

# 円形水槽内 2 層流体における内部波について

## ON STANDING INTERNAL GRAVITY WAVES IN THE CYRINDRICAL BOUNDARY

石川 忠晴\*・椎 貝 博 美\*\*

By Tadaharu Ishikawa and Hiroyoshi Shiiqai

### 1. ま え が き

円筒型水槽内に密度の違う 2 流体がある場合の内部境界面に発生する波について、理論的取り扱いおよび実験を行なった。

密度が鉛直方向に変化する流体の内部に発生する波、いわゆる内部波については古くから研究されており、また近年は、拡散、混合の問題に関連して盛んに取り扱われている。ところが密度流は現象が複雑であり、簡単な条件下で密度流自体の性質を詳しく知ろうという意図から、それらの研究はいずれも 2 次元的な取り扱いをしている。また実際、2 次元の座標系から円筒座標系に書きかえても、理論上特に新しい結果が得られるとは考えられない。しかし、実用上は円筒座標系に書きかえておくことは有用であり、たとえば、最近計画されている海底石油貯蔵タンクなどの具体的な問題にそのまま応用できるであろうと思われる。そこで筆者は設計のための資料にする目的で、円筒型水槽内 2 層流体の内部波について理論計算および実験を行なった。さらに、内部波の疑 3 次元の実験は新しい現象を見出す可能性があり、たとえば、矩形水槽を用いた 2 次元の実験で Cross-Wave が現われることはよく知られているが、円筒型水槽ではこれがどのような形で現われるかということを調べるのもこの研究の目的のひとつであった。

理論解は、上層流体と下層流体にそれぞれ別個の速度ポテンシャルを用い、Perturbation 法により第 2 近似解まで求めた。

実験は、上層流体にテレピン油、下層流体に水を使用し、水槽全体を水平に単振動させることによって定常的な波をおこし、波高計によって測定した。その結果、理論値と実験値は非常によい一致をみた。また、第 1 近似

波の共振点に近い強制振動周期で、突然波高が大きくなり、鉛直中心軸のまわりに波が回転をはじめる現象がみられたが、これについては理論的説明はできなかった。

### 2. 理 論 解

#### (1) 基礎方程式および単位の波

流体を非圧縮、非粘性、非回転と仮定し、速度ポテンシャル  $\phi$  を用いると、連続の式は次のように書かれる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots(1)$$

また、壁面での速度の法線成分は 0 であるから、

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ (壁面で)} \dots\dots\dots(2)$$

式 (1) の解のうち式 (2) の条件を満しえない項を除外し、さらに  $\phi$  が水槽内で特異点をもつような項を除外すると、 $\phi$  は次のようにおくことができる。

$$\phi = J_n(kr) \cdot \cos(n\theta + \alpha) \{Ae^{kz} + A'e^{-kz}\} \cdot T(t) \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 $J_n(kr)$  は第 1 種 Bessel-Function、 $T(t)$  は時間のみ関数、 $\alpha$  および  $A, A'$  は任意定数、 $k$  は  $\phi$  が式 (2) の条件を満しうるような値である。

#### (2) 上層流体が自由表面をもたない場合の解

図-1 (a) のような記号を使用する。ただし、上層流体に関する記号には添字  $a$  を、下層流体に関する記号には添字  $b$  をつけている。

式を簡略化するために、これ以降、偏微分を添字で表わす。たとえば、 $\phi_{at}$  は上層流体の速度ポテンシャルを時間で偏微分したことを表わす。境界条件式は次のとおりである。

$$\rho_a \left[ \phi_{at} - g \eta - \frac{1}{2} \left( \phi_{ar^2} + \frac{1}{r^2} \phi_{a\theta^2} + \phi_{az^2} \right) \right]$$

\* 学生会員 東京工業大学大学院学生  
\*\* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

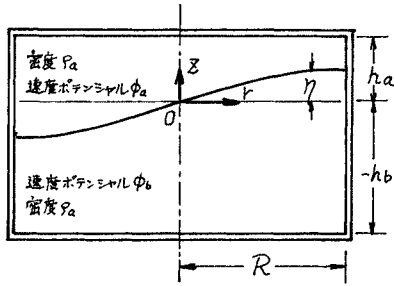


図-1 (a)

$$\left. \begin{aligned} -\rho_a Q_a - \rho_b \left[ \phi_{bt} - g \eta - \frac{1}{2} \left( \phi_{br}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{b\theta}^2 + \phi_{bz}^2 \right) - \rho_b Q_b \right] &= 0 \quad (z=\eta) \\ \eta_t - \phi_{ar} \eta_r - \frac{1}{r^2} \phi_{a\theta} \eta_\theta + \phi_{az} &= 0 \quad (z=\eta) \\ \eta_t - \phi_{br} \eta_r - \frac{1}{r^2} \phi_{b\theta} \eta_\theta + \phi_{bz} &= 0 \quad (z=\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} -\phi_{az} &= 0 \quad (z=h_a) \quad -\phi_{bz} = 0 \quad (z=h_b) \\ -\phi_{ar} &= 0 \quad (r=R) \quad -\phi_{br} = 0 \quad (r=R) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

Q は外力ポテンシャル, Q<sub>a</sub>, Q<sub>b</sub> は時間のみの関数である。式 (5) を満たすような φ<sub>a</sub>, φ<sub>b</sub> を次のようにおく。

$$\phi_a = \sum_l \sum_m \sum_n A_{lmn} J_n(k_m r) \cos(n\theta + \alpha_{lmn}) \cdot \cosh\{k_m(h_a - z)\} \cdot \cos(l\sigma_0 t + \alpha_{lmn}') \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi_b = \sum_l \sum_m \sum_n B_{lmn} J_n(k_m r) \cos(n\theta + \beta_{lmn}) \cdot \cosh\{k_m(h_b - z)\} \cdot \cos(l\sigma_0 t + \beta_{lmn}') \dots\dots\dots (7)$$

l, n は 0, 1, ..., m は 1, 2, ...。また, 時間について周期的であるとし, σ<sub>0</sub> は角振動数である。

一方, φ<sub>a</sub>, φ<sub>b</sub>, η, Q<sub>a</sub>, Q<sub>b</sub> は式 (8) のような級数の形で表わされるとする。ただし, 添字 0 の項は 1 のオーダー, 添字 1 の項は微小数 ε のオーダー, 添字 2 の項は, ε<sup>2</sup> のオーダー, 以下順々に小さくなって収束するものとする。ここで微小パラメーター ε は, 添字 1 の波が単一の波であれば ka (k は波数, a は振幅) であるが, 式 (15), (16) に求められているように, この場合は無限のモードの波の複合であるので, ε の具体的な意味は, 代表的な波の ka であると考えておけばよい。しかし以下に述べる展開では ε の値は直接には必要ではなく, また, 求められた各オーダーの解が線型独立であれば, 各オーダーごとに境界条件式を満足するという解法と矛盾はしないので, ε 自体の具体的な意味はそれほど重要ではないと思われる<sup>11)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \phi_a &= \phi_{a1} + \phi_{a2} + \phi_{a3} + \dots \\ \phi_b &= \phi_{b1} + \phi_{b2} + \phi_{b3} + \dots \\ \eta_1 &= \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_a &= Q_{a0} + Q_{a1} + Q_{a2} + \dots \\ Q_b &= Q_{b0} + Q_{b1} + Q_{b2} + \dots \end{aligned} \right\}$$

また, φ<sub>a</sub>(η), φ<sub>b</sub>(η) を η=0 のまわりに Taylor 展開し, ε の各オーダーについてまとめると式 (9), (10) となる。

$$\phi_a(\eta) = \phi_{a1}(0) + \{\phi_{a2}(0) + \eta_1 \phi_{a1z}(0)\} + \dots\dots\dots (9)$$

$$\phi_b(\eta) = \phi_{b1}(0) + \{\phi_{b2}(0) + \eta_1 \phi_{b1z}(0)\} + \dots\dots\dots (10)$$

式 (8), (9), (10) を式 (4) に代入し, ε の各オーダーについてまとめると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^0 \text{ のオーダーについて,} \\ \rho_a Q_{a0} - \rho_b Q_{b0} &= 0 \\ \epsilon^1 \text{ のオーダーについて,} \\ \rho_a [\phi_{a1t} - g \eta_1 - \rho_a Q_{a1}] \\ - \rho_b [\phi_{b1t} - g \eta_1 - \rho_b Q_{b1}] &= 0 \dots\dots\dots (11) \\ \eta_{1t} + \phi_{a1z} = 0, \eta_{1t} + \phi_{b1z} = 0 \quad (z=0) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^2 \text{ のオーダーについて,} \\ \rho_a \left[ \phi_{a2t} + \eta_1 \phi_{a1tz} - g \eta_2 - \frac{1}{2} \left( \phi_{a1r}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{a1\theta}^2 + \phi_{a1z}^2 \right) + Q_{a2} \right] \\ - \rho_b \left[ \phi_{b2t} + \eta_1 \phi_{b1tz} - g \eta_2 - \frac{1}{2} \left( \phi_{b1r}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{b1\theta}^2 + \phi_{b1z}^2 \right) + Q_{b2} \right] &= 0 \\ \eta_{2t} - \phi_{a1r} \eta_{1r} - \frac{1}{r^2} \phi_{a1\theta} \eta_{1\theta} + \phi_{a2z} + \eta_1 \phi_{a1zz} &= 0 \\ \eta_{2t} - \phi_{b1r} \eta_{1r} - \frac{1}{r^2} \phi_{b1\theta} \eta_{1\theta} + \phi_{b2z} + \eta_1 \phi_{b1zz} &= 0 \quad (z=0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

実験では, 水槽全体を水平方向に単振動させる。変位の振幅を C<sub>0</sub> とすると, 水槽の変位量 L は次式となる。

$$L = C_0 \sin \sigma t$$

これより Q を求めると,

$$\left. \begin{aligned} Q &= \int \frac{d^2 L}{dt^2} dx = -C_0 \sigma^2 r \cos \theta \cdot \sin \sigma t \\ &= -\sum_m C_0 C_m \sigma^2 J_1(k_m r) \cos \theta \cdot \sin \sigma t \dots\dots\dots (13) \\ C_m &= \frac{2 k_m R^2 \cdot J_2(k_m R)}{J_1^2(k_m R) \{ (k_m R)^2 - 1 \}} \end{aligned} \right\}$$

式 (13) のように, Q が J<sub>1</sub>(k<sub>m</sub>r) cos θ の形で表わされるので, 第 1 近似波と速度ポテンシャルを次のようにおく。

$$\eta_1 = \sum_m a_{1m} J_1(k_m r) \cdot \cos \theta \cdot \sin \sigma t \dots\dots\dots (14)$$

$$\phi_{a1} = \sum_m A_{1m} \cdot J_1(k_m r) \cdot \cos \theta \cdot \cosh\{k_m(h_a - z)\} \cos \sigma t \dots\dots\dots (15)$$

$$\phi_{b1} = \sum_m B_{1m} \cdot J_1(k_m r) \cdot \cos \theta \cdot \cosh\{k_m(h_b - z)\} \cos \sigma t \dots\dots\dots (16)$$

円型水槽内 2 層流体における内部波について

式 (14), (15), (16) を式 (11) に代入すると次の解を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_{1m} &= \frac{-(\rho_b - \rho_a) C_0 C_m \sigma^2}{\frac{\sigma^2}{k_m} \{ \rho_a \cdot \coth(k_m h_a) - \rho_b \cdot \coth(k_m h_b) \} - (\rho_b - \rho_a) g} \\ A_{1m} &= \frac{\sigma a_{1m}}{k_m \cdot \sinh(k_m h_a)} \\ B_{1m} &= \frac{\sigma a_{1m}}{k_m \cdot \sinh(k_m h_b)} \\ &\dots\dots\dots(17) \end{aligned} \right\}$$

ここまで導いた式は第 1 近似波のすべてのモードを含んでいるので、式 (14)~(17) を式 (12) に代入すれば、第 2 近似波に関する一般式が得られる。このような非線型の計算が、一般的にはどのように実際の現象と一致するかということも学問的には興味のある問題である。しかし、工学上は第 1 近似波の共振点付近における波が重大な役割を演ずると考えられる。第 1 近似波の第  $m$  モードの波の共振点付近では、第 2 近似波のうちでは、第  $m$  モードの波の自己干渉による波が卓越している。そこで第 2 近似波については、第 1 近似波の自己干渉による波のみを求めことにする。

式 (17) を式 (12) に代入すると、第 1 近似の第  $m$  モードの波の自己干渉によっておこる第 2 近似波について次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} g \eta_2 + \frac{\rho_a \phi_{a2t} - \rho_b \phi_{b2t}}{\rho_b - \rho_a} &= \frac{\sigma^2 a_{1m}^2}{16} [2 J_1^2(k_m r) \\ &+ \hat{\rho}_{1m} \{ J_0^2(k_m r) + J_2^2(k_m r) \}] \\ &+ \frac{\sigma^2 a_{1m}^2}{16} [2 J_1^2(k_m r) + \hat{\rho}_{1m} \{ J_0^2(k_m r) \\ &+ J_2^2(k_m r) \}] \cos 2\sigma t + \frac{\sigma^2 a_{1m}^2}{8} [J_1^2(k_m r) \\ &+ \hat{\rho}_{1m} J_0(k_m r) J_2(k_m r)] \cos 2\theta \\ &+ \frac{\sigma^2 a_{1m}^2}{8} [J_1^2(k_m r) \\ &+ \hat{\rho}_{1m} J_0(k_m r) J_2(k_m r)] \cos 2\theta \cos 2\sigma t \\ &+ T_m \quad (z=0) \\ \eta_{2t} + \phi_{a2z} &= \frac{\sigma k_m a_{1m}^2}{8} \coth(k_m h_a) G_1(k_m r) \sin 2\sigma t \\ &- \frac{\sigma k_m a_{1m}^2}{4} \coth(k_m h_a) G_2(k_m r) \cos 2\theta \sin 2\sigma t \\ &\quad (z=0) \\ \eta_{2t} + \phi_{b2z} &= \frac{\sigma k_m a_{1m}^2}{8} \coth(k_m h_b) G_1(k_m r) \sin 2\sigma t \\ &- \frac{\sigma k_m a_{1m}^2}{4} \coth(k_m h_b) G_2(k_m r) \cos 2\theta \sin 2\sigma t \\ &\quad (z=0) \\ &\dots\dots\dots(18) \end{aligned} \right\}$$

$T_m$  はオイラー式を空間で積分するときの積分定数に相当するもので、すべてのモードの  $T_m$  を加えれば

$(\rho_b Q_{b2} - \rho_a Q_{a2})$  に等しくなる。

$$\text{また, } \hat{\rho}_{1m} = \frac{\rho_a \coth^2(k_m h_a) - \rho_b \coth^2(k_m h_b)}{\rho_b - \rho_a}$$

$$G_1(k_m r) = J_0^2(k_m r) + J_2^2(k_m r) - 2 J_1^2(k_m r)$$

$$G_2(k_m r) = J_0(k_m r) \cdot J_2(k_m r) + J_1^2(k_m r)$$

第 2 近似波とポテンシャルを次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 &= \eta_2'(r, \theta) + \sum_i a_{20i} J_0(k_i r) \cos 2\sigma t \\ &+ \sum_j a_{22j} J_2(k_j r) \cos 2\theta \cdot \cos 2\sigma t \\ \phi_{a2} &= \sum_i A_{20i} J_0(k_i r) \cosh\{k_i(h_a - z)\} \sin 2\sigma t \\ &+ \sum_j A_{22j} J_2(k_j r) \cosh\{k_j(h_a - z)\} \\ &\quad \cdot \cos 2\theta \sin 2\sigma t \\ \phi_{b2} &= \sum_i B_{20i} J_0(k_i r) \cosh\{k_i(h_b - z)\} \sin 2\sigma t \\ &+ \sum_j B_{22j} J_2(k_j r) \cosh\{k_j(h_b - z)\} \\ &\quad \cdot \cos 2\theta \sin 2\sigma t \\ &\dots\dots\dots(19) \end{aligned} \right\}$$

以後の式を簡略化するために、式 (18) の右辺各項を次のようにおきかえる。

$$\left. \begin{aligned} I_{10}(r) &= \frac{\sigma^2 a_{1m}^2}{16} [2 J_1^2(k_m r) \\ &+ \hat{\rho}_{1m} \{ J_0^2(k_m r) + J_2^2(k_m r) \}] \\ I_{12}(r) &= \frac{\sigma^2 a_{1m}^2}{8} [J_1^2(k_m r) + \hat{\rho}_{1m} J_0(k_m r) \cdot J_2(k_m r)] \\ I_{20}(r) &= \frac{\sigma k_m a_{1m}^2}{8} \coth(k_m h_a) G_1(k_m r) \\ I_{22}(r) &= -\frac{\sigma k_m a_{1m}^2}{4} \coth(k_m h_a) G_2(k_m r) \\ I_{30}(r) &= \frac{\sigma k_m a_{1m}^2}{8} \coth(k_m h_b) G_1(k_m r) \\ I_{32}(r) &= -\frac{\sigma k_m a_{1m}^2}{4} \coth(k_m h_b) G_2(k_m r) \\ &\dots\dots\dots(20) \end{aligned} \right\}$$

$I_{10}(r), I_{20}(r), I_{30}(r)$  を  $r=R$  で  $\frac{\partial}{\partial r} \{J_0(k_i r)\} = 0$  となる  $k_i$  について Bessel-Fourier 展開を行なう。同様に  $I_{12}(r), I_{22}(r), I_{32}(r)$  を  $r=R$  で  $\frac{\partial}{\partial r} \{J_2(k_j)\} = 0$  となる  $k_j$  について Bessel-Fourier 展開を行なう。

$$\left. \begin{aligned} I_{10}(r) &= \sum_i I_{10i} J_0(k_i r) & I_{12}(r) &= \sum_j I_{12j} J_2(k_j r) \\ I_{20}(r) &= \sum_i I_{20i} J_0(k_i r) & I_{22}(r) &= \sum_j I_{22j} J_2(k_j r) \\ I_{30}(r) &= \sum_i I_{30i} J_0(k_i r) & I_{32}(r) &= \sum_j I_{32j} J_2(k_j r) \\ &\dots\dots\dots(21) \end{aligned} \right\}$$

式 (18) に (19)~(21) の各式を代入すると、式 (19) の各波の振幅係数  $a_{20i}, a_{22j}$ , ポテンシャル係数  $A_{20i}, B_{20i}, A_{22j}, B_{22j}$  は次式の根として表わされる。

$$\left[ \begin{array}{ccc} g, & \frac{2\sigma\rho_a}{\rho_b - \rho_a} \cosh(k_i h_a), & \frac{-2\sigma\rho_b}{\rho_b - \rho_a} \cosh(k_i h_b) \\ -2\sigma, & -k_i \sinh(k_i h_a), & 0 \\ -2\sigma, & 0, & -k_i \sinh(k_i h_b) \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \begin{bmatrix} a_{20i} \\ A_{20i} \\ B_{20i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{10i} \\ I_{20i} \\ I_{30i} \end{bmatrix} \\ & \left[ \begin{array}{ccc} g, & \frac{2\sigma\rho_a}{\rho_b-\rho_a} \cosh(k_j h_a), & \frac{-2\sigma\rho_b}{\rho_b-\rho_a} \cosh(k_j h_b) \\ -2\sigma, & -k_j \sinh(k_j h_a), & 0 \\ -2\sigma, & 0, & -k_j \sinh(k_j h_b) \end{array} \right] \\ & \times \begin{bmatrix} a_{22j} \\ A_{22j} \\ B_{22j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{12j} \\ I_{22j} \\ I_{32j} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

平均水位面  $\eta_2'(r, \theta)$  は次式で表わされる。

$$\eta_2'(r, \theta) = \frac{1}{g} \{I_{10}(r) + I_{12}(r) \cos 2\theta - I_{10,0}\}$$

また  $T_m$  は次式で表わされる。

$$T_m = -I_{10,0}(1 + \cos 2\theta)$$

(3) 上層流体が自由表面をもつ場合の解

図-1 (b) のように記号を使用する。境界条件式は次のとおりである。

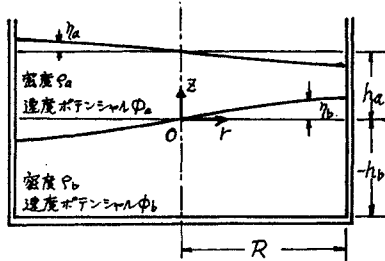


図-1 (b)

$$\left. \begin{aligned} & \phi_{at} - g(h_a + \eta_a) - \frac{1}{2}(\phi_{ar}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{a\theta}^2 + \phi_{az}^2) \\ & + Q_a - \mathcal{L} = 0 \quad (z = h_a + \eta_a) \\ & \eta_{at} - \phi_{ar}\eta_{ar} - \frac{1}{r^2} \phi_{a\theta}\eta_{a\theta} + \phi_{az} = 0 \quad (z = h_a + \eta_a) \\ & \rho_a \left\{ \phi_{at} - g\eta_b - \frac{1}{2}(\phi_{ar}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{a\theta}^2 + \phi_{az}^2) - \mathcal{L} + Q_a \right\} \\ & - \rho_b \left\{ \phi_{bt} - g\eta_b - \frac{1}{2}(\phi_{br}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{b\theta}^2 + \phi_{bz}^2) - \mathcal{L} + Q_b \right\} \\ & = 0 \quad (z = \eta_b) \\ & \eta_{bt} - \phi_{ar}\eta_{br} - \frac{1}{r^2} \phi_{a\theta}\eta_{b\theta} + \phi_{az} = 0 \quad (z = \eta_b) \\ & \eta_{bt} - \phi_{br}\eta_{br} - \frac{1}{r^2} \phi_{b\theta}\eta_{b\theta} + \phi_{bz} = 0 \quad (z = \eta_b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

前と同様に、各変数を級数の形におき、式 (23) を  $\epsilon$  の各オーダーについてまとめると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \cdot \epsilon^0 \text{ のオーダーについては,} \\ & \left. \begin{array}{l} -gh_a + Q_{a0} = 0 \quad (z = h_a), \\ \rho_a Q_{a0} - \rho_b Q_{b0} = 0 \quad (z = 0) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

$$\left. \begin{aligned} & \cdot \epsilon^1 \text{ のオーダーについては,} \\ & \left. \begin{array}{l} \phi_{a1t} - g\eta_{a1} - \mathcal{L} + Q_{a1} = 0, \quad \eta_{a1t} + \phi_{a1z} = 0 \quad (z = h_a) \\ \rho_a \{ \phi_{a1t} - g\eta_{b1} - \mathcal{L} + Q_{a1} \} \\ \quad - \rho_b \{ \phi_{b1t} - g\eta_{b1} - \mathcal{L} + Q_{b1} \} = 0 \quad (z = 0) \\ \eta_{b1t} + \phi_{a1z} = 0 \quad (z = 0), \quad \eta_{b1t} + \phi_{b1z} = 0 \quad (z = 0) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

$$\left. \begin{aligned} & \cdot \epsilon^2 \text{ のオーダーについては,} \\ & \left. \begin{array}{l} \phi_{a2t} + \eta_{a1}\phi_{a1tz} - g\eta_{a2} - \frac{1}{2}(\phi_{a1r}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{a1\theta}^2 + \phi_{a1z}^2) \\ \quad + Q_{a2} = 0 \quad (z = h_a) \\ \eta_{a2t} - \phi_{a1r}\eta_{a1r} - \frac{1}{r^2} \phi_{a1\theta}\eta_{a1\theta} + \phi_{a2z} + \eta_{b1}\phi_{a1z} \\ \quad = 0 \quad (z = h_a) \\ \rho_a \left\{ \phi_{a2t} + \eta_{b1}\phi_{a1tz} - g\eta_{b2} - \frac{1}{2}(\phi_{a1r}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{a1\theta}^2 \right. \\ \quad \left. + \phi_{a1z}^2) + Q_{a2} \right\} \\ - \rho_b \left\{ \phi_{b2t} + \eta_{b1}\phi_{b1tz} - g\eta_{b2} - \frac{1}{2}(\phi_{b1r}^2 + \frac{1}{r^2} \phi_{b1\theta}^2 \right. \\ \quad \left. + \phi_{b1z}^2) + Q_{b2} \right\} = 0 \quad (z = 0) \\ \eta_{b2t} - \phi_{a1r}\eta_{b1r} - \frac{1}{r^2} \phi_{a1\theta}\eta_{b1\theta} + \phi_{a2z} + \eta_{b1}\phi_{a1z} \\ \quad = 0 \quad (z = 0) \\ \eta_{b2t} - \phi_{b1r}\eta_{b1r} - \frac{1}{r^2} \phi_{b1\theta}\eta_{b1\theta} + \phi_{b2z} + \eta_{b1}\phi_{b1z} \\ \quad = 0 \quad (z = 0) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

$\epsilon^0$  のオーダーについて解くと、 $Q_{a0}, Q_{b0}$  は次式となる。

$$Q_{a0} = gh_a, \quad Q_{b0} = \frac{\rho_a}{\rho_b} gh_a$$

前と同様に、第1近似波を  $J_1(k_m r) \cos \theta$  の形とし次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} & \eta_{a1} = \sum_m a_{1m} J_1(k_m r) \cos \theta \cdot \sin \sigma t \\ & \eta_{b1} = \sum_m b_{1m} J_1(k_m r) \cos \theta \cdot \sin \sigma t \\ & \phi_{a1} = \sum_m J_1(k_m r) \cos \theta \{ A_{1m} e^{k_m z} + \bar{A}_{1m} e^{-k_m z} \} \cos \sigma t \\ & \phi_{b1} = \sum_m B_{1m} J_1(k_m r) \cos \theta \cdot \cosh \{ k_m (h_b - z) \} \cos \sigma t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

式 (27) を式 (25) に代入すると、波の振幅係数およびポテンシャル係数は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} & a_{1m} = \frac{C_0 C_m \sigma^2 k_m [(\rho_b - \rho_a) \sigma^2 + \sinh(k_m h_a)]}{[\rho_a \{g^2 k_m^2 - \sigma^4\} + \rho_b \{ \sigma^2 \coth(k_m h_a) \\ & \quad \cdot \frac{\{\rho_a (\sigma^2 \coth(k_m h_a) + g k_m) - g k_m \} \{ \sigma^2 \coth(k_m h_b) \\ & \quad \cdot \frac{-\rho_b (\sigma^2 \coth(k_m h_b) + g k_m) \} ] \sinh(k_m h_a)}{-g k_m} \}} \\ & b_{1m} = \left\{ \cosh(k_m h_a) - \frac{g k_m}{\sigma^2} \sinh(k_m h_a) \right\} a_{1m} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + k_m C_0 C_m \sinh(k_m h_a) \\
 A_{1m} = & - \left\{ \left( \frac{g}{\sigma} + \frac{\sigma}{k_m} \right) a_{1m} - C_0 C_m \sigma \right\} \frac{e^{-k_m h_a}}{2} \\
 \bar{A}_{1m} = & - \left\{ \left( \frac{g}{\sigma} - \frac{\sigma}{k_m} \right) a_{1m} - C_0 C_m \sigma \right\} \frac{e^{k_m h_a}}{2} \\
 B_{1m} = & \frac{\left\{ \frac{\sigma}{k_m} \cosh(k_m h_a) - \frac{g}{\sigma} \sinh(k_m h_a) \right\} a_{1m}}{\sinh(k_m h_b)} \\
 & + C_0 C_m \sigma \sinh(k_m h_a) \\
 & \dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

前と同様に、第2近似波は、第1近似波の第  $m$  モードの自己干渉によってできる波について解く。

式(28)を式(26)に代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \phi_{a2t} - g \eta_{a2} = & \frac{g^2 k_m^2 a_{1m}^2}{16 \sigma^2} \left[ J_0^2(k_m r) + J_2^2(k_m r) \right. \\
 & \left. - 2 \frac{\sigma^4}{g^2 k_m^2} J_1^2(k_m r) \right] \\
 & + \frac{g^2 k_m^2 a_{1m}^2}{16 \sigma^2} \left[ J_0^2(k_m r) + J_2^2(k_m r) \right. \\
 & \left. + 6 \frac{\sigma^4}{g^2 k_m^2} J_1^2(k_m r) \right] \cos 2 \sigma t \\
 & - \frac{g^2 k_m^2 a_{1m}^2}{8 \sigma^2} \left[ J_0(k_m r) \cdot J_2(k_m r) \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma^4}{g^2 k_m^2} J_1^2(k_m r) \right] \cos 2 \theta \\
 & - \frac{g^2 k_m^2 a_{1m}^2}{8 \sigma^2} \left[ J_0(k_m r) \cdot J_2(k_m r) \right. \\
 & \left. - 3 \frac{\sigma^4}{g^2 k_m^2} J_1^2(k_m r) \right] \cos 2 \theta \cos 2 \sigma t \\
 & - T_{am} \quad (z = h_a) \\
 \eta_{a2t} + \phi_{a2z} = & - \frac{g k_m^2 a_{1m}^2}{8 \sigma} \{ G_1(k_m r) \sin 2 \sigma t \\
 & - 2 G_2(k_m r) \cos 2 \theta \sin 2 \sigma t \} \quad (z = h_a) \\
 \frac{\rho_a \phi_{a2t} - \rho_b \phi_{b2t}}{\rho_a - \rho_b} - g \eta_{b2} \\
 = & \frac{g^2 k_m^2 a_{1m}^2}{16 \sigma^2} [\hat{\rho}_{2m} \{ J_0^2(k_m r) \\
 & + J_2^2(k_m r) \} - 2 Q_m^2 J_1^2(k_m r)] \\
 & + \frac{g^2 k_m^2 a_{1m}^2}{16 \sigma^2} [\hat{\rho}_{2m} \{ J_0^2(k_m r) \\
 & + J_2^2(k_m r) \} + 6 Q_m^2 J_1^2(k_m r)] \cos 2 \sigma t \\
 & - \frac{g^2 k_m^2 a_{1m}^2}{8 \sigma^2} [\hat{\rho}_{2m} J_0(k_m r) \cdot J_2(k_m r) \\
 & + Q_m^2 J_1^2(k_m r)] \cos 2 \theta \\
 & - \frac{g^2 k_m^2 a_{1m}^2}{8 \sigma^2} [\hat{\rho}_{2m} J_0(k_m r) \cdot J_2(k_m r) \\
 & - 3 Q_m^2 J_1^2(k_m r)] \cos 2 \theta \cos 2 \sigma t \\
 & - T_{bm} \quad (z=0) \\
 \eta_{b2t} + \phi_{a2z} = & \frac{g^2 k_m^3 a_{1m}^2}{8 \sigma^3} P_m Q_m \{ G_1(k_m r) \sin 2 \sigma t \\
 & - 2 G_2(k_m r) \cos 2 \theta \sin 2 \sigma t \} \quad (z=0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{b2t} + \phi_{b2z} = & \frac{g^2 k_{1m}^3 a_{1m}^2}{8 \sigma^3} Q_m^2 \coth(k_m h_b) \\
 & \cdot \{ G_1(k_m r) \sin 2 \sigma t \\
 & - 2 G_2(k_m r) \cos 2 \theta \sin 2 \sigma t \} \quad (z=0) \\
 & \dots\dots\dots(29)
 \end{aligned}$$

ここで  $T_{am}$ ,  $T_{bm}$  は時間のみの関数であり、式(18)における  $T_m$  と同様の項である。

また、

$$\hat{\rho}_{2m} = \frac{\rho_a P_m^2 - \rho_b Q_m^2 \coth^2(k_m h_b)}{\rho_a - \rho_b}$$

$$P_m = \frac{\sigma^2}{g k_m} \sinh(k_m h_a) - \cosh(k_m h_a)$$

$$Q_m = \frac{\sigma^2}{g k_m} \cosh(k_m h_a) - \sinh(k_m h_a)$$

第2近似波とポテンシャルを次のようにおく。

$$\eta_{a2} = \eta_{a2}'(r, \theta) + \sum_i a_{20i} J_0(k_i r) \cos 2 \sigma t$$

$$+ \sum_j a_{22j} J_2(k_j r) \cos 2 \theta \cos 2 \sigma t$$

$$\eta_{b2} = \eta_{b2}'(r, \theta) + \sum_i b_{20i} J_0(k_i r) \cos 2 \sigma t$$

$$+ \sum_j b_{22j} J_2(k_j r) \cos 2 \theta \cos 2 \sigma t$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{a2} = & \sum_i J_0(k_i r) \{ A_{20i} e^{k_i z} + \bar{A}_{20i} e^{-k_i z} \} \sin 2 \sigma t \\
 & + \sum_j J_2(k_j r) \cos 2 \theta \{ A_{22j} e^{k_j z} + \bar{A}_{22j} e^{-k_j z} \} \sin 2 \sigma t \\
 \phi_{b2} = & \sum_i B_{20i} J_0(k_i r) \cosh \{ k_i (h_b - z) \} \sin 2 \sigma t \\
 & + \sum_j B_{22j} J_2(k_j r) \cos 2 \theta \cdot \cosh \{ k_j (h_b - z) \} \sin 2 \sigma t \\
 & \dots\dots\dots(30)
 \end{aligned}$$

以後の式を簡略にするために、前と同様に、式(29)の右辺各項を次のように書きかえる。

$$\begin{aligned}
 \phi_{a2t} - g \eta_{a2} = & I_{11}(r) + I_{12}(r) \cos 2 \sigma t \\
 & + I_{13}(r) \cos 2 \theta + I_{14}(r) \cos 2 \theta \cos 2 \sigma t \quad (z = h_a) \\
 \eta_{a2t} + \phi_{a2z} = & I_{22}(r) \sin 2 \sigma t \\
 & + I_{24}(r) \cos 2 \theta \sin 2 \sigma t \quad (z = h_a) \\
 \frac{\rho_a \phi_{a2t} - \rho_b \phi_{b2t}}{\rho_a - \rho_b} - g \eta_{b2} \\
 = & I_{31}(r) + I_{32}(r) \cos 2 \sigma t + I_{33}(r) \cos 2 \theta \\
 & + I_{34}(r) \cos 2 \theta \cdot \cos 2 \sigma t \quad (z=0) \\
 \eta_{b2t} + \phi_{a2z} = & I_{42}(r) \sin 2 \sigma t \\
 & + I_{44}(r) \cos 2 \theta \sin 2 \sigma t \quad (z=0) \\
 \eta_{b2t} + \phi_{b2z} = & I_{52}(r) \sin 2 \sigma t \\
 & + I_{54}(r) \cos 2 \theta \sin 2 \sigma t \quad (z=0) \\
 & \dots\dots\dots(31)
 \end{aligned}$$

各  $I(r)$  を次のように展開する。

$$\begin{aligned}
 I_{11}(r) = & \sum_i I_{11i} J_0(k_i r) & I_{12}(r) = & \sum_i I_{12i} J_0(k_i r) \\
 I_{13}(r) = & \sum_j I_{13j} J_2(k_j r) & I_{14}(r) = & \sum_j I_{14j} J_2(k_j r) \\
 I_{22}(r) = & \sum_i I_{22i} J_0(k_i r) & I_{24}(r) = & \sum_j I_{24j} J_2(k_j r) \\
 I_{31}(r) = & \sum_i I_{31i} J_0(k_i r) & I_{32}(r) = & \sum_i I_{32i} J_0(k_i r) \\
 I_{33}(r) = & \sum_j I_{33j} J_2(k_j r) & I_{34}(r) = & \sum_j I_{34j} J_2(k_j r)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} I_{42}(r) &= \sum_i I_{42i} J_0(k_i r) & I_{44}(r) &= \sum_j I_{44j} J_2(k_j r) \\ I_{52}(r) &= \sum_i I_{52i} J_0(k_i r) & I_{54}(r) &= \sum_j I_{54j} J_2(k_j r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

式 (30)~(32) の関係を式 (29) に代入すると、式 (30) の各波の振幅係数  $a_{20i}, a_{22j}, b_{20i}, b_{22j}$  およびポテンシャル係数、 $A_{20i}, \bar{A}_{20i}, B_{20i}, A_{22j}, \bar{A}_{22j}, B_{22j}$  は次式の根として表わされる。

$$\begin{bmatrix} 2\sigma e^{k_i h_a} & 2\sigma e^{-k_i h_a} & -g & 0 & 0 \\ k_i e^{k_i h_a} & -k_i e^{-k_i h_a} & -2\sigma & 0 & 0 \\ \frac{2\sigma\rho_a}{\rho_a-\rho_b} & \frac{2\sigma\rho_a}{\rho_a-\rho_b} & 0 & \frac{\rho_a-\rho_b}{\rho_a-\rho_b} \cosh(k_i h_b) & -g \\ k_i & -k_i & 0 & 0 & -2\sigma \\ 0 & 0 & 0 & -k_i \sinh(k_i h_b) & -2\sigma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{20i} \\ \bar{A}_{20i} \\ a_{20i} \\ B_{20i} \\ b_{20i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{12i} \\ I_{22i} \\ I_{32i} \\ I_{42i} \\ I_{52i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\sigma e^{k_j h_a} & 2\sigma e^{-k_j h_a} & -g & 0 & 0 \\ k_j e^{k_j h_a} & -k_j e^{-k_j h_a} & -2\sigma & 0 & 0 \\ \frac{2\sigma\rho_a}{\rho_a-\rho_b} & \frac{2\sigma\rho_a}{\rho_a-\rho_b} & 0 & \frac{-2\sigma\rho_b}{\rho_a-\rho_b} \cosh(k_j h_b) & -g \\ k_j & -k_j & 0 & 0 & -2\sigma \\ 0 & 0 & 0 & -k_j \sinh(k_j h_b) & -2\sigma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{22j} \\ \bar{A}_{22j} \\ a_{22j} \\ B_{22j} \\ b_{22j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{14j} \\ I_{24j} \\ I_{34j} \\ I_{44j} \\ I_{54j} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

平均水位面  $\eta_{a2}'(r, \theta), \eta_{b2}'(r, \theta)$  は次式で表わされる。

$$\eta_{a2}' = -\frac{1}{g} \{I_{11}(r) + I_{12}(r) \cos 2\theta - I_{11.0}\}$$

$$\eta_{b2}' = \frac{1}{g(\rho_b - \rho_a)} \{I_{31}(r) + I_{32}(r) \cos 2\theta - I_{31.0}\}$$

また、 $T_{am} = I_{11.0} + I_{12.0} \cos 2\sigma t$   
 $T_{bm} = I_{31.0} + I_{32.0} \cos 2\sigma t$

### 3. 実験方法および実験結果

前節までに得られた結果の妥当性を調べるために、以

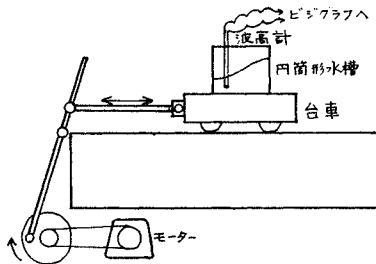


図-2 実験装置

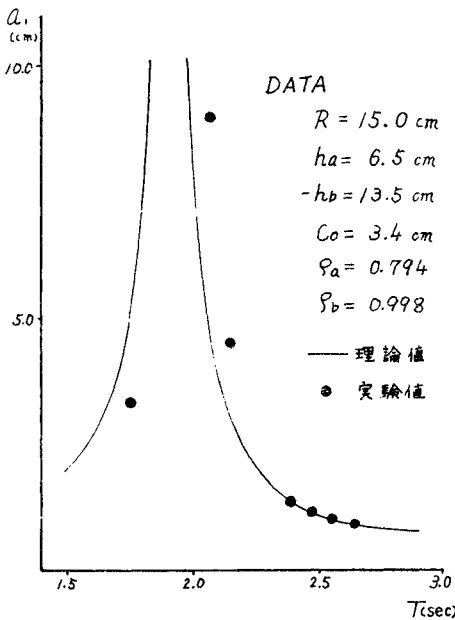


図-3 (a)

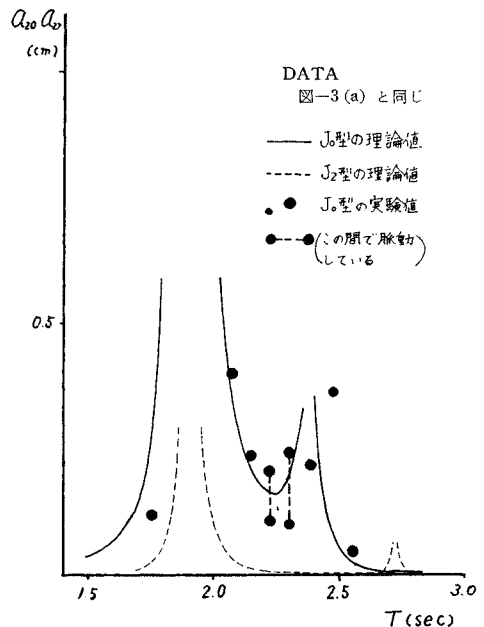


図-3 (b)

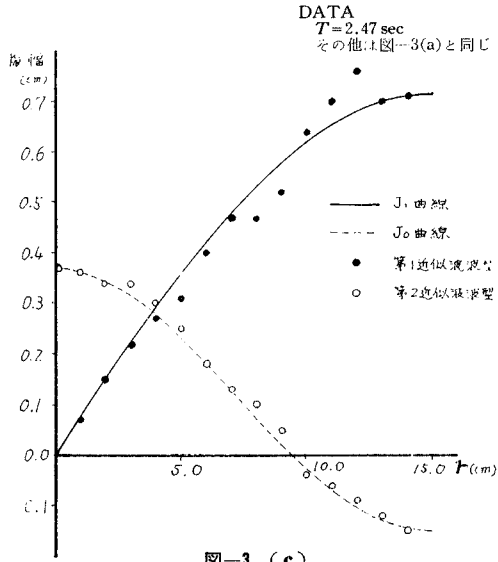


図-3 (c)

下のように実験を行なった。

- 1) 半径  $R=15$  cm, 高さ  $H=20$  cm の透明アクリル製円筒形水槽を, 図-2 のような機構で往復運動させる。
- 2) 強制振動方向に, 中心から壁面まで 1 cm おきに波高計を移動させて, 各点の内部境界面の変位を一周期以上記録する。
- 3) 時間に関して Fourier 展開することにより, 各周期の波を分離する。
- 4) 各点における各周期の波による変位をつなげて,

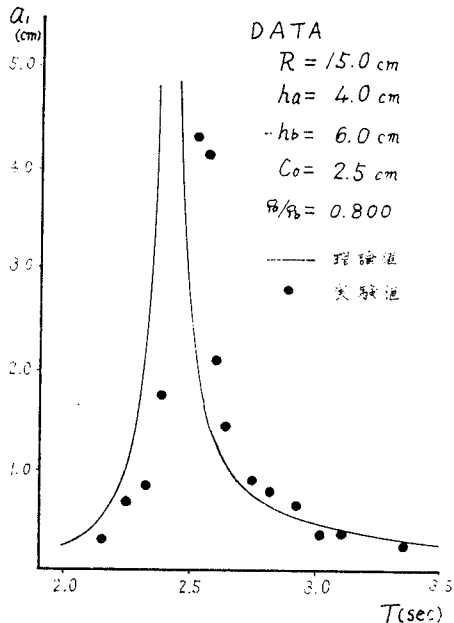


図-4 (a)

それぞれの波の波形を求める。

なお上層流体にテレピン油, 下層流体に水を使用した。

強制振動周期は, 第1近似波の第1モード(式(14)で  $m=1$  とした波) および第2近似波の  $J_0(k_1 r)$  型,

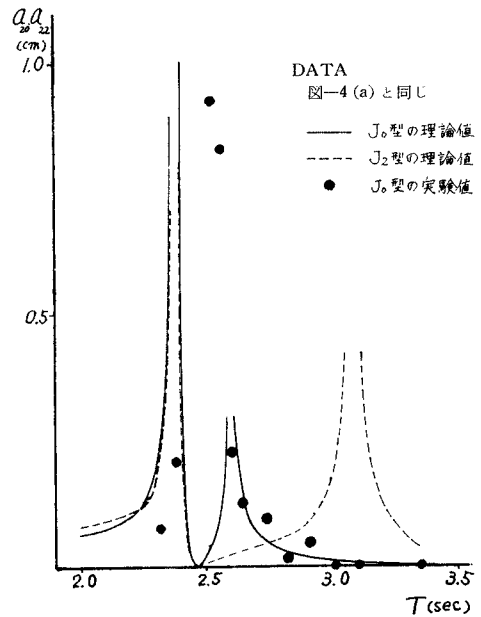


図-4 (b)

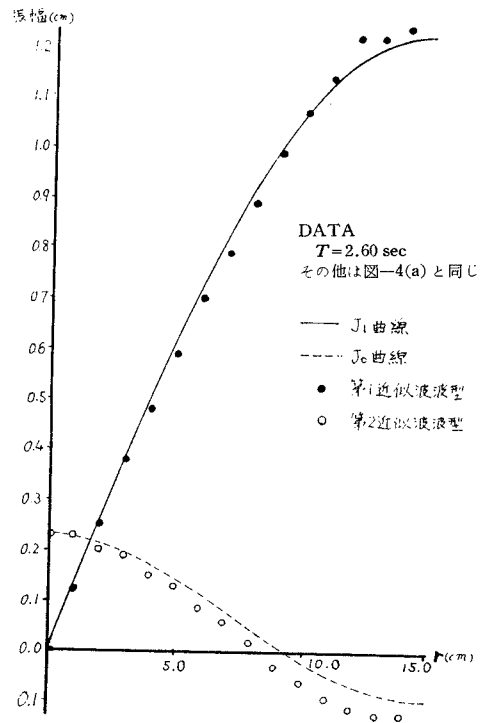


図-4 (c)

$J_2(k_j r) \cos 2\theta$  型の第1モード(式(30)で  $i=1, j=1$ )のそれぞれの共振周期を含む範囲とした(われわれの実験装置では、 $m=2$ 以上の高周波の波を共振させることはできない)。またこの範囲では、それぞれの第1モードの波が第2モード以下の波に比べて卓越しているの、理論計算では第2モード以下の波を省略した。なお、第2近似波のうち  $J_2(k_j r) \cos 2\theta$  型の波は検出されなかったので、グラフには  $J_0(k_i r)$  型の波についてのみプロットしてある。

- a) 上層流体が自由表面をもたない場合
- 1) 第1近似波の(振幅係数～周期)曲線  
…式(17)の  $a_{1m}$  ( $m=1$ ) について
  - 2) 第2近似波の(振幅係数～周期)曲線  
…式(22)の  $a_{20i}$  ( $i=1$ ) について
  - 3) 第1近似波, 第2近似波の波形
- b) 上層流体が自由表面をもつ場合
- 1) 第1近似波の(振幅係数～周期)曲線  
…式(28)の  $a_{1m}$  ( $m=1$ ) について
  - 2) 第2近似波の(振幅係数～周期)曲線  
…式(33)の  $a_{20i}$  ( $i=1$ ) について
  - 3) 第1近似波, 第2近似波の波形

#### 4. 結 論

内部波に限らず、波を3次的に完全に解くことはきわめてむずかしいが、ここでは円形の境界をもつ場合について、2次元の場合と同様の手法により比較的容易に求めることができた。図-3(a)、図-4(a)に示されたように、第1近似波は実際とかなりよく一致することがわかった。ここで注目すべきことは、実験で振幅が最大になる周期は理論解の共振周期とは異なって、前者が後者よりも若干長いことである。このことは矩形水槽の2次元の実験においても認められている<sup>9),10)</sup>。この理由としてはいろいろ考えられるが、たとえば粘性抵抗の影響は共振周期を変化させる。しかし、 $[m\ddot{x} + c\dot{x} + kx]$  のように抵抗が1次の形で入っているばね系に周期的bodyforceを加えた場合の最大振幅は、抵抗がないばね系の共振周期より若干短めの周期でおこることが知られており、本実験の結果とは逆である。また別の理由として、波の振幅が増大することによる内部境界面の非線型性によって、共振周期が振幅の関数となることがあげられる。角振動数  $\sigma$  を級数で表わして  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots$  とし Perturbation 法によって解くと、 $\sigma_1 = 0$   $\sigma_2 \propto a_1^2$  となる。したがって、 $\sigma_2$  までで近似すれば  $\sigma = \sigma_0 + ca_1^2$  ( $c$  は比例定数)、 $T \doteq T_0 \left(1 - \frac{c}{\sigma_0} a_1^2\right)$ 。ここで  $c$  が正であれば最大振幅を与える周期は共振周期よりも短くな

り、 $c$  が負になれば長くなる。2次元で上層流体が自由表面をもたない場合については Thorpe が求めており、 $c$  の正負は上層流体と下層流体の水深と波数  $k$  によって決まる<sup>2)</sup>。参考までに結果をあげれば、 $c$  が負になる条件は、

$$T_1 > \frac{3|1 - (T_2/T_1)|}{\sqrt{2(T_2/T_1)\{3(T_2/T_1)^2 - 4(T_2/T_1) + 3\}}} \dots\dots\dots (A)$$

- ただし、 $T_1 = \tanh(kh_1)$   
 $T_2 = \tanh(kh_2)$   
 $k =$  波数  
 $h_1 =$  上層流体厚さ  
 $h_2 =$  下層流体厚さ

もちろん、Thorpe の計算は純二次元の内部波に関するものであって、そのまま筆者らの実験に適用することはできない。しかし、ここで扱った軸対称の場合の結果が Thorpe の結果とそれほど異なるとも考えられない。そこで筆者らの実験値、 $h_1 = 6.5$  cm,  $h_2 = 13.5$  cm,  $k = 0.1227$  cm<sup>-1</sup> を用いて計算すると、 $T_1 = 0.663$ ,  $T_2 = 0.930$  となり Thorpe の式(A)の右辺は 0.398 となって、条件 ( $T_1 = 0.663 > 0.398$ ) を満している。したがって、 $C$  が負になって、筆者らの実験結果の傾向と一致している。

第2近似波の  $J_0(k_i r)$  型の波は、自由表面をもたない場合にはかなりよく一致しているといえる(図-3(b))。自由表面をもつ場合(図-4(b))は、理論計算では2つの極大点(短周期のほうは第1近似波の共振点、長周期のほうは第2近似波自身の共振点)が与えられるが、実験では1つの山になっている。これは、実験を行なった条件では2つの極大点の間隔がせまく、前述したような第1近似波の共振周期のずれによって重なってしまったのであらうと思われる。

第2近似波の  $J_2(k_j r) \cos 2\theta$  型の波は、今回の実験ではまったく観測できなかった。この理由としては次のように考えられる。

1.  $J_2(k_j r) \cos 2\theta$  型の波は物理的に発生しにくい。
2.  $J_2(k_j r) \cos 2\theta$  型の波は、何か理由があって今回の実験では発生しなかった。このことは必ずしも物理的に発生しないということを示すものではなく、まだ知られていない条件が整えば発生しうるものであるという考え方である。

ここで、計算に現われた波と実際の波との関係、すなわち、計算における  $J_2(k_j r) \cos 2\theta$  型の波の物理性が問題となる。しかし計算で現われた波は、いかに物理性がとりこまれていてもいわば数学的なものであり、その計算結果が物理実験によって確認されてはじめて物理的な裏付けが得られたといえるのである。ここで注目すべ



きことは、 $J_2(k_j r) \cos 2\theta$  型の波は、矩形水槽における実験で現われる Cross-Wave と形状が似ていることであり<sup>2), 9), 10)</sup>、この種の波の発生機構はまだよくわかっていない。

これに関連して重要な実験的発見がある。それは強制振動周期が第1近似波の共振周期に近いところで、内部波が鉛直中心軸のまわりに回転する現象が観測されたことである。これと同様の現象が表面波について観測された例が、埼玉大の嶋教授から筆者らに伝えられた。この現象がわずかな偏心によるものか、あるいは本質的なものであるかは今のところ不明であり、上記の波の数学的表現もまだ完成していない。しかし加藤ら<sup>9), 10)</sup>の矩形水槽内の内部波において観測された Cross-Wave の一つの型(強制振動と直角方向の波がたし算の形ではいつてくる場合)と関係のある現象であろうと推察される。この新しい振動モードについてはかなり偏心応力の原因となりうるので、実用上の観点から注目すべき必要があると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Lamb, H. : Hydrodynamics sixth edition (1932).
- 2) Thorpe, S.A. : On Standing Internal Gravity Waves of Finite Amplitude, J. Fluid Mech. Vol. 32 Part 3, p. 489~528, 1968.
- 3) Sarkisyan, A.S. and Ivanov, V.F. : Comparison of Various Methods of Calculating Currents in a Baroclinic Ocean, IZVESTIYA, ATM. and OCEAN. PHYS., Vol. 8, No. 4, April 1972.
- 4) Kamenkovich, V.M. and Reznik, G.M. : A Contribution to the Theory of Stationary Wind-Driven Currents in a Two-Layer Liquid, IZVESTIYA, ATM. & OCEAN. PHYS. Vol. 8, No. 4, April 1972.
- 5) Nesterov, S.V. : Resonant Interaction of Surface and Internal Waves, IZVESTIYA. ATM. & OCEAN. PHYS., Vol. 8, No. 4, April 1972.
- 6) Thorpe, S.A. : Experiments on the Instability of Stratified Shear Flows; Immiscible Fluids, J. Fluid Mech., Vol. 39, Part 1, pp. 25~48, 1969.
- 7) Alihasan Nayfeh and William S. Saric : Nonlinear Waves in a Kelvin-Helmholtz Flow, J. Fluid Mech. Vol. 55, Part 2. pp. 311~327, 1972.
- 8) 井島武士 : 海岸工学, 朝倉土木工学講座 19, 1970
- 9) 加藤一正 : 密度差のある2流体間に発生する波に関する研究, 東京工業大学卒業研究 1972
- 10) 椎貝博美・沢本正樹・加藤一正 : 内部波の安定性に関する研究, 第27回土木学会年講, pp. 133~134, 1972.
- 11) Brekhovikh, L.M. Goncharov, V.V., Kurtepev, V. M. and Naugolnykh, K.A. : IZVESTIYA, ATM. & OCEAN. PHY., Vol. 8, No. 2, February 1972. (1973.6.15・受付)