha_0 - \theta)} \\
 &\quad + \sin \alpha_0 \cdot (\sqrt{2} F_0 - 2\sqrt{2} E_0 - \sqrt{2} F_0' + 2\sqrt{2} E_0') \} \\
 y &= -\sqrt{\frac{EI}{2 p_0}} \{ \sin \alpha_0 \cdot 2 \sqrt{\sin(\alpha_0 - \theta)} \\
 &\quad - \cos \alpha_0 \cdot (\sqrt{2} F_0 - 2\sqrt{2} E_0 - \sqrt{2} F_0' + 2\sqrt{2} E_0') \} \\
 x' &= -\sqrt{\frac{EI}{2 p_2}} \{ \cos \alpha_2 \cdot 2 \sqrt{\sin(\alpha_2 - \theta)} \\
 &\quad + \sin \alpha_2 \cdot (\sqrt{2} F_2 - 2\sqrt{2} E_2 - \sqrt{2} F_2' + 2\sqrt{2} E_2') \} \\
 y' &= -\sqrt{\frac{EI}{2 p_2}} \{ \sin \alpha_2 \cdot 2 \sqrt{\sin(\alpha_2 - \theta)} \\
 &\quad - \cos \alpha_2 \cdot (\sqrt{2} F_2 - 2\sqrt{2} E_2 - \sqrt{2} F_2' + 2\sqrt{2} E_2') \} \\
 \frac{1}{\rho} &= \sqrt{\frac{2 p_0}{EI}} \sqrt{\sin(\alpha_0 - \theta)}, \quad \frac{1}{\rho'} = \sqrt{\frac{2 p_2}{EI}} \sqrt{\sin(\alpha_2 - \theta)} \\
 s &= \sqrt{\frac{EI}{p_0}} (F_0 - F_0'), \quad s' = \sqrt{\frac{EI}{p_2}} (F_2 - F_2')
 \end{aligned}$$

.....(10)

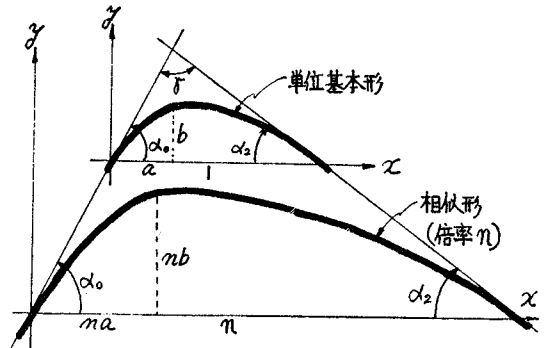


図-3 基本形の性質

ただし、'印は x-y 座標軸を左右反対にした場合を、添字 0, 2 印は  $\alpha_0, \alpha_2$  をパラメーターとすることを表わしているものとする。

なお、基本形の性質として、式(10)から x/y または x'/y' を考えると、曲線の形は定規の EI すなわち材質、断面形状に無関係、すなわち、軸方向に等質であればどのような棒でもよく、また、背向点の接線角が与えられると、背向点間の距離に無関係に曲線の姿(相似形)が決まることになる(図-3参照)。したがって、単位クロソイド表やクロソイド定規にならって、何種類かの接線角の組み合わせによる単位の基本形の表および定規を作っておけば計算および作図に便利ではないかと思われる。

#### 4. 手 法

##### (1) 本線の場合

写真-1のようにこれから路線を設計しようとする地図の上に候補路線として適当な幅でフリーハンドの滑らかな曲線を描き、この曲線上で曲線部の内側の適当な位置に文鎮を1個ごと配置し、定規をからませて描かれる曲線がフリーハンドの曲線の幅の中におさまるかどうかを調べる。各文鎮をいろいろずらしてみ、曲線が最適な状態になるようにする。この場合、前述のとおり、定規の曲げ剛さに曲線の形が無関係であるから、縮尺が大きい図面では比較的たわみやすい定規(スチールテープ)がよく、縮尺が小さいときはできるだけたわみにくい定規(バッチン)がよかった。これは定規をたわませるとき、紙面との摩擦のため定規が勝手な曲り方をするのを避けるためである。また、弾性曲線は定規の中立軸で求めているから、正確には支点に中立軸が合うよう定規の厚みの1/2だけ文鎮をずらさなければならないので、定規の厚みはできるだけうすいものがよかった。

このようにして、たわんだ定規をトレースすれば、一

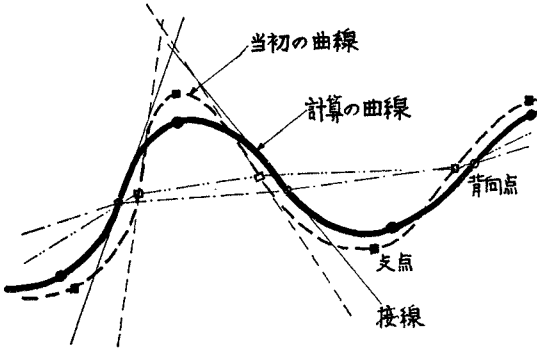


図-4 当初の曲線のずれ

つの滑らかな弾性曲線が作図できる。この曲線を基本形に分解するために背向点とその接線をできるだけ正確に図上で決める。次に、このようにして決めたものを、あらかじめ理論上の基本形の背向点とその接線として、中間支点（文鎮の位置）の座標を計算し、この計算による新しい支点の座標に文鎮をおきかえ、いま一度定規をからませて、これをトレースしかえれば、当初の曲線とは少しずれるが、新しい支点について計算どおりの弾性曲線を作図することができる。この間の事情を誇張して示せば 図-4 のようである。この図において、当初支点（■印）により描かれた曲線（---線）上にて、真の背向点（□印）およびその接線（……線）はわからないが、できるだけこれに近いような新しい背向点（○印）およびその接線（—線）を決め、これを用いて基本形の座標計算を行ない、計算で求められた新しい支点（●印）による曲線（- - -線）が描かれたことを示している。

すなわち、写真-1の一部を示す写真-2のように、全弾性曲線を図上で求めた背向点とその接線を媒介とする基本形に分解する。その一つの基本形において、背向点間距離と二つの接線角が与えられるので、この条件による中間支点（中央の文鎮の座標）が計算される。このようにして、すべての基本形について中間支点の位置が、図上で決定した背向点と接線角を正確に満足するように計算される。この場合、図上で背向点と接線角を決定するのは実技上簡単であり、真の値と少しぐらいの誤差があっても、中央の文鎮の位置の変更は少ないようである。したがって、この基本形について考えればよいことになる。

(2) 基本形の実技

いま、写真-3のように文鎮3個に定規をからませると、一つの基本形が描かれる。左右の文鎮の位置が背向点となり、両隣りの基本形と接続することになる。この曲線の座標、曲率、曲線長の計算は次のようである。

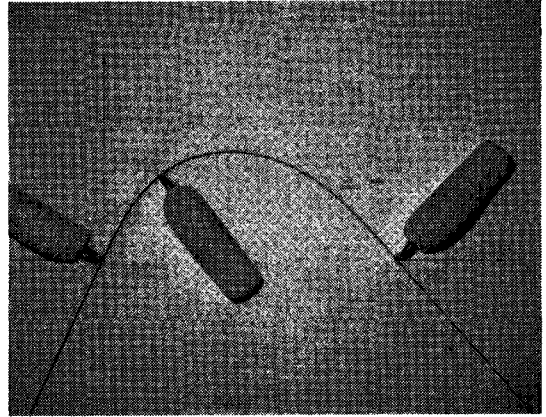


写真-3 基本形の実技

まず、式(10)を変形すると次のようになる。ここに、式(10)の{……}を簡単のために、 $K(\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $Q(\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $K(\alpha_2, \alpha_1)$ ,  $Q(\alpha_2, \alpha_1)$ ,  $K(\alpha_0, \theta)$ ,  $Q(\alpha_0, \theta)$ ,  $K(\alpha_2, \theta)$ ,  $Q(\alpha_2, \theta)$ とおきかえるものとする(図-2参照)。

$$\tan \alpha_1 = \frac{-Q(\alpha_2, \alpha_1)^2 \sin \alpha_2 - Q(\alpha_0, \alpha_1)^2 \sin \alpha_0}{-Q(\alpha_2, \alpha_1)^2 \cos \alpha_2 - Q(\alpha_0, \alpha_1)^2 \cos \alpha_0}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{K(\alpha_0, \alpha_1)}{Q(\alpha_0, \alpha_1)} = A, \quad \frac{d_1}{b_1} = \frac{K(\alpha_2, \alpha_1)}{Q(\alpha_2, \alpha_1)} = B,$$

$$A + B = C \text{ とおく}$$

$$b_1 = \frac{a_1 + d_1}{C}, \quad a_1 = A \cdot b_1, \quad d_1 = B \cdot b_1$$

$$\sqrt{\frac{EI}{2p_0}} = \frac{a_1}{K(\alpha_0, \alpha_1)} = \frac{b_1}{Q(\alpha_0, \alpha_1)}$$

$$\sqrt{\frac{EI}{2p_2}} = \frac{d_1}{K(\alpha_2, \alpha_1)} = \frac{b_1}{Q(\alpha_2, \alpha_1)}$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{2p_0}{EI}} \sqrt{\sin(\alpha_0 - \theta)}$$

$$\frac{1}{\rho'} = \sqrt{\frac{2p_2}{EI}} \sqrt{\sin(\alpha_2 - \theta)}$$

$$s = \sqrt{\frac{EI}{p_0}} (F_0 - F_0'), \quad s' = \sqrt{\frac{EI}{p_2}} (F_2 - F_2')$$

$$x = -\sqrt{\frac{EI}{2p_0}} K(\alpha_0, \theta), \quad x' = -\sqrt{\frac{EI}{2p_2}} K(\alpha_2, \theta)$$

$$y = -\sqrt{\frac{EI}{2p_0}} Q(\alpha_0, \theta), \quad y' = -\sqrt{\frac{EI}{2p_2}} Q(\alpha_2, \theta)$$

これらの式において、与えられる条件値は、背向点間距離  $(a_1 + d_1)$  と接線角  $\alpha_0, \alpha_2$  である。計算の順序は次のようになる。① 中間支点（中央の文鎮の位置）の接線角  $\alpha_1$  を投入法（第1投入値は作図曲線から求められる）で必要な桁（実用上は10桁）まで計算する。この計算は時間がかかるが卓電により十分求められた。② この  $\alpha_1$  の値を用いて、 $K(\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $Q(\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $K(\alpha_2, \alpha_1)$ ,  $Q(\alpha_2, \alpha_1)$  を計算する。③ この  $K, Q$  の値を用いて、 $A, B, C$  を計算する。④ この  $A, B, C$  の値と与え

られた条件値 ( $a_1+d_1$ ) を用いて中間支点の座標  $a_1, b_1, d_1$  が計算される。⑤ この  $a_1, b_1, d_1$  と前に求めた  $K, Q$  の値を用いて、文鎮にかかる力に相当する  $\sqrt{EI/2} p_0, \sqrt{EI/2} p_2$  が計算される。⑥ 以上の求められた値と、曲線上の任意点の接線角  $\theta$  を適当 (たとえば、 $30'$  きざみとか、 $10'$  きざみというように) に変化させれば、それぞれの点の座標  $x, y$ , 曲線長  $s$ , 曲率  $1/\rho$  が機械的に計算できる。

以上の実技は次のようである。① 写真—3 のように、文鎮 (支点) を  $a_1=5.3$  cm,  $b_1=7.8$  cm,  $d_1=21.1$  cm したがって  $a_1+d_1=26.4$  cm の配置で“しない定規”をからませた。② この定規をトレースして、当初の基本形を描いた。③ この図上から  $\alpha_0=64^\circ 30'$ ,  $\alpha_2=49^\circ 30'$  と読みとった。④ 基本形の設計条件として、 $a_1+d_1=26.4$  cm,  $\alpha_0=64^\circ 30'$ ,  $\alpha_2=49^\circ 30'$  と決定する。この条件に合う中間支点の位置を決定することになる。⑤ 作図から  $\alpha_1$  の第1投入値として、 $\alpha_1=36^\circ 00'$  を求め、関係式から  $\alpha_1=36^\circ 10'$  となった。この値を第2投入値として、同様な計算を繰り返すと、 $\alpha_1=36^\circ 10'$  となったので、これを  $\alpha_1$  の値と決定する (卓電では第1投入値  $0.645\ 077$  ラジアンより  $0.631\ 677 \rightarrow 0.631\ 364\ 750 \rightarrow 0.631\ 364\ 802\ 118 \rightarrow 0.631\ 364\ 802\ 131$  となるので  $\alpha_1$  の値として最後の値を用いた)。⑥ 以下上述の順序で機械的に計算した結果が表—1 のとおりである。すなわち、

背向点間距離と  $\alpha_0, \alpha_2$  を条件値とした中間支点の位置は

$$\begin{aligned} a_1 &= 5.39 \text{ cm } (5.392\ 972\ 386\ 173 \text{ cm}), \\ b_1 &= 7.71 \text{ cm } (7.711\ 524\ 390\ 464 \text{ cm}), \\ d_1 &= 21.01 \text{ cm } (21.007\ 027\ 613\ 824 \text{ cm}), \\ a_1+d_1 &= 26.40 \text{ cm } (26.399\ 999\ 999\ 997 \text{ cm}), \end{aligned}$$

また、曲線長は実測値  $34.5$  cm (定規に目盛があればただちに読みとれる) に対して計算値は

$$\begin{aligned} &9.51+24.88=34.39 \text{ cm } (9.513\ 618\ 002\ 308 \\ &\quad +24.871\ 490\ 461\ 708 \\ &=34.385\ 108\ 464\ 016 \text{ cm}) \end{aligned}$$

となった。⑦ このようにして求められた  $a_1, b_1$  の位置に中央の文鎮をおきかえて、あらためて定規をからませれば、与えられた条件値を満足する曲線が描かれる。⑧ この曲線の中間点の座標、曲線長、曲率は  $\theta$  を適当に変化 (この例では  $5'$  きざみ) させて機械的に計算した結果は表—1 のとおりである。計算は概略計算として、手回し計算機と楕円関数表によったものである。また、上文中 (……) の数値は、詳細計算としてプログラムカードによる卓電 (メモリ—6 語, ステップ 96) によったものである。実際の設計においては、初めの  $\alpha_1$  を求めるのに時間 (約 1 時間) がかかるが、計算がプログラミングしてあるので、すべて機械的に実行できる。この実技の場合の曲率図は図—5 のようである。この図に

表—1 実技の計算

$\alpha_1$	$2\sqrt{\sin(\alpha-\alpha_1)}$	$\cos^{-1}\sqrt{\sin(\alpha-\alpha_1)}$	$F$	$E$	$\frac{\sqrt{2}F-2\sqrt{2}E}{+1.19812}$	$K(\alpha, \alpha_1)$	$Q(\alpha, \alpha_1)$	$\alpha_1$	$b_1$	$a_1$	$d_1$	$\sqrt{\frac{EI}{2P}}$
$36^\circ 00'$	1.38153	$46^\circ 19'$	0.85265	0.76800	0.23172		1.1472	$36^\circ 10'$				
	1.99691	$3^\circ 31'$	0.05557	0.05555	1.11959		0.7913					
$36^\circ 10'$	1.37783	$46^\circ 28'$	0.85572	0.77025	0.22970	0.8005	1.1447	$36^\circ 10'$	7.71	5.39	21.01	6.738
	1.99714	$3^\circ 04'$	0.05354	0.05351	1.12248	2.1506	0.7896					9.768
$\theta$	$2\sqrt{\sin(\alpha-\theta)}$	$\cos^{-1}\sqrt{\sin(\alpha-\theta)}$	$F$	$E$	$\frac{\sqrt{2}F-2\sqrt{2}E}{+1.19812}$	$K(\alpha, \theta)$	$Q(\alpha, \theta)$	$x$	$y$	$1/\rho$	$F-1.8541$	$s$
$60^\circ 30'$	0.52823	$74^\circ 41'$	1.48033	1.15941	0.01230	0.2385	0.4715	1.61	3.18	0.0392	-0.3741	3.56
$50^\circ 30'$	0.98371	$60^\circ 32'$	1.15424	0.97244	0.07998	0.4957	0.8534	3.34	5.75	0.0730	-0.7001	6.67
$40^\circ 30'$	1.27552	$50^\circ 23'$	0.93628	0.82826	0.17954	0.7112	1.0740	4.79	7.24	0.0947	-0.9181	8.75
$36^\circ 10'$	1.37783	$46^\circ 28'$	0.85572	0.77025	0.22970	0.8005	1.1447	5.39	7.71	0.1022	-0.9984	9.51
$45^\circ 30'$	0.52823	$74^\circ 41'$	1.48033	1.15941	0.01230	0.3524	0.3937	3.44	3.85	0.0270	-0.3741	5.17
$40^\circ 30'$	0.79104	$66^\circ 42'$	1.29332	1.05559	0.04149	0.5453	0.5746	5.33	5.61	0.0405	-0.5611	7.75
$35^\circ 30'$	0.98371	$60^\circ 32'$	1.15424	0.97229	0.08041	0.7000	0.6958	6.84	6.80	0.0504	-0.7001	9.67
$30^\circ 30'$	1.14117	$55^\circ 12'$	1.03800	0.89774	0.12688	0.8376	0.7854	8.18	7.67	0.0584	-0.8161	11.27
$25^\circ 30'$	1.27552	$50^\circ 22'$	0.93593	0.82801	0.17975	0.9605	0.8532	9.38	8.33	0.0653	-0.9181	12.68
$20^\circ 30'$	1.39257	$45^\circ 52'$	0.84354	0.76125	0.23752	1.0853	0.9044	10.60	8.84	0.0713	-1.0101	13.95
$15^\circ 30'$	1.49558	$41^\circ 36'$	0.75818	0.69633	0.30083	1.2001	0.9419	11.72	9.20	0.0765	-1.0961	15.14
$5^\circ 30'$	1.66692	$33^\circ 32'$	0.60208	0.56927	0.43946	1.4168	0.9821	13.84	9.59	0.0853	-1.2521	17.30
$0^\circ 00'$	1.74403	$29^\circ 18'$	0.52259	0.50060	0.52126	1.5290	0.9876	14.94	9.65	0.0893	-1.3311	18.39
$-5^\circ 30'$	1.81014	$25^\circ 10'$	0.44878	0.43235	0.60993	1.6394	0.9803	16.02	9.58	0.0927	-1.4051	19.41
$-10^\circ 30'$	1.86121	$21^\circ 28'$	0.37907	0.37035	0.68669	1.7309	0.9693	16.91	9.47	0.0953	-1.4751	20.38
$-15^\circ 30'$	1.90400	$17^\circ 49'$	0.31348	0.30848	0.76893	1.8212	0.9484	17.79	9.27	0.0975	-1.5411	21.29
$-20^\circ 30'$	1.93875	$14^\circ 13'$	0.24940	0.24686	0.85260	1.9074	0.9205	18.63	8.99	0.0992	-1.6051	22.17
$-25^\circ 30'$	1.96563	$10^\circ 38'$	0.18613	0.18505	0.93794	1.9898	0.8856	19.44	8.65	0.1006	-1.6681	23.04
$-30^\circ 30'$	1.98475	$7^\circ 05'$	0.12379	0.12347	1.02397	2.0676	0.8442	20.20	8.25	0.1016	-1.7301	23.90
$-35^\circ 30'$	1.99619	$3^\circ 32'$	0.06169	0.06165	1.11100	2.1412	0.7964	20.92	7.78	0.1022	-1.7924	24.76
$-36^\circ 00'$	1.99691	$3^\circ 11'$	0.05557	0.05555	1.11961	2.1482	0.7913	20.99	7.73	0.1022	-1.7985	24.85
$-36^\circ 10'$	1.99714	$3^\circ 04'$	0.05354	0.05351	1.12248	2.1506	0.7896	21.01	7.71	0.1022	-1.8005	24.88

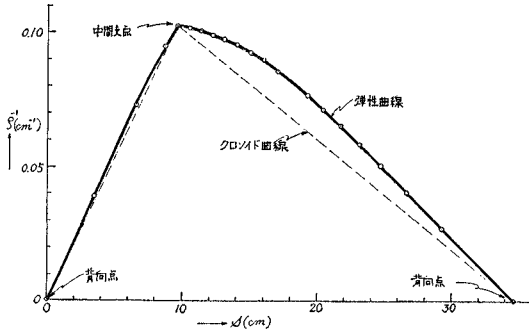


図-5 実技曲率図

において、---線は最大曲率値を等しくするようなクロソイド曲線の凸形を比較のため図示したものである。図からわかるように、弾性曲線のほうがいくぶん滑らかになるようである。しかし、円弧が挿入されている基本形とくらべると後述するような欠陥がある。

(3) 直線と円弧を結ぶ場合

写真-4 のように、直線  $mn$  と半径  $\rho$  の円が  $h$  なる距離に与えられ、この間に弾性曲線を挿入する手法は次のようになる。与えられた直線に直定規を、円弧には半径  $\rho$  の円弧定規を合わせる。これらの定規の間に“しない定規”をからませると求める曲線が作図できる。この曲線の計算は次のようになる。いま、 $\alpha_0$  を与えられた直線と基本形（この場合、 $\alpha_0 = \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  とする）の  $x$  軸との挟角とすれば、幾何学的関係から次の式が得られる。

$$\frac{h}{\rho} = \sqrt{\sin \alpha_0} (\sin \alpha_0 \cdot K(\alpha_0, 0) - \cos \alpha_0 \cdot Q(\alpha_0, 0)) + \cos \alpha_0$$

この式において、 $h$  と  $\rho$  が与えられているから  $\alpha_0$  が求められる。 $\alpha_0$  が決定すれば、基本形と同様にして、曲線の必要な計算ができる。この実技は次のようにな

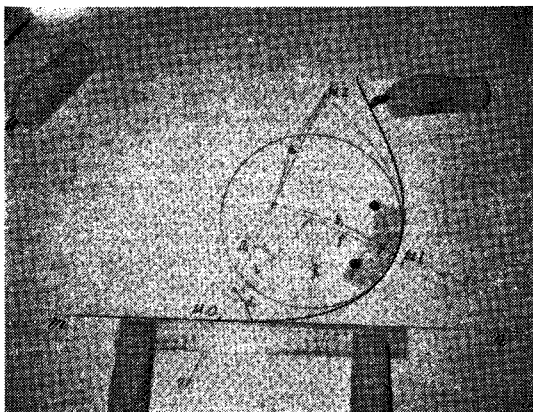


写真-4 直線と円弧を結ぶ場合

る。写真のように、 $\rho = 10$  cm,  $h = 11.6$  cm を与えた。上述の手順で作図を行ない、この図から  $\alpha_0$  の近似値として、 $\alpha_0 = 67^\circ 50'$  を読みとった。この  $\alpha_0$  について、前式より  $h/\rho = 1.162667434981$  となった。これは与えられた条件  $h/\rho = 1.16$  と製図上の精度を考慮して十分満足される値であるから、 $\alpha_0$  を上の値と決定する。したがって、 $h = 11.62667434981$  cm を与えたことになる。この  $\alpha_0$  の値によって、基本形と同様に計算を行なった結果、

$$l(\text{円の中心と曲線の始点間距離}) = 9.260902469715 \text{ cm,}$$

$$a_1 = 14.261507421896 \text{ cm,}$$

$$b_1 = 14.189663118356 \text{ cm}$$

すなわち、曲線の始点および終点の位置が求められた。この曲線の間接点は前述のように  $\theta$  を必要なきざみで変化させれば、それぞれの点の座標、曲線長、曲率を計算することができる。

(4) 円弧と円弧を結ぶ場合

写真-5 のように、二つの円  $O_1$  と  $O_2$  が与えられ、この間に曲線を挿入する手法は次のようになる。与えられた二円の中心線上に、両円の半径の比  $\rho_1 : \rho_2$  による内分点  $C$  を求める。この点に文鎮を、また、両円にそれぞれの円弧定規を合わせる。さきの文鎮と二つの円弧定規に“しない定規”をからませると求める曲線が作図できる。この曲線の計算は次のようになる。いま、 $l_1$  を円  $O_1$  と点  $C$  の間隔、 $\alpha_0$  を  $C$  点における接線と円  $O_1$  に関する曲線の  $x$  軸との挟角とすれば、幾何学的関係から次の式が得られる。この場合も、 $\alpha_0 = \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  とする。

$$\left(\frac{l_1}{\rho_1}\right)^2 = \sin \alpha_0 \left\{ K(\alpha_0, 0)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_0}} - Q(\alpha_0, 0)\right)^2 \right\}$$

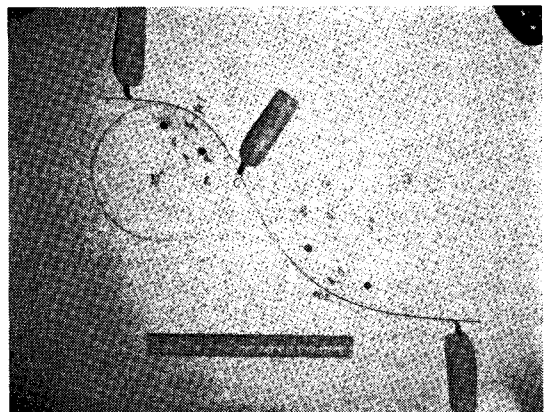


写真-5 円弧と円弧を結ぶ場合

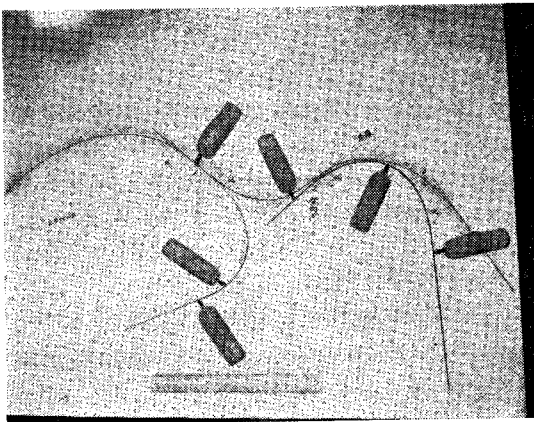
この式において、 $l_1$  と  $\rho_1$  が与えられるから、 $\alpha_0$  が求められ、円  $O_1$  の側の曲線の必要な計算ができる。さらに、円  $O_2$  の側の曲線は円  $O_1$  の場合の各値を両円の半径比を倍率とした相似形として計算される。この曲線は、いわゆる、S形に相当するが、卵形や複合形に相当する弾性曲線は作図および計算が困難である。このS形曲線の実技は次のようになる。半径 10 cm と 20 cm の二つの円を中心間隔 34.5 cm で与えた。上述の手順で、まず、内分点 C の位置は  $34.5 \times 10/10+20=11.5$  cm となった。これによって、この二円の間に曲線が描かれた。この図から、 $\alpha_0$  の近似値として、 $\alpha_0=30^\circ$  と読みとった。この  $\alpha_0$  について、前式より

$$l_1=11.565\ 490\ 458\ 48\ \text{cm}$$

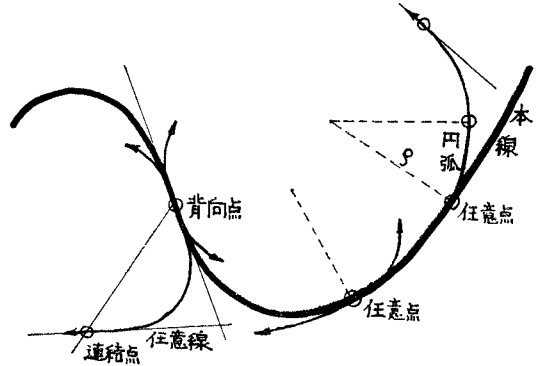
となった。精度をあげるために、第2近似値として、 $\alpha_0=29^\circ 30'$  を与えると、 $l_1=11.520\ 926\ 683\ 73$  cm となった。ここで、与えられた条件  $l_1=11.5$  cm を上の値に変更しても実際の設計に支障がない。したがって、 $\alpha_0=29^\circ 30'$  と決定する。 $\alpha_0$  が決定されれば、以下前述の計算を行なうと曲線が計算できる。円  $O_2$  の側の曲線は  $O_1$  側の値を 20 cm/10 cm 倍すれば求められる。このようにして支点的位置が決定されるので、あらためて文鎮をその位置において定規をからませれば正確な曲線が作図されるが、実技上は当初の曲線とほとんど変わらないようである。

### (5) 分岐路の場合

その一は本線の背向点から取り出す方法である（写真—6、図—6 参照）。すなわち、本線の背向点と自由に選んだ点に文鎮をおき、この2点に定規をあて、中間の適当なところで分岐点における接線が一致するまで（ちょうど、単純ばりのたわみ曲線の支点的接線が背向点の接線に一致するように）定規を押し曲げれば一つの基本形の分岐路ができる。このときの座標計算は背向点間距離



写真—6 分岐路の場合



図—6 分岐路の手法

と一つの（背向点側の）接線角が与えられており、いま一つの接線角は図上で求め、これらの値により基本形の場合と同様に中間支点的座標を計算し、この座標にあらためて文鎮をおきかえて曲線を描くことになる。

その二は本線の任意点から取り出す方法である（写真—6、図—6 参照）。この任意点の座標、接線、曲率半径がわかっているので、まず円弧が取り出される。次に、写真—4 のようにこの円弧に円弧定規を合わせて、これに“しない定規”をからませるよう一方の側を直定規で押し曲げると、いろいろな弾性曲線が描かれる。この場合の曲線の計算は、直線と円を結ぶ手法 4.(3) を応用することになる。すなわち、 $\rho$  が与えられており、 $h$  または  $\alpha_0$  を適当に決めれば、基本形と同様の計算により、与えられた円に対する文鎮の位置および曲線の座標、曲線長、曲率が求められる。このようにして計算された文鎮の位置で“しない定規”をあらためてからませると正確な曲線が作図される。

その三は事前に何種類かの基本形を作図および計算しておき、本線または本線から取り出した円弧に用意した弾性曲線の曲率と接線を合わせ、このときの文鎮の位置であらためて“しない定規”をからませると一つの曲線を作図することができる。この場合の曲線の計算は事前にできている。

以上三つの方法のうち、第一の方法が作業が容易である。計算の手数はあまり変わらない。

## 5. 路線としての適性

以上のようにして求めた弾性曲線が路線として適当であるかどうかについて、現行クロソイド曲線の場合にならって検討すれば次のようである。

### (1) 曲率の変化の状態について

走行性の基本的条件の一つは曲率が急変することなく

漸変することである。この曲率の変化の状態はクロソイド曲線においては走行する車に加わる遠心力を  $F$ 、車の質量を  $m$ 、設計速度を  $v$ 、比例定数を  $k$  とすれば、

$$\frac{dF}{ds} = mv^2 \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) = k$$

であり、弾性曲線においては式 (5) および式 (6) より

$$\frac{dM}{ds} = EI \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -P \cos(\alpha - \theta)$$

であるから、曲率の曲線長に対する変化の状態がクロソイド曲線では直線となり、弾性曲線では  $\cos$  曲線で表わされる。したがって、クロソイド曲線にくらべて、局部的には、いくぶん自然なハンドル操作になると考えられるが、全体的には、単振子の運動のように、ハンドルの回転角速度を漸減しながら、円弧がないので、ハンドルを固定することなく繰り返すことになる。このことは、現在もっとも走行性がよいといわれるクロソイドー円ークロソイドの組み合わせによる線形にくらべて、本手法の基本的欠陥である。ただ、クロソイドの凸形にくらべると、いくぶん滑らかであるから、クロソイドポケットブックに書かれているような円がなくてもよい場合には支障がないと思われる。もちろん、全線を一筆の弾性

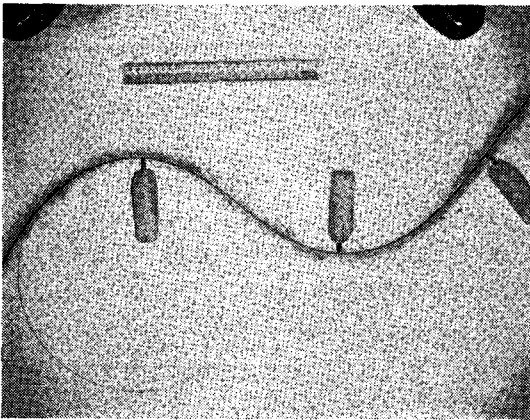


写真-7 一筆の場合

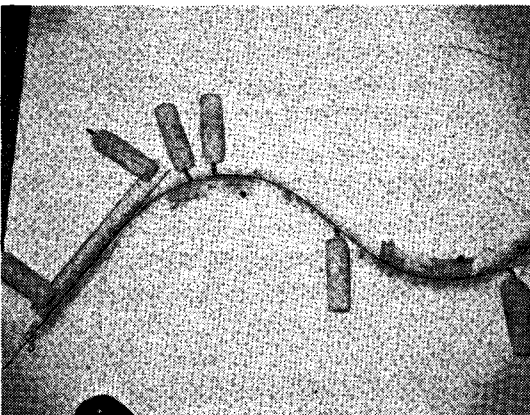


写真-8 円弧を挿入する場合

曲線で描くことなく、現行のように、フリーハンドで描かれた曲線をまず円弧で近似してゆき、前述 4.(3),(4) の手法を用いれば、クロソイド曲線の基本形とS形に相当する弾性曲線ー円ー弾性曲線という組み合わせの線形を設計することもできるが、卵形や複合形に相当するものは設計困難である。写真-7 は円弧がない一筆で描かれる場合の状況を、写真-8 は円弧を挿入する場合の状況を示している。

## (2) 最小曲線半径について

道路構造令および高速自動車国道などの構造基準に設計速度に応じて最小曲線半径が定められているので、式 (10) で計算された弾性曲線の最小曲線半径をチェックすることになる。クロソイド曲線が最初から許される最小曲線半径以上の円弧により設計されるのにくらべて面倒であるが、実技上は許される最小曲線半径に相当する円弧定規を描かれた弾性曲線に沿って走査させることにより、また、定規の材質により大体の曲げられる最小半径がわかるので一応の見当はつけられるようである。

## (3) 最小曲線長について

同基準に運転心理上から同種の曲線長の最小値が(クロソイドポケットブックでは通過時間として 3~5 秒)定められているが、弾性曲線では全線が同種の曲線であるから、特に吟味しなくともよいのではないと思われる。しいて検討するとすれば、中間支点と背向点間の距離を短くしないようにすればよいのではないと思われる。実技上からも中間支点をあまり背向点に近づけようとすると、定規の曲り方が不安定になってくるようである。この場合、最小曲線長の計算は背向点から最小曲率半径の点まで、たとえば表-1 のように、 $s=9.51$  cm および  $24.88$  cm として機械的に求められる。また、定規に目盛があればただちに実用上支障のない精度で読みとれる。

## (4) ショーツ値について

同ポケットブックでは走行時の乗りごちを規定する量として、ショーツ値をある値以下にすることを推奨し、これをクロソイド曲線のパラメーター  $A$  に換算されているが曲率図では次のようである(図-7 参照)。

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{A^2}$$

すなわち、曲率図の勾配をある値以下におさえることになる。弾性曲線についてもこのことを準用すれば、曲率変化の最大値は

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{P}{EI}$$



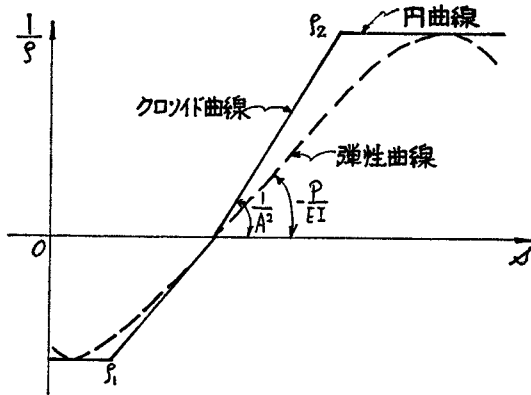


図-7 曲率図の対照

であるから、この値を同様におさえることになる。

(5) 曲線の調和について

同じくクロノイド曲線では運転心理上から隣接円の半径の比が 1:3 以下になるようにされているが、弾性曲線では定規の曲げ剛さが一定であるから局部的に急に曲げようとしても（曲率半径を急に小さくしようとしても）、弾性のため両隣りの基本形の曲線を変形しようとし、自然に全体的バランスをとるようになる。したがって、この事項について特に検討しなくともよいと思われる。

(6) 概略設計および線形修正について

線形が技術的にも心理的にもその環境によく調和することが強調されている。このためには文鎮の位置をいろいろずらしてみたり、作為的に支点を増減して“うねり”を調節したりして、視覚的に比較路線の検討することになる。しかし、前述のとおり、計算上の制約から、主として基本形しか利用できないこと、円弧が挿入できないこと、卵形や複合形に相当する曲線が求められないことなどの欠陥がある。ただ、上述のように、視覚的検討が容易であり、かつ、実施設計にほぼ近い線形が簡単に得られるので、詳細設計の補助手段として、概略のルートを描く作業に利用すれば便利ではないかと思われる。

次に、一応描かれた線形を全般的または局部的に修正しようとする場合、定規は起点から終点まで1本であるから、理論的には一つの支点を修正しようとするれば、全体に影響してくるはずであるが、実用上はその近傍だけで遠方の曲線には有意の変更はないようである。また、線形に円弧を用いる場合の修正は現行クロノイド曲線の場合とほとんど同様である。

(7) 数値計算上の得失について

a) 円弧を挿入しない場合

この場合は全線がいわゆる緩和曲線（本論文では弾性曲線）になっているから、前述のとおり、基本形（仮称）の組み合わせとなり、各基本形はその左右の背向点の位置とその接線を媒介とするという条件で連続している。この条件を図上で決定すれば、基本形の計算のとおり、設計に必要な諸量（曲線上の各点の座標、曲率半径、最小曲率半径、曲線長および最小曲線長）が表-1のように機械的に計算できる。しかも、作図と計算は一致している。また、曲線上の点を細かく必要とする場合には、接線角  $\theta$  のきざみを細かくして機械にインプットすればよい。

b) 円弧と円弧（直線を含めて）を結ぶ場合

この場合は 4.(3),(4) のとおり、作図および計算が機械的に行なえる。しかし、現行クロノイドによる卵形や複合形に相当する設計は実用上困難である。

c) 分岐路の場合

分岐路を背向点から引き出す場合はまったく基本形と同様である。しかし、本線の任意点から引き出す場合には、4.(5) のとおり、作図の作業に練習が必要となる。この場合でも、計算は基本形の応用であり機械的に行なうことができる。

(8) 曲線設定について

現地に曲線を設定する場合には、背向点を結んだ折線をトラバースに選び、座標が計算されているので、中間点は現行同様に行なえる。

6. 実施例との比較

現行の実施例を手本にして弾性曲線を合せてみた。九

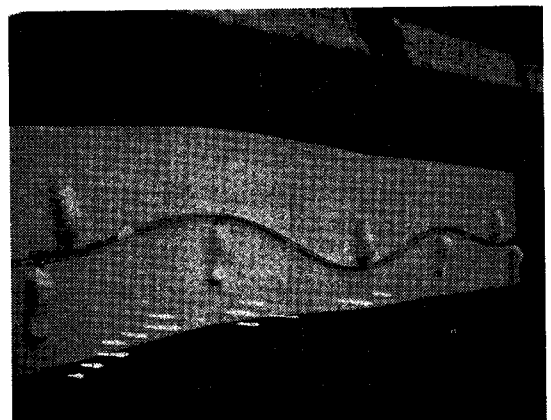


写真-9 実施例との比較（本線）

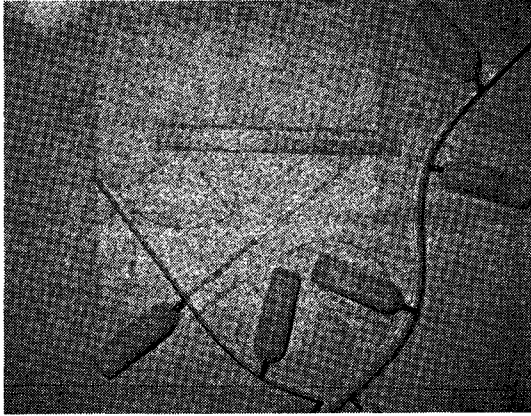


写真-10 実施例との比較 (ランプ)

州縦貫自動車道の福岡地区の線形において、クロソイド曲線の背向点に弾性曲線の背向点ができるだけ合うように定規をたわませてみた。状況は写真-9 のようである。両曲線のずれは 1/2000 の図面上で最大 3~4mm であるから、現地では 6~8m となり、ほぼ一致するものと考えられる。

また、写真-10 は熊本の菊水インターのランプについて比較しているもので、これもほぼ一致していると考えられる。

ただ、クロソイド曲線の卵形や複合形(あまり使われていない)の部分では、弾性曲線が基本形しか利用できていないので、S形部分しか比較することができなかった。比較の概況としては、クロソイド曲線による場合は円弧が挿入されているので弾性曲線よりいくぶんふくらんだように感じられた。

## 7. 結 語

道路の線形として定規の表わす弾性曲線をそのまま用

いる場合の長所と思われる点は

- ① 定規の入手が容易である。
- ② 定規のたわみをそのまま線形としている。
- ③ 作図が簡単である。
- ④ ペーパーロケーション作業において、視覚的にいろいろな比較路線の検討が簡単にできる。
- ⑤ 路線としての適性に大きな支障がない(円弧が必要な場合は本文 4.(3),(4))。

などである。その短所は

- ① 基本形しか簡単に利用できていない。すなわち、クロソイド曲線の卵形や複合形に相当する曲線が簡単に求められていない。
  - ② 円弧を自由に入れられないという基本的欠陥がある。
  - ③ 基本形の間支点の接線角  $\alpha_1$  の計算に時間がかかる。
  - ④ 分岐路の設計が面倒である。すなわち、本線のように一筆で作図ができない。
- などである。

なお、この研究<sup>4)</sup>にあたり、ご懇篤なる助言をいただいた九州大学教授 篠原謹爾博士、ならびに、種々設計資料を貸与して下さった日本道路公団の方々、さらに、貴重なお教示をくださった学会の線形専門の方々に深く感謝いたします。

### 参 考 文 献

- 1) 日本道路協会：クロソイドポケットブック，全般，日本道路協会，昭和46年6月
- 2) 野口尚一：応用弾性学，pp. 142~145，山海堂，昭和25年3月
- 3) 片平信貴：道路工学，pp. 150~151，技報堂，昭和35年2月
- 4) 薄 慶治：弾性曲線による道路線形設計手法，土木学会西部支部研究発表前刷，昭和47年2月

(1972.6.18・受付)  
(1973.6.25・再受付)