

空気力の非線形性を考慮した構造物の空力弾性振動

AEROELASTIC OSCILLATIONS OF STRUCTURES DUE TO THE NON-LINEAR AERODYNAMIC FORCES

森 光 康 夫*・伊 藤 学**・宮 田 利 雄***

By Yasuo Morimitsu, Manabu Ito and Toshio Miyata

1. ま え が き

吊橋のように比較的剛性の低い構造物が自然風に曝された時に呈する現象のうち、自励振動現象がもっとも危険性の大きなものであると考えられ、この現象に対して数多くの研究がなされてきた。いうまでもなく、不安定現象発生の可能性の判定、限界風速の推定を行なうには作用空気力を知ることが必要である。この空気力を求めるさい、これまでは発振風速のみを問題とし、作用空気力が振幅に比例するという線形性の仮定によってきた。吊橋の自励振動の理論的取扱いを最初に行なった Bleich, F.¹⁾ の理論はその代表的なものである。しかし、実際には空気力は振幅に対して非線形であるとするのが正しいようである。空気力が非線形であれば、初期振幅の与え方により、振動を発生する風速は変化するものである。したがって、構造物の耐風設計にさいしても、許容振幅なるものを考え、この振幅を初期条件として与えたとき、その振動が許容振幅を越える風速域の下限を限界風速として設計の基準とするのが至当であろう。

このような考え方を進めるためには、風速と振幅との関係を示すいわゆる振動応答曲線が必要となる。本論文は、以上のような観点に基づき、振動応答を求めるのに必要な空気力成分を指摘し、その非線形性を前提とした上で振動応答との関連を求めたものである。さらに、風洞実験の結果より理論の適合性を示した。

2. 基本的な考え方

構造物の振動特性が線形であると考えられる場合に

* 正会員 工博 鹿島建設(株)技術研究所(研究当時東京大学大学院土木工学専門課程博士課程学生)

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

は、この構造物が任意の状態にある時の空気力が求められさえすれば、構造物の風による現象は振動ばかりでなく、その他の挙動についても定量的に評価し得ることはいうまでもない。しかしながら、一様流中での挙動に焦点を絞っても、物体が任意の状態にある時の空気力を理論的に求めることは、特例を除いて不可能に近く、これは実験によらざるを得ない。よって、本研究では測定実験によって得られた空気力に基づいて応答との関連を検討した。

さて、対象を振動現象に限れば、次のような基本的な考え方をとることができると思われる。すなわち、一定振幅で定常正弦振動をしている時に作用する空気力のある成分(振動に関与する成分)が任意の振幅に対して得られれば、構造物の最終的振動性状が判断できるばかりでなく、初期状態から最終段階に至る途中経過までも求めることができる。この考え方は、振幅が時間とともに変動している状態においても、ある瞬間の空気力はその時点での一時的振幅でもってかりに定常振動をしているとしたときの空気力によって置き換えられる、ということをも前提としているもので、振幅の変動が緩慢な場合には十分適用し得ると考えられる。

このような考え方にしたがえば、定常振動状態(この状態が存在するか否か、あるいは安定か否かは別として)の物体に作用する空気力のうち、振動に関与する成分をいかに把握し、表示するかということが重要となる。

3. 非線形理論

(1) 運動方程式と振幅決定式

風によって振動を発生しやすい土木構造物は、一般に細長いものが多く、適当な条件のもとで二次元物体の振動問題に還元できるので、ここでは Fig. 1 に示される

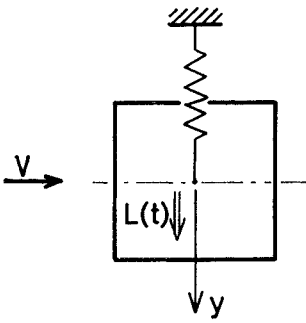


Fig. 1 Model of Vertical Oscillation

ような系の上下振動（風向と直角方向の振動）を例にとって考える。振動系の単位長当たりの質量を m 、構造減衰定数を α_η 、固有円振動数を ω_η 、時間 t の関数としての揚力を $L(t)$ 、変位を $y(t)$ とすれば、振動方程式は、次式で表わされる。

$$\ddot{y} + 2\alpha_\eta\omega_\eta\dot{y} + \omega_\eta^2y = \frac{1}{m} \cdot L(t) \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 $L(t)$ の形はまだ不明であるが、振動を対象としているので解は次のように表わされると考えてよい。

$$y = \sum_{k=1}^n y_k \cdot e^{i(\omega_k t + \epsilon_k)} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 y_k は実数である。このとき、作用空気力は強制力・自励振力を問わず、すべて含めて次式で書かれる。

$$L(t) = \sum_{k=1}^n L_k \cdot e^{i(\omega_k t + \epsilon_k)} \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 L_k は複素数である。

ここで、さらに空気力について、 L_1, L_2, \dots, L_n は互いに独立、すなわち ω_k の振動数成分 L_k の増減は、 $k \neq k'$ の場合 $L_{k'}$ の増減とはまったく無関係であると仮定する。この仮定は厳密には満たされないが、工学的な意味では可能だと思われる。このようにしたとき、式(2)、(3)を式(1)に代入すれば、次の互いに独立した n 個の方程式を得る。

$$-\omega_k^2 y_k + 2i\alpha_\eta\omega_\eta\omega_k y_k + \omega_\eta^2 y_k = \frac{1}{m} \cdot L_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots(4)$$

振動数 ω_k の空気力成分 L_k に関与する因子は、粘性を無視すれば、物体断面の代表長 B 、流速 V 、流体密度 ρ 、振動数 ω_k 、振幅 y_k の 5 個であるから、

$$L_k = \frac{1}{2} \rho V^2 B \cdot C_{1k} \dots\dots\dots(5)$$

と表わせば、 C_{1k} はその 5 個の因子から作られる 2 個の独立な無次元量 $V_r = 2\pi V/\omega_k B$ 、 $\eta_0 = y_k/B$ の関数と考えられる。すなわち、

$$C_{1k} = C_{1k}(\eta_0, V_r) \dots\dots\dots(6)$$

ここで、添字 1 は上下振動時の揚力を意味する。 C_{1k} は、 $k=1, \dots, n$ に対して n 個作られるが、式(6)の形で無次元化表示した場合には、まったく同じ 1 個の式 $C_{1k}(\eta_0, V_r)$ で表わされると考えるのは自然である。ま

た、 C_{1k} は複素数であり、物体が円振動数 ω で定常振動しているとき作用する空気力のうち、円振動数が ω なる空気力成分を意味するものであることは、これまでの議論から明らかである。

式(4)において、さらに $\omega_\eta/\omega_k = r_\eta$ 、 $\nu_\eta = \rho B^2/2$ とすれば、実部、虚部おのおのから次の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} (r_\eta^2 - 1) \cdot \eta_0 = \frac{\nu_\eta}{m} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{1R}(\eta_0, V_r) \dots\dots(7-a) \\ 2\alpha_\eta r_\eta \cdot \eta_0 = \frac{\nu_\eta}{m} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{1I}(\eta_0, V_r) \dots\dots(7-b) \end{cases}$$

ただし、

$$C_{1k}(\eta_0, V_r) = C_{1R}(\eta_0, V_r) + iC_{1I}(\eta_0, V_r) \dots\dots(8)$$

したがって、風速 V および応答系の諸性質が与えられれば、未知数は振幅 η_0 と振動数 r_η の 2 つであるから、 C_{1R}, C_{1I} の形さえわかれば、式(7)を解くことによって解は得られることになる。また、式(7)の右辺は η_0 に関して非線形であると考えているから、式(7)は一般に複数個の解の組を持ち、それらのすべての解の線形結合が方程式(1)の定常な解を与えると考えてよい。

なお、従来の線形理論では、空気力係数 C_{1k} が振幅に比例するという仮定に基づいているため、式(7)の右辺の C_{1R}, C_{1I} から η_0 が一次因子として外に出、したがって振幅を決定することができないわけである。

さて、ここで

$$\tau = \omega_k t \dots\dots\dots(9)$$

$$\eta(\tau) = \eta_0 e^{i\tau} \dots\dots\dots(10)$$

$$\dot{\eta}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \eta(\tau), \quad \ddot{\eta}(\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \eta(\tau) \dots\dots\dots(11)$$

としたとき、連立方程式(7)は次の振動方程式に帰することができる。

$$\ddot{\eta} + 2\alpha_\eta r_\eta \dot{\eta} + r_\eta^2 \eta = \frac{\nu_\eta}{m} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{1k}(\eta_0, V_r) \frac{\eta}{\eta_0} \dots\dots\dots(12)$$

よって、今後は振動方程式としてこの式(12)を用いることにする。

以上の理論的検討から次のことがいえよう。“物体が一様流から受ける力によって振動する場合の振動数および振幅は、物体がある一定振幅で、かつ一定振動数で振動しているときに作用する空気力のうち、その振動数と同じ振動数成分のみを、無次元化振幅、無次元化風速の関数として知れば、すべて決定できる”。

(2) 振動の安定・不安定の判別

式(7)によって、励振力が系の減衰力とつり合う振幅、振動数が得られるわけであるが、次にその状態の安定性が問題となる。すなわち、式(7)の解に微小変動を与えた場合、時間経過とともにもとの解に収束してゆくか、それともその変動がますます大きくなるかを判別す

ることが重要となってくる。特に、不安定な振動解の存在は、まえがきにも述べたように限界風速を決定するさいの初期振幅とも関連して、非線形問題の重要なテーマであると思われる。

安定・不安定の判別には、Poincaré の判定条件を適用することができる⁹⁾。それによれば、 $f(x, v)$, $g(x, v)$ にそれぞれ x, v に関して 2 階の連続な導関数が存在するとして、式 (a)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= dx/dt = f(x, v) \\ \dot{v} &= dv/dt = g(x, v) \\ v &= \dot{x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (a)$$

が、周期 T の周期解を持つとき、この解の安定・不安定は次式によって判定される。

$$\oint [f_x + g_v] dt \begin{cases} < 0 : \text{安定} \\ > 0 : \text{不安定} \end{cases} \dots\dots\dots (b)$$

式 (a) との対応上、 η を実数として取扱い、さらに

$$C_1' = C_{1R}' + iC_{1I}' = \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 C_{1I}/\eta_0$$

$$\zeta = \dot{\eta}$$

とすれば、式 (12) は次式と等価である。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= f(\eta, \zeta) = \zeta \\ \dot{\zeta} &= g(\eta, \zeta) = \frac{\nu_\eta}{m} [C_{1R}' \cdot \eta + C_{1I}' \cdot \zeta] - 2\alpha_\eta r_\eta \cdot \zeta - r_\eta^2 \cdot \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

周期解の変位と速度が描くリミット・サイクルの近傍を考えると、 V_r はほとんど変化しないと考えてよく、 C_1' は η_0 のみの関数と考える。また、 V_r を一定と考えることは振動数が変化しないことを意味し、 $\eta = \eta_0 \cos \tau$ で周期解を代表させることによって、式 (13) の係が判別式の適用条件を満たすことは容易に確かめることができる。式 (13) より

$$f_\eta = 0$$

$$g_\zeta = \frac{\nu_\eta}{m} \left[\frac{\partial C_{1R}'}{\partial \eta_0} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} \cdot \eta + \frac{\partial C_{1I}'}{\partial \eta_0} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} \cdot \zeta \right] \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \oint \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} \cdot \eta dt &= \oint \frac{\zeta}{\eta_0} \cdot \eta dt = 0 \\ \oint \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} \cdot \zeta dt &= \oint \frac{\zeta}{\eta_0} \cdot \zeta dt > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

であるから、 $\oint (f_\eta + g_\zeta) dt$ の符号は $\frac{\partial C_{1I}'}{\partial \eta_0}$ と同符号である。よって、

$$\frac{\partial}{\partial \eta_0} \left[\frac{C_{1I}'(\eta_0, V_r)}{\eta_0} \right] \begin{cases} < 0 : \text{安定} \\ > 0 : \text{不安定} \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

を得る。空気力の虚数項が励振力に相当することを考えれば、上式の物理的意味は容易に納得できよう。

(3) 振動の時間的推移

自然風が空間的にも時間的にも変動していることは周

知の事実であるが、一定時間あたりの平均風速を考えた場合、平均風速自体も時間とともに変動している。すなわち、平均風速自体が非定常と考えられるわけで、それに伴い自励振動の振動振幅も時間的に変化してゆくと思われる。このような問題に対処するためには、式 (12) の定常解のみでなく、その遷移解を対象とせねばならない。そこで、式 (12) の遷移解を

$$\eta(\tau) = \eta_0(\tau) e^{i \cdot \mu(\tau) \cdot \tau} \dots\dots\dots (17)$$

とし、式 (12) に代入すれば次式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\eta}_0 + 2\alpha_\eta r_\eta \dot{\eta}_0 + [r_\eta^2 - (\mu + \tau \dot{\mu})^2] \eta_0 \\ = \frac{\nu_\eta}{m} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 C_{1R} \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (18-a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2(\mu + \tau \dot{\mu}) \dot{\eta}_0 + [2\alpha_\eta r_\eta (\mu + \tau \dot{\mu}) \\ + (\dot{\mu} + \tau \ddot{\mu})] \eta_0 = \frac{\nu_\eta}{m} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 C_{1I} \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (18-b)$$

自励振動においては、 $\mu=1$ と考えてよい。このようにすれば、式 (18-a) または (18-b) から、 η_0 が無次元化時間 τ の関数として決定されるが、 C_{1I} が振幅を決定づける因子であり、 C_{1R} が振動数を決定づける因子であることを考慮すれば、式 (18-b) を用いたほうがより正確に η_0 を求めることができる。よって、

$$2\dot{\eta}_0 + 2\alpha_\eta r_\eta \eta_0 = \frac{\nu_\eta}{m} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{1I} \dots\dots\dots (19)$$

$$\therefore \tau = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{2d\eta_0}{\frac{\nu_\eta}{m} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{1I} - 2\alpha_\eta r_\eta \eta_0} \dots\dots\dots (20)$$

式 (20) を式 (7-b) と比較するとわかるように、上式右辺の分母が 0 となるのは、 η_0 が式 (7) の解となる時のみで、その他で 0 になることはない。なお、 C_{1I} は η_0 と V_r の関数である。

(4) 回転 1 自由度振動

前項の考察は、上下 1 自由度振動を例にとって述べたものであるが、Fig. 2 に示されるような回転振動系の場合にも本質的には同じである。応答系の弾性中心まわりの回転変位を ϕ 、振幅を ϕ_0 、単位長あたりの極慣性モーメントを θ 、断面代表長を B 、外力のモーメント係数を C_4 (添字 4 は回転振動中のモーメント成分を意味する)、構造減衰定数を α_ϕ 、 $r_\phi = \omega_\phi / \omega$ (ω_ϕ : 固有円振動数、

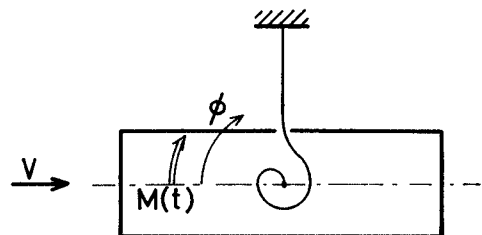


Fig. 2 Model of Torsional Oscillation

ω ：応答円振動数), $\nu_\phi = \rho B^4/2$ とすれば, 応答は次の方程式の複数個の解の線形結合として得られる。

$$\ddot{\phi} + 2\alpha_\phi r_\phi \dot{\phi} + r_\phi^2 \phi = \frac{\nu_\phi}{\theta} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{iI} \cdot \frac{\phi}{\phi_0} \dots (21)$$

ただし, $\dot{\phi}, \ddot{\phi}$ は無次元化時間 $\tau = \omega t$ に関する微分を示す。この方程式の解は, 次式を解くことによって得られる。

$$\left. \begin{aligned} (r_\phi^2 - 1) \cdot \phi_0 &= \frac{\nu_\phi}{\theta} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{iR}(\phi_0, V_r) \\ 2\alpha_\phi r_\phi \cdot \phi_0 &= \frac{\nu_\phi}{\theta} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{iI}(\phi_0, V_r) \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

ただし,

$$C_{iI}(\phi_0, V_r) = C_{iR}(\phi_0, V_r) + i C_{iI}(\phi_0, V_r) \dots (23)$$

また, 振動の安定・不安定の判別は, 次式

$$\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left[\frac{C_{iI}(\phi_0, V_r)}{\phi_0} \right] \begin{cases} < 0 : \text{安定} \\ > 0 : \text{不安定} \end{cases} \dots (24)$$

で与えられ, 振幅の時間的変化は,

$$\tau = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{2d\phi_0}{\frac{\nu_\phi}{\theta} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{iI} - 2\alpha_\phi r_\phi \phi_0} \dots (25)$$

によって与えられる。

(5) 上下・回転連成振動における振幅の推定

連成振動において空気力の非線形性をどのように考慮するかということは, むずかしい問題である。まず, 外力としては揚力 $L(t)$ とモーメント $M(t)$ を考えねばならないが, それらは形式的に次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} L(t) &= L(\eta_0, \phi_0, V_r, t) \\ M(t) &= M(\eta_0, \phi_0, V_r, t) \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

具体的に L, M がどのような形になるかが問題となるが, 簡単のため, 線形理論でしばしば用いられた仮定“連成振動時の空気力は, 単独上下振動時の空気力と単独回転振動時の空気力の線形結合として得られる”を適用すれば, 次の振動方程式を解けばよいことになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} + 2\alpha_\eta r_\eta \dot{\eta} + r_\eta^2 \eta &= \frac{\nu_\eta}{m} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \left[C_1 \frac{\eta}{\eta_0} + C_2 \frac{\phi}{\phi_0} \right] \\ \ddot{\phi} + 2\alpha_\phi r_\phi \dot{\phi} + r_\phi^2 \phi &= \frac{\nu_\phi}{\theta} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \left[C_3 \frac{\eta}{\eta_0} + C_4 \frac{\phi}{\phi_0} \right] \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

ここで, C_2, C_3 はそれぞれ回転振動時の揚力係数および上下振動時のモーメント係数を意味する。 η_0, ϕ_0 を実数とし, 式 (27) の解を

$$\eta = \eta_0 e^{i(\tau + \lambda)}, \phi = \phi_0 e^{i\tau} \dots (28)$$

とすれば, η_0, ϕ_0, r_η (または r_ϕ), λ は式 (29) から得られる。

$$\left. \begin{aligned} (r_\eta^2 - 1)\eta_0 &= \frac{\nu_\eta}{m} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot [C_{1R} + (\sigma_1 C_{2R} + \sigma_2 C_{2I})] \\ (r_\phi^2 - 1)\phi_0 &= \frac{\nu_\phi}{\theta} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot [(\sigma_1 C_{3R} - \sigma_2 C_{3I}) + C_{4R}] \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha_\eta r_\eta \cdot \eta_0 &= \frac{\nu_\eta}{m} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot [C_{1I} + (\sigma_1 C_{2I} - \sigma_2 C_{2R})] \\ 2\alpha_\phi r_\phi \cdot \phi_0 &= \frac{\nu_\phi}{\theta} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot [(\sigma_1 C_{3I} + \sigma_2 C_{3R}) + C_{4I}] \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

ただし, $\sigma_1 = \cos \lambda, \sigma_2 = \sin \lambda$

(6) 三次元構造物への適用

空気力が振動振幅に対して非線形性を持っている場合, 三次元構造物の応答を求めることは, それほどやさしくはない。たとえば, 吊橋の場合などでは, 橋軸方向に関して振幅が連続的に変化し, ある振幅の部分では空気力が励振力として作用し, 他の振幅の部分では減衰力として作用することもありうるからである。現在, 吊橋などの限界風速は線形理論によって求められているが, 全橋模型風洞実験で得られる値との差は, 一つには上述の事実が原因と思われる。

そこで, ここでは橋桁の振動を例にとり, 空気力の非線形性の取扱い方を検討してみる。橋軸方向を x 軸にとり弾性中心の上下変位を $y(t, x)$, そのまわりの回転変位を $\phi(t, x)$ とする。吊橋が自励振動をおこすさい, 固有振動モード $\phi_\eta(x), \phi_\phi(x)$ で振動すると考えられるので, y, ϕ は次のように変数分離される。

$$\left. \begin{aligned} y(t, x) &= B \cdot q_\eta(t) \cdot \phi_\eta(x) \\ \phi(t, x) &= q_\phi(t) \cdot \phi_\phi(x) \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

ただし, ϕ_η および ϕ_ϕ はその最大振幅が1となるよう正規化されているとする。このとき, 振動方程式は次のような簡単な形に書ける。

$$\left. \begin{aligned} (\ddot{q}_\eta + 2\alpha_\eta \omega_\eta \dot{q}_\eta + \omega_\eta^2 q_\eta) \int_L \phi_\eta^2 dx &= \frac{Q_\eta}{mB^2} \\ (\ddot{q}_\phi + 2\alpha_\phi \omega_\phi \dot{q}_\phi + \omega_\phi^2 q_\phi) \int_L \phi_\phi^2 dx &= \frac{Q_\phi}{\theta} \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

ここで, α_η, α_ϕ は各モードの減衰定数, m は単位長あたりの質量, θ は単位長あたりの極慣性モーメント, Q_η, Q_ϕ は一般座標 q_η, q_ϕ に対応する一般力であり, 仮想仕事の原理より求まる。また, 上式の積分は全スパンにわたるとする。長い橋桁の断面を考えた場合, そのまわりの空気流は二次元性を保つと考えれば, Q_η, Q_ϕ は先と同じ空気力係数を用いて次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Q_\eta &= \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 \left[\frac{q_\eta}{q_{\eta 0}} \int_L \phi_\eta \cdot C_1(q_{\eta 0} \phi_\eta) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_\phi}{q_{\phi 0}} \int_L \phi_\eta \cdot C_2(q_{\phi 0} \phi_\phi) dx \right] \\ Q_\phi &= \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 \left[\frac{q_\eta}{q_{\eta 0}} \int_L \phi_\phi \cdot C_3(q_{\eta 0} \phi_\eta) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_\phi}{q_{\phi 0}} \int_L \phi_\phi \cdot C_4(q_{\phi 0} \phi_\phi) dx \right] \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

ここで、 q_{γ_0}, q_{ϕ_0} はそれぞれ q_{γ}, q_{ϕ} の振幅である。

次に、

$$\left. \begin{aligned}
 K_1(q_{\gamma_0}, V_r) &= \frac{\int_L \phi_{\gamma} \cdot C_1(\phi_{\gamma_0} \phi_{\gamma}) dx}{\int_L \phi_{\gamma}^2 dx} \\
 K_2(q_{\phi_0}, V_r) &= \frac{\int_L \phi_{\gamma} \cdot C_2(q_{\phi_0} \phi_{\phi}) dx}{\int_L \phi_{\gamma}^2 dx} \\
 K_3(q_{\gamma_0}, V_r) &= \frac{\int_L \phi_{\phi} \cdot C_3(q_{\gamma_0} \phi_{\gamma}) dx}{\int_L \phi_{\phi}^2 dx} \\
 K_4(q_{\phi_0}, V_r) &= \frac{\int_L \phi_{\phi} \cdot C_4(q_{\phi_0} \phi_{\phi}) dx}{\int_L \phi_{\phi}^2 dx}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

とおけば、式 (31) は、

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{q}_{\gamma} + 2\alpha_{\gamma}\omega_{\gamma}\dot{q}_{\gamma} + \omega_{\gamma}^2 q_{\gamma} \\
 = \frac{\rho V^2}{2m} \left[K_1 \frac{q_{\gamma}}{q_{\gamma_0}} + K_2 \frac{q_{\phi}}{q_{\phi_0}} \right] \\
 \ddot{q}_{\phi} + 2\alpha_{\phi}\omega_{\phi}\dot{q}_{\phi} + \omega_{\phi}^2 q_{\phi} \\
 = \frac{\rho V^2 B^2}{2\theta} \left[K_3 \frac{q_{\gamma}}{q_{\gamma_0}} + K_4 \frac{q_{\phi}}{q_{\phi_0}} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

となる。さらに時間を $\tau = \omega t$ で無次元化すれば、式 (27) とまったく同じ型の式が得られるのは当然である。したがって、振動モード形を仮定すれば、 $K_1 \sim K_4$ が q_{γ_0}, q_{ϕ_0} の関数として数値計算できるから、あとの取扱いはこれまでに述べたことと同様である。すなわち、三次元構造物の振動も、部分部分で二次元性が満足されると考えられる場合には二次元の問題に帰着される。ただし、空気力係数について、式 (33) で示されるような修正を行わねばならない。

4. 非線形理論の適用

前節においては、空気力の非線形性を前提として、振動応答との関連を理論的に追求した。一方、著者らは別に振動中の二次元物体に作用する空気力を強制振動法によって直接測定し、振幅に対する空気力の非線形性を示す具体的なデータを得ることができた³⁾。そこで本節では、これら測定空気力に対し前節の理論式を適用して求めた結果と、二次元模型を風洞内に弾性支持し風に対する応答を直接求めた自由振動実験の結果とを比較することにより、理論の適否を検討する。また、箱型断面構

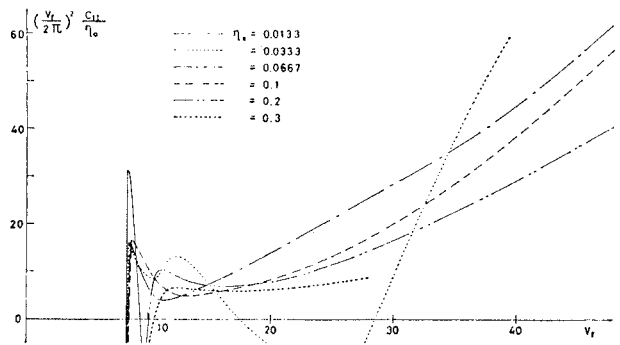


Fig. 3 Aerodynamic Lift Coefficients of Square Section

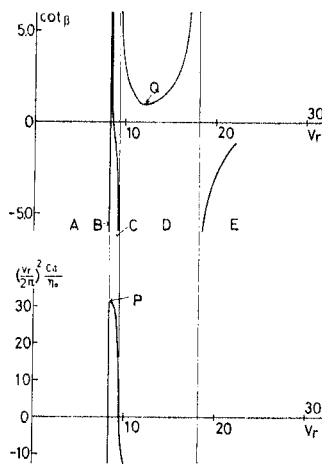


Fig. 4 $\cot \beta$ vs. V_r , $\left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{C_{1i}}{\eta_0}$ vs. V_r ($\eta_0=0.033$)

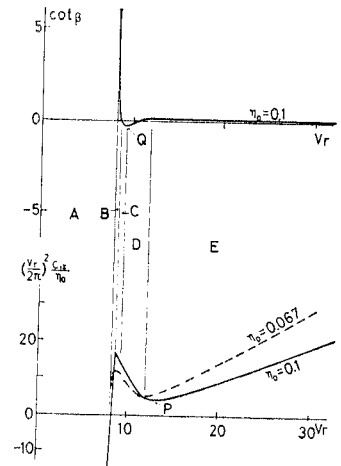


Fig. 5 $\cot \beta$ vs. V_r , $\left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{C_{1i}}{\eta_0}$ vs. V_r ($\eta_0=0.1$)

造の振動性状そのものも重要な研究対象であるのであわせて検討することにする。

(1) 正方形断面の上下振動

Fig. 1 に示されるような、風に対して直角方向のみ振動し得る正方形断面の1自由度振動系を考えた。Fig. 3 に、上下振動中の正方形断面に作用する空気力(揚力)の虚数成分を示す。

a) 振動解の特性

正方形断面の上下振動は、減衰率、固有振動数が異なるとその性状が大きく変わってくるので、ここで測定空気力を用いて解の特性を探ることは、単に解法を示すばかりでなく、振動特性を検討することにもなり、意義のあることと思われる。さて、そのために式 (7) を次のように変形する。

$$\left\{ \frac{1}{2\alpha_{\gamma}} \cdot \left(r_{\gamma} - \frac{1}{r_{\gamma}} \right) = \frac{C_{1R}}{C_{1I}} = \cot \beta(\eta_0, V_r) \right. \dots\dots\dots(35-a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2\alpha_\eta \cdot \frac{m}{\nu_\eta} \cdot r_\eta &= \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{C_{II}(\eta_0, V_r)}{\eta_0} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right. \quad (35-b)$$

上式は次の手順で解かれる。

i) η_0 を与えると、上式は r_η, V_r を未知数とする連立方程式となる（ここで、 η_0 は当然のことながら C_I の測定時に設定した値である）。

ii) r_η を 0 から ∞ まで変化させる。このとき、式 (35-a) の左辺は $-\infty$ から ∞ まで連続的に変わる。したがって、式 (35-a) から、 r_η の値に対応する V_r を得る。

iii) 一方、式 (35-b) から r_η に対応して V_r が求まり、両者の V_r が一致するときの (η_0, V_r, r_η) の組合せが、 η_0 の振幅に対応する解である。

次に、 $\eta_0=0.033, 0.1$ の 2 ケースを例にとって、解の特性を述べることにする。**Fig. 4, 5** は、この 2 つの場合について、式 (35) の右辺を V_r の関数として図示したものである。 $\eta_0=0.033$ の場合、 r_η を 0 から増大してゆくと、下側の図では $\left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot C_{II}/\eta_0 = 2\alpha_\eta \cdot \frac{m}{\nu_\eta} \cdot r_\eta$ を表わす直線は、 V_r 軸に平行のまま 0 から ∞ にまで移動してゆくが、空気力を表わす同図の曲線とは、直線領域 B および領域 C にしか交点を持たない。一方、上側の図でも $\cot \beta = \frac{1}{2\alpha_\eta} \cdot \left(r_\eta - \frac{1}{r_\eta}\right)$ を表わす直線と同図の曲線とは、B および C に交点を持つ。しかし領域 C では両方の図から求める V_r が一致する保証が必ずしもないこと、またこの領域での測定空気力のばらつきが本質的に大きいことなどを考えると、領域 C には安定な振動解は存在しないと思われる。一方、直線領域 B は、 $V_r \approx 8.2$ で空気力が不定^注となるために生じるもので、式 (35-a) の左辺が P 点を越えない限り任意の r_η に対して次の解が存在する。

$$(\eta_0, V_r, r_\eta) = (0.033, 8.2, \text{不定})$$

この解の特徴は、 $r_\eta = \omega_r/\omega$ が不定ということと、 $V_r = 2\pi V/\omega B$ が一定ということである。これらの関係は、次式のように書き直される。

$$\left\{ \begin{aligned} \omega &= 2\pi \cdot \frac{1}{V_r} \cdot \frac{V}{B} = 2\pi \cdot 0.122 \cdot \frac{V}{B} \\ \omega &: \text{固有振動数 } \omega_r \text{ から独立} \end{aligned} \right.$$

正方形断面のストローハル数がほぼ 0.12 であることを考えれば、上式の第 1 式はこの振動がいわゆる渦励振であることを意味している。さらに、応答振動数が固有振動数と無関係であるということは、この振動が強制外力による振動であると理解される。以上のことから、上の解は、後続渦による強制振動を表わすと考えてよからう。

注) 空気力測定実験によれば、 $\eta_0=0.033$ のとき $V_r \approx 8.2$ では測定値のばらつきが非常に大きく、空気力は不定であるとするのが妥当のようである。

Fig. 4 は $\eta_0=0.1$ の場合であるが、同様の考察を行えば、適当な構造減衰を持っているとき、次の 3 組の解が存在する。

- B 領域： $(\eta_0, V_r, r_\eta) = (0.1, 8.4, r_{\eta 1})$
- C, D 領域： $(\eta_0, V_r, r_\eta) = (0.1, V_{r2}, 1)$
- E 領域： $(\eta_0, V_r, r_\eta) = (0.1, V_{r3}, 1)$

ここで、 $r_{\eta 1}, V_{r2}, V_{r3}$ はある確定した値であり、数値 8.4, 1, 1 はグラフから読みとった値である。

次に検討せねばならないのは、これらの解の安定・不安定の判別であり、それには式 (16) を適用すればよい。**Fig. 5** には、そのために $\eta_0=0.067$ の場合の空気力係数を破線で示しておいた。同図と式 (16) を比較すれば、実線が破線の下方面にある領域が安定で、逆の場合には不安定であることが容易にわかる。すなわち、上の 3 組の解のうち B, E 領域の解は安定で、C, D 領域の解は不安定である。ところで、B 領域の解については、次の関係が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} \omega &= 2\pi \cdot 0.12 \cdot V/B \\ \omega &= r_{\eta 1} \cdot \omega_r \end{aligned} \right.$$

第 1 式から、この振動がやはり渦励振であると考えられるが、第 2 式を見れば応答振動数はもはや固有振動数と独立ではない。したがって、この渦励振は $\eta_0=0.033$ の場合と違い、自励振動的性格を持っているのではないかと考えられる。また E 領域の解は、同領域では後流渦の発生が物体の振動と独立していること、応答振動数が固有振動数にきわめて近いことから、いわゆるギャロッピング現象を表わしていると思われる。

b) 自由振動実験結果との比較

これまでの段階で、具体的に振動解を求め得ることが示され、さらに正方形断面の振動特性の推定も行なわれたが、計算結果を風洞内での自由振動実験結果と比較することによって理論の適合性を判定する必要がある。

自由振動実験に用いた系の特性は **Table 1** に示すとおりで、構造減衰は電磁ダンパーを用いることにより、 $\alpha_\eta=0.000533, 0.0157, 0.0764$ という広い範囲をカバーできた。実験を行なった風洞は、先に空気力測定を行なったと同じ、東京大学橋梁研究室所属の空力弾性試験用風洞である。また、模型の寸法も空気力測定に用いた模型と同じである。

Fig. 3 の空気力係数 $\left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{C_{II}}{\eta_0}$ を用いて、上の各条件に対して求めた計算結果と自由振動実験結果とを **Fig. 6** (i), (ii), (iii) に示す。同図において、曲線 (b),

Table 1 Dimensions of Square Section

L(length)	H(height)	B(width)	m (mass of model)	m (oscillating mass)
660 mm	150 mm	150 mm	0.322 kg·s ² /m ²	0.679 kg·s ² /m ²

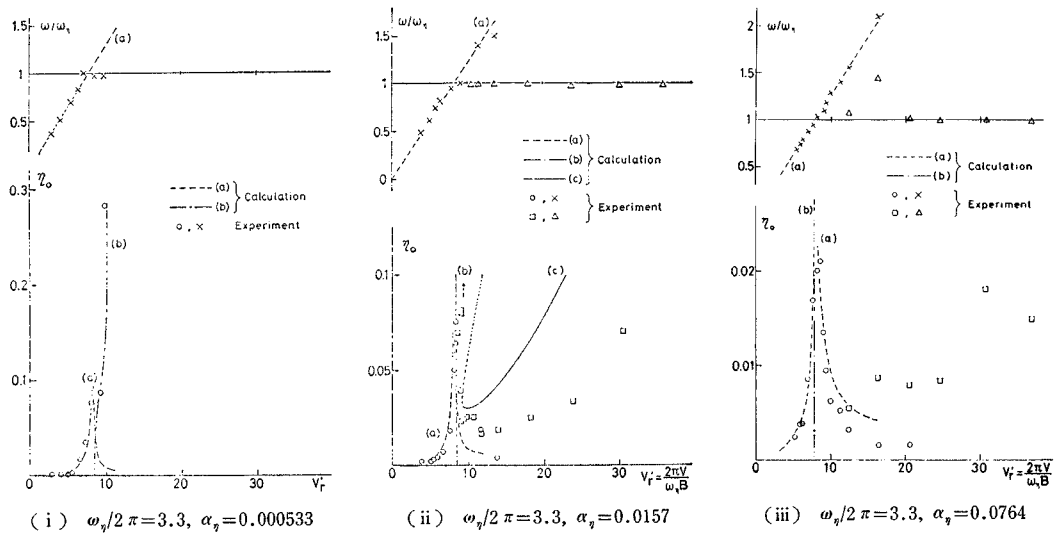


Fig. 6 Response Curves of Square Section

(c) は $r_\eta = 1$ として前節の理論式を適用したものである。ただし、曲線 (c) の点線部分は、不安定な振動解を意味している。曲線 (a) は渦力を強制力と考え、次式によって計算したものである。

$$r_\eta = \frac{\omega_\eta}{\omega} = \frac{\omega_\eta}{2\pi \cdot S \cdot \frac{V}{B}} \dots\dots\dots(36-a)$$

$$\eta_0 = \frac{\frac{\nu_\eta}{m} \cdot \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{r_\eta^2}\right)^2 + 4\alpha_\eta^2/r_\eta^2}} \cdot C_s \dots\dots\dots(36-b)$$

ここで、 S はストローハル数で 0.122 とし、 C_s は静止断面に対する測定値 $\sqrt{2} \times 0.76$ を用いている。一方、自由振動実験結果は、応答振動数が風速に比例していると判断される場合には、 \times (振動数) — \circ (振幅) の対応で示され、応答振動数が固有振動数に一致していると判断される場合には、 \triangle — \square の対応で示されている。

Fig. 6 の結果から以下のことが考察される。

(i) 計算によって求めた曲線 (b) は、実験値ときわめてよく一致していて、理論の妥当性を裏付けるものであるが、曲線 (c) は実験値との間に相当のずれがみられる。この原因が何にあるかは今後の重要な問題であるが、小振幅、高風速における空気力測定の精度に問題があると推察される。

(ii) 曲線 (b), (c) は応答振動数が固有振動数に等しいという同一条件のもとで求めた解曲線であるが、両者の特性は異なっていると考えられる。 $\eta_0 = 0.1$ の場合についての解の特性については先に検討したが、そこで明らかになったように、 $V_r \approx 8.4$ の解が渦励振で、さらに高い風速域の解はギャロッピングに相当している。いま、例として Fig. 6 (ii) のケースについて、 $\eta_0 = 0.1$

と解曲線との交点を求めたとき、曲線 (b) との交点が上に述べた渦励振に相当する解であり、曲線 (c) との交点がギャロッピングに相当する解であることが容易にわかる (このとき、曲線 (c) の点線部分との交点が不安定な解に相当することも、Fig. 4 と比較すればわかる)。したがって、曲線 (b) は渦励振を表わし、曲線 (c) の実線部分はギャロッピングを表わすと考えてよい。

(iii) 自由振動実験結果を曲線 (a), (b), (c) と比較すると、空力弾性振動が構造減衰によってその特性を大いに異にすることが改めて認識される。すなわち、構造減衰が大きい場合には、渦励振は強制振動の性格が強い (Fig. 6 (iii))。しかし、構造減衰が小さくなると、低風速では渦励振を強制振動として求めた曲線 (a) に沿っているが、さらに風速を上げてゆくと、曲線 (b) 上に移行する (Fig. 6 (i), (ii))。曲線 (b), (c) は $\omega = \omega_\eta$ として求めたことからわかるように自励振動的性格を持つものであるから、減衰の小さい場合には自励振動的渦励振が発生するわけである。また、Fig. 6 (ii), (iii) にみられる高風速域での微小安定振動も、減衰の小さい (i) のケースでは存在しなくなる。

これらのことは、構造物の空力弾性振動を検討するさい、十分広い構造減衰域を対象とせねばならないことを意味する。またそのためには、外力である空気力を応答と切離して把握することが一段と望まれることになるう。

c) 安定領域

耐風設計の面からは、振動が発生しない領域と発生する領域との境界が重要な意味を持っている。振動の発生の有無が初期条件によって異なるということは、空気力の非線形性からみて当然のことである。いま、 $\eta_0 = 0.1$

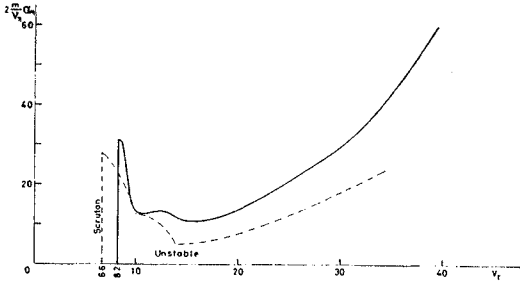


Fig. 7 Aerodynamic Stability of Square Section

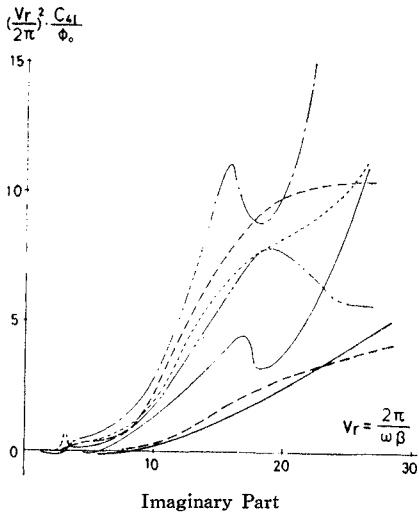
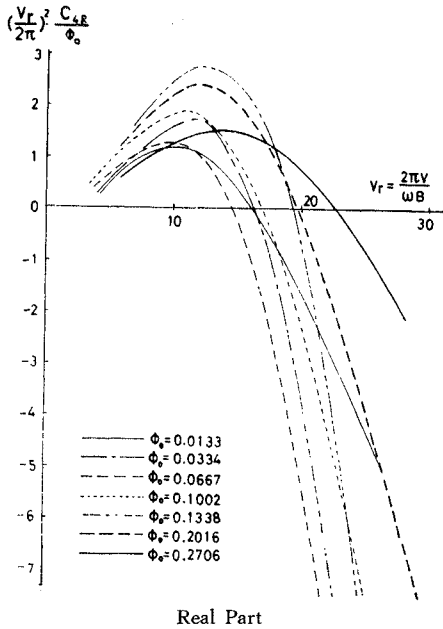


Fig. 8 Aerodynamic Moment Coefficients of Rectangular Section

の初期振幅を与えたとき、振動が持続する領域を不安定、振動が消滅する領域を安定として Fig. 7 に示した。この安定領域は、 $\eta_0 \leq 0.1$ の任意の η_0 に対して

$$2\alpha_\eta \cdot \frac{m}{\nu_\eta} > \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{C_{1I}(\eta_0, V_r)}{\eta_0} \dots\dots\dots(37)$$

という条件から得られる。

同図中、破線は Scruton, C.4) が自由振動実験結果から求めたもので、両者の傾向は非常によく一致しているが、細部にはずれが見られる。

(2) 長方形断面の回転振動

次に、Fig. 2 に示されるような長方形断面（高さ・幅比 0.3）の回転振動系に非線形理論の適用を行なう。この断面の空気力係数 C_{dR}, C_{dI} は、強制振動法によって Fig. 8 のように求まっている。

a) 応答曲線

長方形断面の回転振動の場合、空気力特性は Fig. 8 からもわかるように比較的単調であり、したがって応答特性も正方形の場合とは異なって単純なものとなっている。構造減衰の値により振動特性が異なることは先に述べたが、振幅の上でそれを確かめたのが次の Fig. 9 である。同図は $\nu_\phi/\theta=0.01$ の場合の応答振幅を風速の関数とし、構造減衰定数と θ/ν_ϕ （極慣性モーメント比）の積をパラメータとして計算により求めたものである。 $\nu_\phi/\theta=0.1, 0.001$ の場合にもほぼ同様の図が得られた。図中、実線は安定な振動を示し、破線は不安定な振動を示している。

d) 自由振動実験結果との比較

Table 2 に示される振動系に対して自由振動実験を行なった。構造減衰定数 $\alpha_\phi=0.0170, 0.0251$ に対する実験結果、および式 (22) を測定空気力に適用して求め

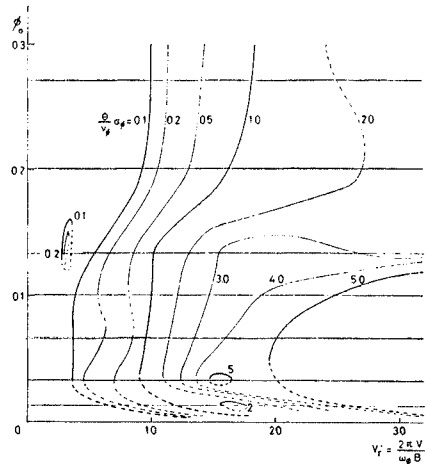


Fig. 9 Response Curves of Rectangular Section for Various Damping

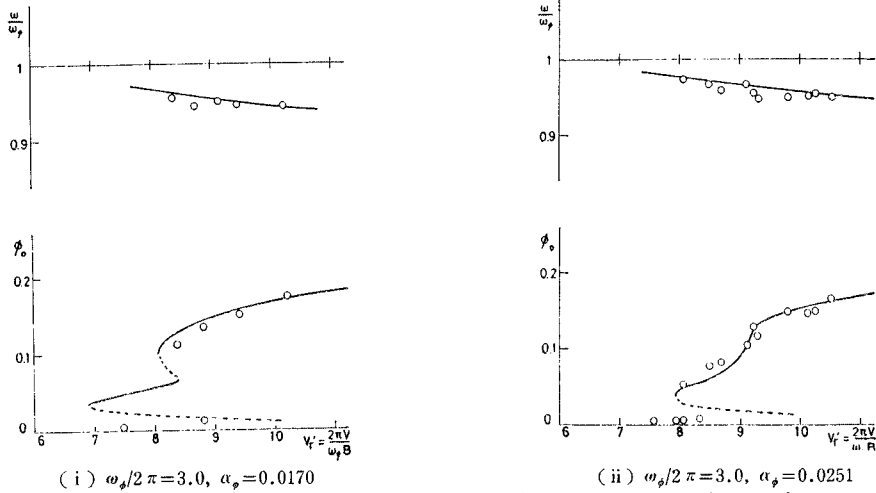


Fig. 10 Comparison between Calculated Results and Experimental ones of Rectangular Section

Table 2 Dimensions of Rectangular Section

L(length)	H(height)	B(width)	W(weight of model)	θ (moment of inertia)
660 mm	90 mm	300 mm	3.22 kg	13.04 g·s ²

た計算結果を Fig. 10 に載せる。図中、実線が安定な振動解を破線が不安定な振動解を、○印が実験値を示す。測定点が少ないため断定的なことはいえないが、空気力が測定された振幅域 $\phi_0 \geq 0.013$ では、実験値は計算された曲線によくのっているとみてよい。振動数もかなり一致しているようである。一方、実験においては微小振幅 $\phi_0 < 0.01$ で定常振動が観測されている。この領域では空気力測定を行っていないので振動を予測することのできないのは当然であるが、耐風安定性の面からいえばこの微小振動もまた重要であり、今後この領域での空気力測定が望まれる。

次に、時間経過に伴う振動発達について検討を行なう。式 (25) において C_{4I} は ϕ_0 と V_r の関数であるが、 V_r を一定としておけば式の右辺は容易に計算できる。 $\alpha_\phi = 0.017$, $V_r' = \frac{2\pi V}{\omega_\phi B} = 10.5$ の場合においては、Fig. 10 にみられるように、 $\phi_0 = 0.17$ 程度の定常振幅が計算され、測定もされている。このケースについて、振幅が微小の時点からの発達過程を Fig. 11 に示した。図中、実線が計算値で○印が実験値である。ただし、横軸は波数を示すもので、 $\phi_0 = 0.1$ となる点を基準としている。他のケースについても同様の図が得られたが、計算値と実験値がこのような遷移状態においてもよく一致しているということは、2. で示した基本的な考え方を十分裏付けるものと考えてよい。

e) 安定領域

正方形断面の場合と同様、 $\phi_0 = 0.1$ という初期振幅を

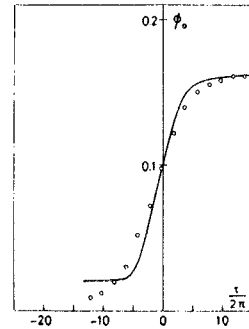


Fig. 11 Amplitude vs. Time for Rectangular Section

与えたときの安定領域と不安定領域が、Fig. 12 のように得られた。ただし、微小振幅における空気力が測定されていないので、この図は微小振動を無視したことになる。

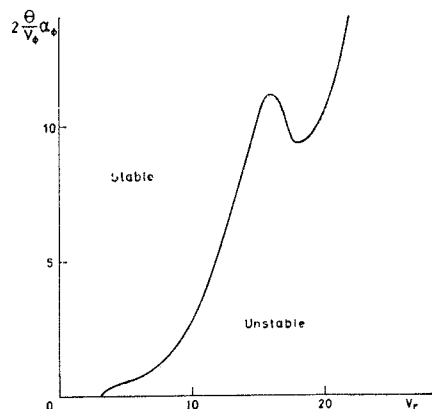


Fig. 12 Aerodynamic Stability of Rectangular Section

5. 結論および今後の問題点

本論文は、構造物の耐風安定性を検討するさい、空気力の振動振幅に対する非線形性を考慮すべきであるということを目指し、応答との関連においてこの非線形性をいかにとらえるかということについて理論的考察を行なったものである。さらに、その妥当性を証明するため、あらかじめ強制振動法によって測定された空気力に理論を適用し、その結果と自由振動実験結果との比較考察を行なった。それらの結果は次のようにまとめられる。

(1) 二次元性保持のほか、二、三の工学的に妥当と思われる仮定を設ければ、物体の振動応答は、その物体が一定振幅・一定振動数で振動しているときに作用する空気力のうち、物体の振動と同振動数成分に関する情報のみで決定される。すなわち、本論文での空気力係数 C_1, C_2, C_3, C_4 が無次元化振幅、無次元化風速の関数として得られれば、振動応答は計算によって求められる。

(2) スレンダーな構造物の振動にさいしても、空気力係数に振動モードを考慮した修正を施せば容易に二次元問題に還元できる。

(3) 理論を適用した計算結果と自由振動実験結果との比較は、正方形断面の上下振動、長方形断面の回転振動について行なわれ、総じて満足すべき結果を得た。特に長方形断面の場合には、測定空気力の精度のよさも相まって、遷移状態における対比も満足すべき結果となっている。また、正方形断面の場合、Scruton, C. が自由振動実験結果から得た安定領域と、理論を適用して得た領域との比較も行なわれたが、細かい点での違いはあるものの、全体としてよく類似しているといえよう。

(4) 一方、残された問題も少なくない。その1つ

は、微小振幅における空気力をいかにして精度よく測定するかという点で、このためには自由振動実験結果から空気力を逆算して求め、補完することが有効であると思われる。

(5) 三次元問題への非線形理論の適用は、本研究では実験による検証という段階にまで至っていないが、部分模型実験の結果と全体模型実験の結果を結びつける有効な手がかりになると思われるので、やはり重要な問題として検討に値するといえよう。

(6) 上下・回転連成振動に対しても、1つの方法を提案したが、この問題についても具体例についての検討は今後の課題である。

なお、本論文では一様空気流中での挙動に焦点を絞っており、風の変動性の影響についてはあらためてとりあげられることが望まれる。

本研究を行なうにあたって、助言ならびに協力をいただいた東京大学橋梁研究室の田中 宏助手、小栗英和助手、大学院生の久保喜延・沼田敏樹両者に対して心から感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) Bleich, F.: The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, Bureau of Public Roads, Department of Commerce, Wash., 1950
- 2) Stoker, J.J.: Nonlinear Vibrations in Mathematical and Electrical Systems, Interscience, New York, 1950
- 3) 伊藤 学・宮田利雄・森光康夫：正方形柱に作用する変動抗・揚力、構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集, 1972, 12.
- 4) Scruton, C.: On the Wind-Excited Oscillations of Stacks, Towers and Masts, Symp. Wind Effects on Buildings and Structures, Teddington, 1963
- 5) 田中 宏・伊藤 学：充腹構造物の自励振動における空気力の特性, 土木学会論文報告集 No. 168, 1969-8
(1973.5.10・受付)