

# 有限要素法による直結軌道スラブの設計について

## DESIGN OF CONCRETE TRACK SLAB ON ELASTIC FOUNDATION USING THE FINITE ELEMENT METHOD

西 頭 常 彦\*  
By Tsunehiko Saito

### 1. 本研究の必要性

軌道構造の省力化の一形式として、ヨーロッパをはじめ各国で、スラブ形式の直結軌道が試験されている。わが国においても、国鉄がスラブ軌道を開発<sup>1)</sup>し実用化の段階に入りつつある。その構造は 図-1 に示すように、レールを取付けられた軌道スラブを所定の高さに合わせ、その軌道スラブとコンクリート床との間に弾性的支承体を形成するものである。

バラスト軌道の変形解析は、従来からはり理論<sup>\*1</sup>によって行なわれている。スラブ軌道の解析<sup>2)</sup>も当初これにしたがった。しかし、その後、測定が進むにつれて、この解析方法に矛盾があることが見出された。すなわち、当初の軌道スラブの力学モデルは、図-2 に示すように、軌道パッドの弾性 ( $k_1$ ) がレール下に一様に連続的に、分布されているものと仮定して設定された。この力学モデルによる標準構造の計算結果を 図-3 に示す。これによると、荷重点直下の軌道スラブ下側のコンクリートに生じる曲げ引張縁線応力度は  $2.8 \text{ kg/cm}^2$  であ

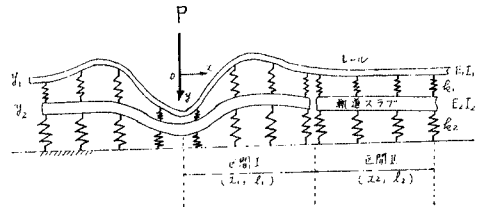


図-2 スラブ軌道応力解析のための当初の力学モデル (はり理論)

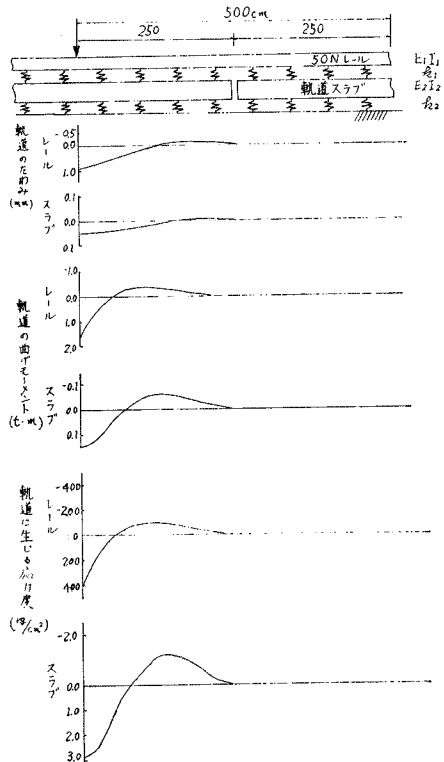


図-3 はり理論によるスラブ軌道の応力解析例 (ただし締結間隔は 625 mm)

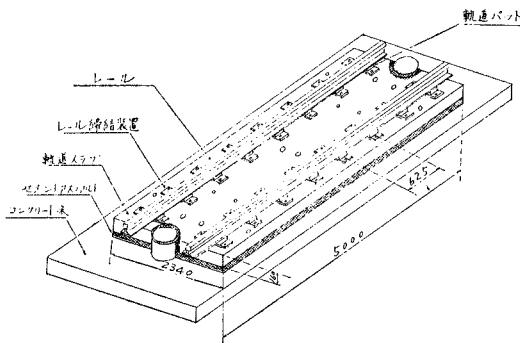


図-1 スラブ軌道構造の例 (寸法単位は mm)

\* 正会員 国鉄鉄道技術研究所 軌道研究室 主任研究員  
\*1 ここでいうはり理論とは弾性床上的のはりを意味する。

り、この値は実測値\*に比較して非常に小さい。また、はり理論では軌道パッドの弾性を分散させたため、レール締結間隔が大きくなると、レール支持弾性<sup>\*1</sup>が小さくなり、スラブの曲げ応力度は小さくなる。しかし実際の現象は全く逆であって、レール締結間隔が大きくなると締結装置への輪重の集中率が大きくなるため、軌道スラブの曲げ応力度は大きくなる。なお、直結軌道スラブはいわゆる平板構造であって、これをはりとして取扱うと、線路に直角な方向の断面力の正解が求められない<sup>3)</sup>。上述のように、従来の解析方法にはいくつかの矛盾があることが明らかとなったので、著者は次のような新しい解析方法を提案する。

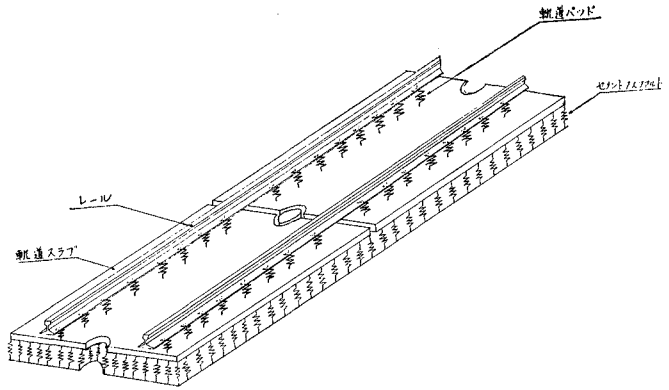


図-4 スラブ軌道の応力解析のために提案した新しい力学モデル

素法によることとした。

## 2. 有限要素法によるスラブ軌道の応力解析

### (1) 新しい構造解析モデルの提案

前述の矛盾を除くために、図-4に示すような力学モデルを新たに提案する。まず、レールは細長い部材であるから、これをはりとして考えることは当然である。その支持弾性は、レール締結装置部にある軌道パッドによって与えられているので、そのモデル化は、レール締結部ごとに1個の線形のばねがあるものとする。これによって、レール支持弾性を分散させたことによる矛盾が解消される。次に、軌道スラブは平板であるから、図-4に示すように、平板としてそのままモデル化する。その支持弾性は、単位面積の支承体を単位長さだけ圧縮するに要する力、いわゆる地盤反力係数  $k_p$  で表わされる線形のばねとしてモデル化を行なう。

このような、弾性支承体を有するレールと軌道スラブとが重なった構造の応力解析としては、二、三の方法があるが、ここでは境界条件の適用が比較的自由な有限要素

### (2) 有限要素法の適用

スラブ軌道の応力解析を有限要素法によって行なうには、レールははりとして、軌道スラブは薄い平板としての力学的仮定を満たすものと考え、まず、軌道スラブを図-5に示すように三角形要素に分割し、レールおよびスラブのそれぞれの要素の変形を適当な関数(以後、形状関数と呼ぶ)の一次結合で仮定する。次に、レールおよび軌道スラブのもつポテンシャルエネルギー  $II$  を算定し、これに変分原理<sup>4)</sup>を適用し演算を行なって、レールおよび軌道スラブの変形量および応力度を求めることになる。三角形要素を使用したのは軌道スラブはその両端に半円の切欠部などがあり、四角形要素では適切な要素分割ができないと考えられたからである。

四角形要素を使用した場合、弾性支持された平板の解析は Henry T.Y. Yang<sup>5)</sup>によって行なわれているが、三角形要素を使用した場合の支承体の剛性マトリックスは明らかではない。スラブ軌道の変形解析には、軌道スラブおよびその支承体の剛性マトリックスをまず定式化しなければならない。

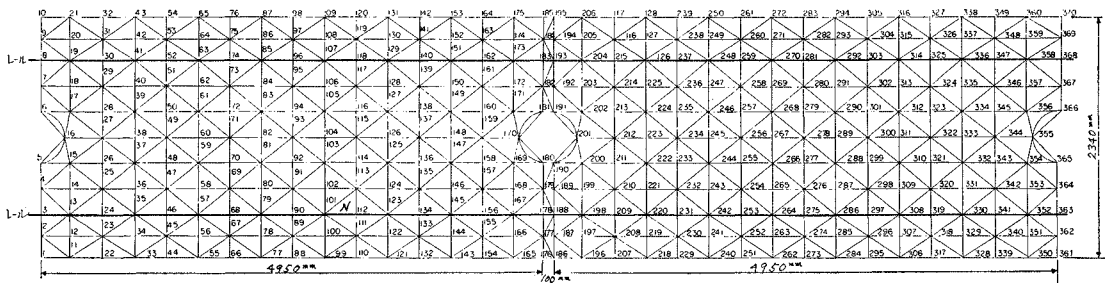


図-5 山陽新幹線軌道スラブの三角形要素分割例

\* 文献 1), p. 70 および p. 90 参照。

\*1 はり理論では、レール支持弾性=軌道パッドの弾性/レール締結間隔

(3) レールおよび軌道スラブの形状関数

a) レールの形状関数

図-5 に示した任意の三角形要素  $N$  を取り出して 図-6 とし、この図において辺 1~2 上にレール要素があるとす。このレール要素のたわみ  $u$  を三次式で仮定し、線座標  $\varphi_1, \varphi_2$  を用いて表わすと次のようになる。

$$u = f_r^T \cdot \mathbf{a}_r \dots\dots\dots (1)$$

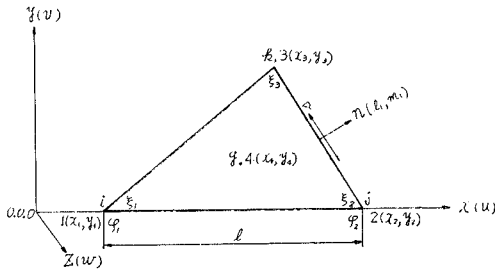


図-6 三角形要素

ただし、 $f_r^T = [\varphi_1^3, \varphi_2^3, \varphi_1^2\varphi_2, \varphi_1\varphi_2^2]$ 、 $\mathbf{a}_r^T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$  で、 $\mathbf{a}_r$  は未知係数、上付き添字  $T$  は転置を意味する。未知パラメーターとして  $\mathbf{a}_r$  の代りに要素両端のたわみとたわみ角とをとり、それを  $\mathbf{q}_r^T = [u_1, u_2, \theta_1, \theta_2]$  とすると、 $\mathbf{q}_r$  と  $\mathbf{a}_r$  との間には次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{C}_r \cdot \mathbf{a}_r \dots\dots\dots (2)$$

したがって、 $\mathbf{C}_r^{-1}$  を  $\mathbf{A}_r$  と書くと、 $u$  は次のように表わされる。

$$u = f_r^T \cdot \mathbf{A}_r \cdot \mathbf{q}_r \dots\dots\dots (3)$$

b) 軌道スラブの形状関数

図-6 に示した三角形要素内の変位  $w$  を三次式で仮定する。図に示すように、3つの頂点  $i, j, k$  および重心点  $g$  の座標を、いわゆる面積座標  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  で表わすと、三角形要素の形状関数  $w$  が次に示すように表わされる。

$$w = f_p^T \cdot \mathbf{a}_p \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 $f_p^T = [\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_3^3, \xi_1^2\xi_2, \xi_2^2\xi_3, \xi_3^2\xi_1, \xi_1^2\xi_3, \xi_2^2\xi_1, \xi_3^2\xi_2, \xi_1\xi_2\xi_3]$  および  $\mathbf{a}_p^T = [\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4', \alpha_5', \alpha_6', \alpha_7', \alpha_8', \alpha_9', \alpha_{10}']$  で、 $\mathbf{a}_p$  は未知係数である。未知パラメーターとして、三角形の3頂点でのたわみおよび、たわみ角である  $w_1, w_{1x}, w_{1y}, w_2, w_{2x}, w_{2y}, w_3, w_{3x}, w_{3y}$  および重心点でのたわみ  $w_4$  ととり、それを  $\mathbf{q}_p^T = [w_1, w_2, w_3, w_{x1}, w_{x2}, w_{x3}, w_{y1}, w_{y2}, w_{y3}, w_4]$  とすると、式 (4) から  $\mathbf{q}_p$  と  $\mathbf{a}_p$  との間には、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{q}_p = \mathbf{C}_p \cdot \mathbf{a}_p \dots\dots\dots (5)$$

したがって  $\mathbf{C}_p^{-1}$  を  $\mathbf{A}_p$  と書くと、 $w$  は次のように表わされる。

$$w = f_p^T \cdot \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{q}_p \dots\dots\dots (6)$$

(4) 形状関数の連続性および収束性

レールの形状関数は式 (1) より明らかなように、たわみおよびたわみ角が連続であり適合条件を満足しており、収束も良好である。軌道スラブの形状関数は、たわみは要素境界上で連続であるが、たわみ角は連続ではない。

薄板の曲げを有限要素法で解く場合、Compatible model を求めることは困難であるので、たわみ角の連続性を形状関数に求めないで、Lagrange の未定乗数法により汎関数のなかに入れるいわゆるハイブリッド型ポテンシャルエネルギー原理<sup>9)</sup>を用いている例もある。本文の軌道スラブの曲げ問題はこの方法を用いることとした。ハイブリッド型を用いた場合、その精度および収束性は良好であるといわれているが、ここでは、3. においてそれを検討したい。

(5) レールおよびその支承体の剛性マトリックス

弾性体のひずみエネルギーは、ひずみ・変位関係式を用いて変位成分で表わすことができる。レールおよび軌道スラブの変位成分については、すでに、(3) で表わされているので、レール要素のポテンシャルエネルギー  $\Pi_{r1}$  を次のように書くことができる。

$$\Pi_{r1} = \frac{1}{2} \int_l EI u_{xx}^2 dx - \int_l \bar{p}_r u dx \dots\dots\dots (7)$$

レール支承体のポテンシャルエネルギー  $\Pi_{r2}$  は次の式で与えられる。

$$\Pi_{r2} = \frac{1}{2} \{ k_{r1}(u_1 - w_1)^2 + k_{r2}(u_2 - w_2)^2 \} \dots\dots (8)$$

ここに、 $l$ : レール要素内部の領域、 $EI$ : レールの剛性、 $u_{xx}$ : レールの曲率、 $k_{r1}$ : 要素の左側の軌道パッドの弾性、 $k_{r2}$ : 要素の右側の軌道パッドの弾性、 $\bar{p}_r$ : レールに作用する分布荷重、 $u_1, u_2$ : それぞれレール要素の節点1および2におけるレール変位、 $w_1, w_2$ : それぞれレール要素の節点1および2に対応するスラブの変位である。式 (3) および (6) を式 (7) および (8) に代入し集中荷重  $P$  をも考慮して計算すると、次のようになる。

$$\Pi_{r1} = \frac{1}{2} EI \cdot \mathbf{q}_r^T \cdot \frac{1}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & -12 & 6l & 6l \\ & 12 & -6l & -6l \\ & & 4l^2 & 2l^2 \\ \text{Symmetry} & & & 4l^2 \end{pmatrix} \mathbf{q}_r - \frac{\bar{p}_r \cdot l}{12} \begin{pmatrix} 6 \\ l \\ l \\ l \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^2 P_i \cdot u_i \dots\dots\dots (9)$$

\*2  $\varphi_1 = (x_2 - x)/l, \varphi_2 = (x - x_1)/l$

$$\Pi_{r2} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{r1} & 0 & -k_{r1} & 0 \\ & k_{r2} & 0 & -k_{r2} \\ & & k_{r1} & 0 \\ \text{Symmetry} & & & k_{r2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

(6) 軌道スラブおよびその支承体の剛性マトリックス

軌道スラブを 図-5 のように分割し、座標を設定すると、ハイブリッド型ポテンシャルエネルギー原理を用いた場合の要素  $N$  についての汎関数<sup>7)</sup> は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Pi_{pHN} = & \int_{S_N} \{A(w) - P \cdot w\} dS \\ & + \int_{C_N} M_n(w_n - \phi) dS^* \\ & + \frac{1}{2} k_p \int_{S_N} w^2 dS \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

$$A(w) = \frac{D}{2} \{(w_{xx} + w_{yy})^2 + 2(1-\nu) \cdot (w_{xy}^2 - w_{xx} \cdot w_{yy})\} \dots(12)$$

ここに、 $S_N$ ：要素内部の領域、 $A(w)$ ：平板のひずみエネルギー、 $P$ ：荷重強度、 $k_p$ ：スラブ支承体の反力係数、 $D$ ：軌道スラブの曲げ剛性、 $w_{xx}$ 、 $w_{yy}$ 、 $w_{xy}$ ：それぞれ曲率、 $C_N$ ：要素  $N$  の境界の領域、である。式 (11) の第 2 項については、以下のようである。

$$M_n = -D(\partial^2 w / \partial n^2 + \nu \cdot \partial^2 w / \partial s^2) \dots\dots\dots(13)$$

$$w_n = \partial w / \partial n \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 $n$  は要素境界における法線方向であり、 $s$  は接線方向である (図-6 参照)。 $\phi$  は要素境界の傾斜角であって次のようにきめる。すなわち、図-6 の三角形要素の節点 2 および 3 におけるたわみ角をそれぞれ、 $w_{x2}$ 、 $w_{y2}$ 、 $w_{x3}$ 、 $w_{y3}$  とすると、節点 2 および 3 の法線方向の傾斜角が次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} w_{n2} &= l_1 w_{x2} + m_1 w_{y2} \\ w_{n3} &= l_1 w_{x3} + m_1 w_{y3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)^*$$

上式と節点 2 および 3 における座標とから  $\phi$  を次のように仮定する。

$$\phi = \xi_2 w_{n2} + \xi_3 w_{n3} \dots\dots\dots(16)$$

すなわち、 $\phi$  はその両端の座標が定まれば一義的に決定される。

式 (6)、(12)、(13)、(14) および (16) を式 (11) に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_{pHN} = & \frac{1}{2} q_p^T \cdot [K_1 + K_2] \cdot q_p - p_p^T \cdot q_p \\ & + \Pi_{HN}^{*2} \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

\* ハイブリッド型にしたための付加項  
<sup>1)</sup>  $l_1$  および  $m_1$  は  $n$  の方向余弦  
<sup>2)</sup> ハイブリッド型にしたための付加項のポテンシャルエネルギー (文献 7) 参照

ここに、 $K_1$  は軌道スラブの剛性マトリックスであって、式 (4) から (10×10) の正方行列であることがわかる。 $K_1$  を次のように表わすことにする。

$$K_1 = D \cdot A_p^T \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \cdot A_p \dots\dots(18)$$

上式において、 $S_{11} \sim S_{13}$ 、 $S_{21} \sim S_{23}$ 、 $S_{31} \sim S_{33}$  は、それぞれ、3×3 の正方マトリックス、 $S_{41} \sim S_{43}$  は (1×3) の行マトリックス、( $S_{14} \sim S_{34}$ ) は (3×1) の列マトリックスを表わすことになり、それぞれの要素は、次の式で表わされる。

$$\begin{aligned} S_{11ij} &= 36 X_{ij} \cdot Y_{ij} \\ S_{21ij} &= 24 X_{ij} \cdot Y_{i+1,j} + 12 X_{i+1,j} \cdot Y_{ij} \\ S_{31ij} &= 24 X_{ij} \cdot Y_{i+2,j} + 12 X_{i+2,j} \cdot Y_{ij} \\ S_{41ij} &= 12 \sum_{i=1}^3 X_{i+2,j} \cdot Y_{i+1,j} \\ S_{12ij} &= 24 X_{ij} \cdot Y_{i,j+1} + 12 X_{i,j+1} \cdot Y_{ij} \\ S_{22ij} &= 4 X_{i+1,j+1} \cdot Y_{ij} + 8 X_{i+1,j} \cdot Y_{i,j+1} \\ & \quad + 8 X_{i,j+1} \cdot Y_{i+1,j} + 16 X_{ij} \cdot Y_{i+1,j+1} \\ S_{32ij} &= 4 X_{i+2,j+1} \cdot Y_{ij} + 8 X_{i+2,j} \cdot Y_{i,j+1} \\ & \quad + 8 X_{i,j+1} \cdot Y_{i+2,j} + 16 X_{ij} \cdot Y_{i+2,j+1} \\ S_{42j} &= 4 \sum_{i=1}^3 X_{i+2,j+1} \cdot Y_{i+1,j} + 8 \sum_{i=1}^3 X_{i+2,j} \cdot Y_{i+1,j+1} \\ S_{13ij} &= 24 X_{ij} \cdot Y_{i,j+2} + 12 X_{i,j+2} \cdot Y_{ij} \\ S_{23ij} &= 4 X_{i+1,j+2} \cdot Y_{ij} + 8 X_{i,j+2} \cdot Y_{i+1,j} \\ & \quad + 8 X_{i+1,j} \cdot Y_{i,j+2} + 16 X_{ij} \cdot Y_{i+1,j+2} \\ S_{33ij} &= 4 X_{i+2,j+2} \cdot Y_{ij} + 8 X_{i,j+2} \cdot Y_{i+2,j} \\ & \quad + 8 X_{i+2,j} \cdot Y_{i,j+2} + 16 X_{ij} \cdot Y_{i+2,j+2} \\ S_{43j} &= 4 \sum_{i=1}^3 X_{i+2,j+2} \cdot Y_{i+1,j} \\ S_{14ij} &= 12 X_{i,j+2} \cdot Y_{i,j+1} \\ S_{24ij} &= 4 X_{i+1,j+2} \cdot Y_{i,j+1} + 8 X_{i,j+2} \cdot Y_{i+1,j+1} \\ S_{34ij} &= 4 X_{i+2,j+2} \cdot Y_{i,j+1} + 8 X_{i,j+2} \cdot Y_{i+1,j+1} \\ S_{44j} &= 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_{i+2,j+2} \cdot Y_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \int_{S_N} \xi_i \cdot \xi_j dS \\ Y_{i+1,j+1} &= B_i B_{j+1} B_j B_{j+2} + C_i C_{j+1} C_j C_{j+2} \\ & \quad + 2\nu \cdot B_i B_{j+1} C_j C_{j+2} \\ & \quad + 0.5(1-\nu) \cdot (B_i C_{j+1} \cdot B_{j+1} C_i) \\ & \quad \cdot (B_j C_{j+2} + B_{j+2} C_j) \\ B_i &= (y_j - y_k) / 2 S \\ C_i &= -(x_j - x_k) / 2 S \end{aligned}$$

である。ただし、 $x$  および  $y$  は 図-6 に示した座標である。

次に、 $K_2$  はスラブ支承体の剛性マトリックスであって、表-1 のように書くことができる。また、 $p_p^T$  は荷重ベクトルであって、次のように表わすことができる。



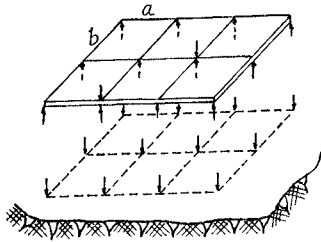


図-9 Winkler の基礎モデル

示すように長方形要素の場合であって、弾性支承体の剛性を次のように行列表示<sup>9)</sup>している。

$$[P_N] = abK[\alpha]\{w\} \dots (22)$$

ここに、 $P_N$  : 節点外力、 $a, b$  : それぞれ長方形要素の辺長、 $K$  : 地盤反力係数、 $\alpha$  : 節点にあつまる要素の数より定まる対角係数行列、 $w$  : 節点変位である。一方、長方形要素の場合の平板の剛性マトリックスは、すでに文献 10) に示されているので、これと上式を用いて弾性基礎上の板が解析される。これらを用いて式 (17) を使用した解析の妥当性の検討を以下に行なう。

この検討は、土路盤上にある軌道スラブの変形<sup>11)</sup>について行なう。すなわち、長さ 115 cm、幅 200 cm の軌道スラブを、図-10 および 11 に示すように、それぞれ長方形および三角形要素に分割する。長方形要素については前述の要領で、三角形要素については式 (17) から、剛性マトリックスを算定する。計算諸元は、支承体の基礎反力係数  $K=5 \text{ kg/cm}^3$ 、軌道スラブの厚さ 19 cm、ヤング率  $E=350 \text{ t/cm}^2$ 、ポアソン比  $\nu=0.1$  とし、輪重 ( $P=5.2 \text{ t}$ ) が縮結装置の直上 (長方形要素の場合は節

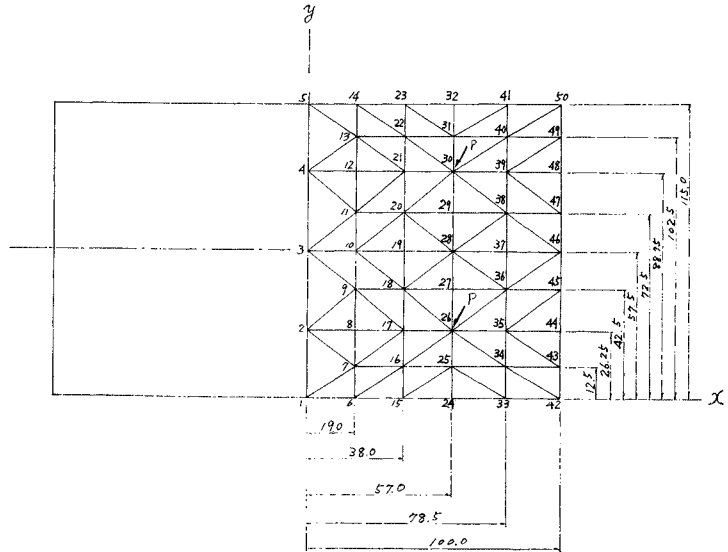


図-11 土路盤上軌道スラブの三角形要素分割例 (寸法単位は cm)

点 18、三角形要素の場合は節点 26 および 30) に位置するものとする。これらの計算結果を表-2 および 3 に示す。表-2 において、 $NDP=18$  の  $DX(3) \approx 0.181 \text{ cm}$  と、表-3 において、Joint 26 および 30 の  $w \approx 0.181 \text{ cm}$  とがそれぞれ対応するたわみである。両表から、たわみは長方形要素の場合と三角形要素の場合とで、ほとんど差異は認められない。したがって、平板の支承体剛性マトリックスは実用的であり式 (17) による解析は妥当なものであると考えられる。

#### 4. 設計計算例、試験結果およびその解析

##### (1) 軌道スラブの支持弾性が一樣な場合の計算結果

前章において、著者の剛性マトリックスの実用性が実証されたので、以下に軌道スラブの設計計算を行なう。はり理論による計算結果<sup>12)</sup> および実験結果<sup>13)</sup> によれば、レール変位は車輪の位置から 2.0 ~ 2.5 m で 0 になっているので、1 車輪が 5 m 長さの軌道スラブ中央に載荷された場合の変形解析上必要なレール長さは 5 m でも差しつかえない。したがって、軸距 2.5 m の台車が載荷された場合は、レール長さは 7.5 m あればよい。ここでは、後述するよう

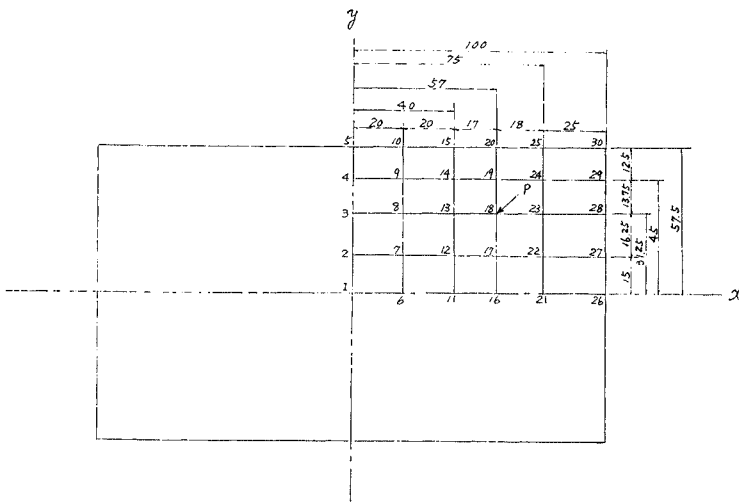


図-10 土路盤上軌道スラブの長方形要素分割例 (寸法単位は cm)

表一 2 長方形要素を用いた場合の土路盤上軌道スラブの変形解析例

DISPLACEMENT (CM) , ANGLE (RADIAN) AT EACH NODEAL POINT		
NDP= 1	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 11 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 2	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 12 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 3	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 13 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 4	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 14 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 5	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 15 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 6	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 16 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 7	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 17 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 8	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 18 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 9	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 19 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
NDP= 10	DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00	NDP= 20 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 21 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 22 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 23 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 24 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 25 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 26 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 27 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 28 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 29 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00
		NDP= 30 DX( 1)= 0.1921017E-04 DX( 2)= -0.5620444E-04 DX( 3)= 0.1809840E 00

表一 3 三角形要素を用いた場合の土路盤上軌道スラブの変形解析例

JOINT	X (C.M.)	Y (C.M.)	W (C.M.)	WX	WY
1	0.0	0.0	0.1752659E 00	0.0	0.2112612E-04
2	0.0	0.2625000E 02	0.1756170E 00	0.0	0.4909671E-05
3	0.0	0.5750000E 02	0.1755825E 00	0.0	-0.2954068E-05
4	0.0	0.8875000E 02	0.1754335E 00	0.0	-0.1073693E-04
5	0.0	0.1150000E 03	0.1749290E 00	0.0	-0.2701302E-04
6	0.1900000E 02	0.0	0.1761434E 00	0.8842437E-04	0.1892447E-04
7	0.1900000E 02	0.1250000E 02	0.1763673E 00	0.4903032E-04	0.1400430E-04
8	0.1900000E 02	0.2625000E 02	0.1764969E 00	0.4902767E-04	0.4362548E-05
9	0.1900000E 02	0.4250000E 02	0.1764832E 00	0.8498841E-04	-0.4081987E-05
10	0.1900000E 02	0.5750000E 02	0.1764142E 00	0.5767077E-04	-0.2934132E-05
11	0.1900000E 02	0.7250000E 02	0.1763956E 00	0.8608049E-04	-0.1730397E-05
12	0.1900000E 02	0.8875000E 02	0.1763154E 00	0.9048008E-04	-0.1011835E-04
13	0.1900000E 02	0.1025000E 03	0.1761069E 00	0.4903532E-04	-0.1974800E-04
14	0.1900000E 02	0.1150000E 03	0.1758109E 00	0.888642E-04	-0.2471839E-04
15	0.3800000E 02	0.0	0.1782519E 00	0.1920003E-03	0.2089608E-04
16	0.3800000E 02	0.1250000E 02	0.1785524E 00	0.1285010E-03	0.2010795E-04
17	0.3800000E 02	0.2625000E 02	0.1787377E 00	0.1374300E-03	0.0027699E-05
18	0.3800000E 02	0.4250000E 02	0.1785570E 00	0.1221242E-03	-0.1447136E-04
19	0.3800000E 02	0.5750000E 02	0.1784145E 00	0.1133943E-03	-0.2848450E-05
20	0.3800000E 02	0.7250000E 02	0.1784711E 00	0.1222448E-03	0.8814037E-05
21	0.3800000E 02	0.8875000E 02	0.1785619E 00	0.137740E-03	-0.6573740E-05
22	0.3800000E 02	0.1025000E 03	0.1782998E 00	0.1289665E-03	-0.2565933E-04
23	0.3800000E 02	0.1150000E 03	0.1779246E 00	0.1208166E-03	-0.2645083E-04
24	0.5700000E 02	0.0	0.1800564E 00	0.6407683E-04	0.4081987E-04
25	0.5700000E 02	0.1250000E 02	0.1805457E 00	0.6431822E-04	0.4045758E-04
26	0.5700000E 02	0.2625000E 02	0.1808785E 00	0.6314473E-04	-0.2693152E-05
27	0.5700000E 02	0.4250000E 02	0.1804339E 00	0.6254110E-04	-0.3781216E-04
28	0.5700000E 02	0.5750000E 02	0.1801615E 00	0.6224344E-04	-0.2742279E-05
29	0.5700000E 02	0.7250000E 02	0.1803519E 00	0.6270624E-04	0.3236393E-04
30	0.5700000E 02	0.8875000E 02	0.1807084E 00	0.6347048E-04	-0.2698041E-05
31	0.5700000E 02	0.1025000E 03	0.1803017E 00	0.6476200E-04	-0.4580477E-04
32	0.5700000E 02	0.1150000E 03	0.1794745E 00	0.6463362E-04	-0.4614418E-04
33	0.7850000E 02	0.0	0.1805504E 00	-0.1478226E-04	0.1512747E-04
34	0.7850000E 02	0.1250000E 02	0.1807946E 00	-0.2401621E-04	0.1738733E-04
35	0.7850000E 02	0.2625000E 02	0.1809434E 00	-0.3306471E-04	-0.2644956E-06
36	0.7850000E 02	0.4250000E 02	0.1807658E 00	-0.1954405E-04	-0.1444388E-04
37	0.7850000E 02	0.5750000E 02	0.1806337E 00	-0.1237244E-04	-0.2637971E-05
38	0.7850000E 02	0.7250000E 02	0.1806867E 00	-0.1944170E-04	0.9180745E-05
39	0.7850000E 02	0.8875000E 02	0.1807792E 00	-0.3284830E-04	-0.4951842E-05
40	0.7850000E 02	0.1025000E 03	0.1805586E 00	-0.2371160E-04	-0.2260762E-04
41	0.7850000E 02	0.1150000E 03	0.1802493E 00	-0.1441791E-04	-0.2032850E-04
42	0.1000000E 03	0.0	0.1798710E 00	-0.4079120E-04	0.1696497E-04
43	0.1000000E 03	0.1250000E 02	0.1800865E 00	-0.3175078E-04	0.1076888E-04
44	0.1000000E 03	0.2625000E 02	0.1801669E 00	-0.3720275E-04	0.2197921E-05
45	0.1000000E 03	0.4250000E 02	0.1801395E 00	-0.2923648E-04	-0.2053356E-05
46	0.1000000E 03	0.5750000E 02	0.1803010E 00	-0.3854104E-04	-0.2579764E-05
47	0.1000000E 03	0.7250000E 02	0.1800622E 00	-0.2916478E-04	-0.8195639E-07
48	0.1000000E 03	0.8875000E 02	0.1800065E 00	-0.3704611E-04	-0.7312745E-05
49	0.1000000E 03	0.1025000E 03	0.1798558E 00	-0.3151806E-04	-0.1587914E-04
50	0.1000000E 03	0.1150000E 03	0.1795761E 00	-0.4057426E-04	-0.2207483E-04

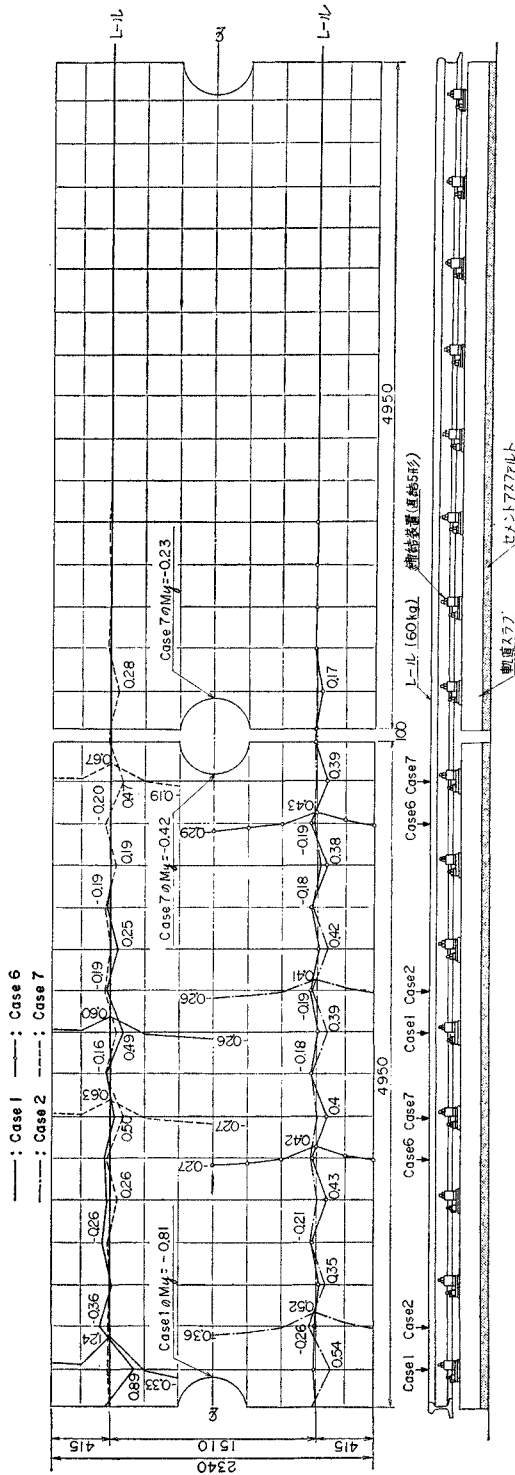


図-12 山陽新幹線用軌道スラブの曲げモーメント計算例 (単位は t·m)

に軌道スラブ2枚について応力解析の必要があることをも考慮して、レール長さは10mとしその両端で自由で

あるとしたのである。軌道スラブの特徴の一つとして、その両端に半円の切欠部があり、実測によるとこの切欠部の応力度は、かなり大きいのでこの部分の応力状態を明らかにすることが軌道スラブの設計上重要である。

軌道スラブ中央部の設計断面力算定のためには1枚の軌道スラブでもよいが、端部の設計断面力算定のためにはロングレールの状態、つまり、図-12に示すように2枚の軌道スラブが継目を介して突き合わされていて、その上をレールが連続して敷設されCase7のように車輪が載荷されている状態で解析する必要がある。この目的に沿って解析を行なうために、以下のように要素分割を行なった。

新幹線軌道スラブ(A55形)1枚を、線路方向にはレール中心線を含めて10区画、線路と直角方向には締結装置中心線および、締結装置相互間の中心線で16区画に分け、また、スラブ相互間は10cmの間隔があるものとして、図-5のように要素分割を行なった。車輪位置は軸距2.5mの新幹線台車が、スラブ左端の締結装置直上の点から右端方向へ移動した場合について考えた。

図-12において、Case①および⑦は、連行された車輪がそれぞれ、締結装置の直上に位置し、Case②および⑥は、それぞれ、締結装置相互間の中央\*に位置することを示している。軌道構造諸元としては、実軌道の値、すなわち軌道スラブの支持弾性  $k_b = 123 \text{ kg/cm}^3$  (軌道スラブの支持材料としてセメントアスファルトを使用した場合での設計値)、レールの支持弾性  $k_{r1} = k_{r2} = 30 \text{ t/cm}$  (一締結あたり  $60 \text{ t/cm}$  の弾性)、スラブ厚  $h = 16 \text{ cm}$  (断面係数  $W = 4270 \text{ cm}^3$ )、コンクリートのヤング率  $E_c = 350 \text{ t/cm}^2$ 、およびコンクリートのポアソン比  $\nu = 0.1$  とし、国鉄技研 FACOM 230-60 によって計算を行なった。

図-13はCase7の場合のレールおよび、軌道スラブのたわみを表わしている。図より軌道スラブ中央部締結装置部分の最大たわみは  $0.061 \text{ mm}$  であり、スラブ端部に車輪が載荷された場合の端部の締結装置部分の最大たわみは  $0.068 \text{ mm}$  であり、中央部の場合に比較して  $10 \sim 20\%$  の増加である。また、Case7の場合のレール直下におけるスラブ端部のくい違い量は  $0.026 \text{ mm}$  である。この程度のくい違い量であれば、軌道狂いにおよぼす影響は小さいと考えられる。しかし、レールが切れている端部\*1で、車輪がその最寄りの締結装置の直上

\* 車輪が締結装置中央に位置する場合、軌道スラブ上縁ではその位置で引張応力度を生ずることが実測された。これを、本計算において明らかにするため中央を選んだ。

\*1 ロングレールが軌道スラブ端部で破断された場合の軌道状態がこれに相当する。



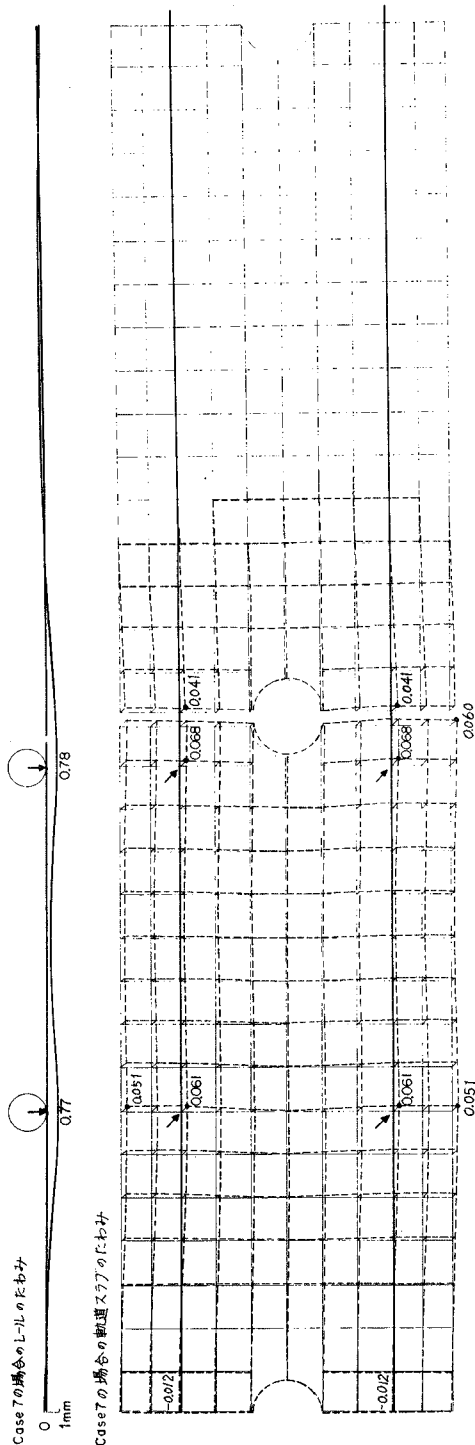


図-13 山陽新幹線スラブ軌道のたわみ計算例 (単位は mm)

に位置する場合のスラブ端部のたわみは 0.12 mm という計算結果になっており、中央部に比較してかなり大きい。

図-12 はすでに記述したように、軸距 2.5 m の新幹線台車がスラブ左端から漸次右端へ移動した場合、軌道スラブに生じる曲げモーメントの計算例を示している。

まず、荷重点直下の正の曲げモーメントについて記述する。線路方向下側の値は車輪が軌道スラブ中央に位置する場合は、 $M_x=0.49\sim 0.50\text{ t}\cdot\text{m}$  であり、スラブ隣接部の端部に位置する場合は  $M_x=0.47\text{ t}\cdot\text{m}$  であり、スラブ中央部の方が若干大きい。レールが切れている側のスラブ端部に生じる曲げモーメント (Case 1) は、 $M_x=0.89\text{ t}\cdot\text{m}$  でかなり大きい。線路と直角方向下側の曲げモーメントは、車輪が軌道スラブ中央に位置する場合は、 $M_y=0.6\sim 0.63\text{ t}\cdot\text{m}$  であり、スラブ端部の  $M_y=0.67\text{ t}\cdot\text{m}$  であり端部が若干大きい。この値は、レールが切れている端部 (Case 1) において  $M_y=1.24\text{ t}\cdot\text{m}$  となっており、著しく大きくなっている。

次に、負の最大曲げモーメントについて記述する。線路方向上側は、Case 1 および 7 の場合はいずれも Case 6 の場合の値  $M_x=-0.19\text{ t}\cdot\text{m}$  ( $\sigma_c=-4.5\text{ kg/cm}^2$ ) に近い。線路直角方向上側では、車輪がスラブ中央に位置する場合は  $M_y=-0.26\text{ t}\cdot\text{m}$  ( $\sigma_c=-6.1\text{ kg/cm}^2$ ) であり、スラブ端部に位置する場合 (Case 7) では  $M_y=-0.42\text{ t}\cdot\text{m}$  でありかなり大きくなっている。レールが切れている端部 (Case 1) では  $M_y=-0.81\text{ t}\cdot\text{m}$  であり、著しく大きい値となっている。上述のように車輪が締結装置間の中央に位置する場合は、いずれも軌道スラブには負の曲げを生じており、これは実測値\*2 を説明できるものである。

一般には、軌道スラブの設計値を知るための車輪の位置は、Case 6 および 7 でよい。これらから輪重によって軌道スラブに生じる曲げモーメントが求められるが、これに横圧によって生じる曲げモーメント<sup>14)</sup>を加えると、表-4 のように軌道スラブの設計曲げモーメントが求められる。この設計値は山陽新幹線 (岡山-博多間) などの軌道スラブの設計にとり入れられている。

## (2) 営業線における試験結果<sup>15)</sup>

山陽新幹線長坂寺高架橋上 (西明石-相生間) に敷設されたスラブ軌道について試験列車の通過試験が行われた。図-14 には、試験用軌道スラブに設定された測点位置を示す。図において ③、⑥ および ⑨ は、それぞれ線路方向および線路直角方向の軌道スラブ上縁のコンクリートのひずみ計を表わし、⑬、⑭、⑮、⑯、⑰および⑱は軌道スラブのたわみ計を表わしている。

表-5 には、一列車の通過による測定値のなかでの最大を示している。輪重および横圧を測定した列車本数は 14 である。その平均は、表から輪重=8.46 t, 横圧=0.38

\*2 4. の (2) 参照

表-4 新幹線軌道スラブの設計曲げモーメント

上下別	方向別		線路方向	線路と直角方向
	下	上		
スラブ端	側	側	0.47	0.84
	側	側	-0.20	-0.59
スラブ端以外	側	側	0.50	0.77
	側	側	-0.19	-0.43

(注) 幅 1m あたりで単位は t・m

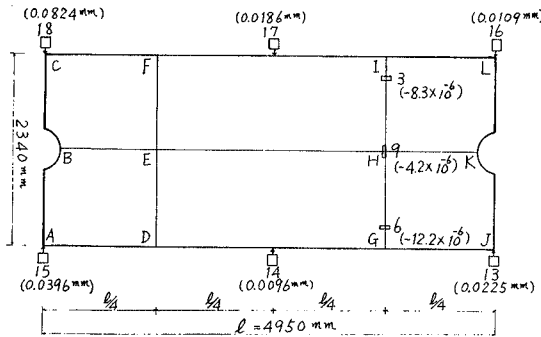


図-14 山陽新幹線長坂寺高架橋上の試験用軌道スラブにとりつけられたゲージ位置  
ただし □印はコンクリートのひずみ計、△印はたわみ計、( )内は測定値

t 軌道スラブのたわみは ⑬=0.0225 mm, ⑭=0.0109 mm, ひずみは ③\*=-8.3 マイクロ, ⑥\*=-12.2 マイクロおよび ⑨=-4.2 マイクロである。他のたわみ計の測定最大値の平均をとると 図-14 に示すように ⑭=0.0096 mm, ⑰=0.0186 mm, ⑮=0.0396 mm, ⑬=0.0824 mm であり、1 枚の軌道スラブでもかなりのばらつきがあることがわかった。たわみのこのようなばら

表-5 山陽新幹線長坂寺高架橋上の試験用軌道スラブのたわみ、応力度の実測値および計算結果

	年月日	列車番号	列車速度 (km/h)	輪重 (t)	横圧 (t)	軌道スラブのたわみ (mm)		軌道スラブ上縁に生じる引張ひずみ (×10 <sup>-6</sup> )		
						⑬	⑭	③	⑥	⑨
実測値	48.2.20	434A	31	9.9	0.19	0.0168	0.0004	-6.6	-11.9	-4.5
	"	436A	110	10.0	0.37	0.0092	0.0097	-5.0	-12.0	-3.7
	48.2.21	442A	206	8.0	0.11	0.0359	0.0047	-5.4	-11.2	-2.7
	48.2.22	964A	240	9.1	0.24	0.0099	0.0057	-8.1	-11.5	-5.3
	"	966A	254	8.7	0.29	0.0071	0.0154	-9.0	-11.4	-4.5
	"	968A	257	8.2	0.38	0.0114	0.0180	-10.2	-15.1	-4.1
	48.2.23	964A	251	8.0	0.54	0.0366	0.0061	-9.4	-12.6	-3.7
	48.2.22	970A	260	8.1	0.45	0.0509	0.0129	-8.1	-13.1	-3.7
	48.2.23	966A	263	8.2	0.38	0.0027	0.0136	-8.9	-12.1	-5.4
	"	968A	268	8.4	0.62	0.0080	0.0056	-8.4	-11.1	-4.1
	48.2.24	964A	265	8.2	0.75	0.0219	0.0118	-8.4	-13.6	-6.5
	48.2.23	970A	277	8.5	0.62	0.0054	0.0057	-9.1	-11.2	-4.1
	48.2.24	966A	273	8.0	0.43	0.0066	0.0276	-9.0	-11.3	-5.4
	"	970A	274	7.2	0	0.0930	0.0155	-11.6	-12.6	-1.2
平均			8.46	0.38	0.0225	0.0109	-8.3	-12.2	-4.2	
計算値	実測値からの解析結果			8.46	0	0.0235	0.0075	-13.0	-11.5	-8.2

\* ③ および ⑥ は締結装置の中間に位置し、引張ひずみを生じている。

つきは、主としてセメントアスファルト層の支持状態によるものと思われる。

(3) 試験結果の解析

実測した軌道スラブのたわみから、軌道スラブの支持弾性を推定することができ、この推定値を用いて応力解析を行なうことができる。これによって著者の提案した力学モデルおよび解析方法の妥当性の検討を行なうことが可能であると考えられる。

4. の (1) では軌道スラブの支持弾性が一様 ( $k_p=123 \text{ kg/cm}^3$ ) として計算を行なった結果、図-13 に示すようにスラブ中央部の縁端のたわみが 0.051 mm となった。この値を用いて試験用軌道スラブ支持弾性  $k_p$  を推定すると、たわみ計 ⑬=228  $\text{kg/cm}^3$ , ⑭=448  $\text{kg/cm}^3$ , ⑮=512  $\text{kg/cm}^3$ , ⑰=275  $\text{kg/cm}^3$ , ⑯=129  $\text{kg/cm}^3$ , ⑱=62  $\text{kg/cm}^3$  となる。次に、これらの支持弾性の分布範囲であるが、これは 図-14 のように仮定する。すなわち、領域 GHJK はたわみ計⑬の支持弾性の値を、HIKL は⑭、DEGH は⑮、EFHI は⑰、ABDE は⑯、BCEF は⑱の値をそれぞれ用いることとする。輪重は実測値最大の平均 8.46 t とし横圧の実測値は小さいのでこれを無視して計算を行なうと 表-5 下欄に示す値となった。

すなわち、軌道スラブのたわみは ⑬において 0.0235 mm, ⑭において 0.0075 mm, 軌道スラブ上縁に生じるコンクリートの引張ひずみは ③において -13.0 マイクロ, ⑥において -11.5 マイクロ, ⑨において -8.2 マイクロとなった。

計算の条件として、軌道スラブの支持弾性のとり方など適確であるとはいいがたいが、比較的、実測値によく近似していることが 表-5 からわかる。したがって著者の提案した力学モデルおよび解析方法は、まず妥当性のあるものと考えられる。

5. 考 察

本文においては、軌道スラブの周辺の力学的境界は自由であるとして、セメントアスファルトを鉛直方向のみに反力を生じるいわゆる線形のばねとして解析を行なったが、ほぼ満足すべき結果が得られている。しかし詳細には、軌道スラブ両端の切欠部に生じている拘束、特にセメントアスファルト層の支持力のばらつきを考慮して軌道スラブの応力解析を行なう必要がある。

平板解析としては、軌道スラブを 図-

5のように三角形要素に分割し、ハイブリッド型ポテンシャルエネルギー原理を使用して解析した結果は実測値をかなりよく説明できている。しかし、さらに詳細にはスラブ両端部の切欠部、締結装置ボルトをそう入するための穴および、セメントアスファルトをてん充するための注入口などそれぞれの周辺の局部応力の解析を行なう必要がある。

## 6. む す び

軌道スラブの応力解析をはり理論で行なうと、種々の矛盾が生じるので、これを取り除くために新しい力学モデルを提案した。このモデルは実軌道の構成要素をそのままの形で取り入れたものである。すなわちレールははりとして、軌道スラブは薄い平板として取り扱い、レールと軌道スラブとの間にはレール締結装置部分で線形のばねが介在し、軌道スラブはその全面が線形のばねで支持されているものとしたのである。

はりと平板とが弾性的に支持されている構造の変形解析には、有限要素法によるのがよいと考えられた。スラブ軌道の構造から要素の形は三角形を用い、レールおよびスラブの形状関数を仮定して、レールと軌道スラブとが重なった構造での剛性マトリックスをつくり、応力解析を行なった。解析結果は、はり理論による矛盾が解消されることを示している。特に、はり理論では明らかにすることができなかったスラブ端部の応力状態が解明された。これらの解析結果は山陽新幹線（岡山—博多間）その他の線区の軌道スラブの設計に取り入れられている。また、山陽新幹線長坂寺高架橋上（西明石—相生間）およびその他\*1の軌道スラブの実測値と、本解析方法による計算結果とが、かなりよい近似をみせていることから、著者が新しく提案した力学モデルおよび、解析方法がほぼ妥当なものであることが裏付けられていると考えられる。

\*1 鉄研日野土木実験所における斜角軌道スラブの応力測定結果など。

謝辞：本研究を進めるにあたって、国鉄鉄道技術研究所軌道研究室前室長 佐藤 裕博士、同室 池守昌幸室長、同構造物研究室長 樋口芳朗博士から適切ご指示をいただいた。本文をまとめるにあたっては、名大教授 成岡昌夫博士および京大教授、後藤尚男博士より懇切ご指導をいただいた。ここに、深く感謝の念を表わしたい。

なお、数値解析について、有益なる助言をいただいた元、東大工学部鷺津研究室 足立武司氏および、名大工学部土木工学科 梶田建夫氏に対しても、深く謝意を表したい。

## 参 考 文 献

- 1) 無道床軌道構造研究グループ：コンクリートスラブ式アスファルトてん充形軌道の開発，鉄道技術研究報告，No. 632 (1968.4).
- 2) 国鉄スラブ軌道研究会：スラブ軌道の設計施工，日本鉄道施設協会，昭和46年4月，pp. 17~22.
- 3) 文献 2)，pp. 19~22.
- 4) Washizu, K. : Variational Method in Elasticity and Plasticity, 1968, Pergamon Press, pp. 27~48.
- 5) Henry, T.Y. Yang : "Flexible Plate Finite Element on Elastic Foundation", ASCE, Vol. 96, No. ST 10, Proc. Paper 7604, Oct., 1970, pp. 2083~2101.
- 6) 鷺津久一郎：弾性学の変分原理概論，培風館，昭和47年2月，pp. 33~54.
- 7) 文献 6)，pp. 71~74.
- 8) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, 1959, McGraw-Hill, pp. 203~206.
- 9) Cheung, Y.K. and Zienkiewicz, O.C. : "Plates and Tanks on Elastic Foundations-an Application of Finite Element Method", Int. J. Solids Structures 1965, pp. 451~461.
- 10) Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. : "The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs", Proceedings of ICE 28 (1964), pp. 471~488.
- 11) パラストレス軌道構造研究グループ：土路盤上スラブ軌道 RA の開発，鉄道技術研究報告，No. 797 (1972.3)，pp. 31~56.
- 12) 文献 2)，p. 20.
- 13) 文献 1)，pp. 67~68.
- 14) 文献 2)，pp. 22~23.
- 15) パラストレス軌道構造研究グループ：新幹線スラブ軌道の動的性状，鉄道技術研究所速報，No. 72~131 (昭和47.4)，pp. 21~28 および pp. 49~51.

(1973.4.20・受付)