

## 不規則外力を受ける双一次履歴系の等価線形化について

EQUIVALENT LINEARIZATION FOR RANDOMLY  
EXCITED BILINEAR HYSTERETIC OSCILLATOR竹 宮 宏 和\*  
By Hirokazu Takemiya

## 1. 結 言

耐震工学における不規則振動論の応用は最近著しいが、その多くは理論の適用範囲から線形構造物に限られている。ところで、現実には構造物が強震を受けた場合、その復元力特性において、応答が降伏点を越えても剛性の低下は生じるが、ただちに破壊にいたらない例が多く存在する。そして、さらには復元力特性が履歴を描くことによって外力エネルギーを消散する効果もある。合理的な耐震設計を旨とする上からは、これらの非線形特性を積極的に導入する必要がある。土木構造物において最も典型的で、しかも簡単な非線形モデルは双一次履歴系であろう(図-1)。

しかしながら、不規則外力を受けるかかる構造物の厳密な応答解析は非常に困難である。そこで、近似応答解析として、等価線形化法が有力な取り得る一方向となる。調和定常過程での双一次履歴系の等価線形化法は種々考えられるが<sup>1)</sup>、不規則振動時の等価線形化はこれらとは本質的に異なる。後者の分野としてこれまで提案されているのに、Caugheyによる slowly varying amplitude の仮定のもとに Krylov-Bogoliubov 方法の適用<sup>2)</sup>、Karnopp と Brown による消散エネルギーのつり合い条件<sup>3)</sup>がある。しかし、後者は履歴サイクルに前者から得られる応答平均振動数を探っているため結果は同一となる。一方、実験的方法として Iwan と Lutes の研究<sup>4)</sup>がある。これらの比較からは Caughey の近似解は非線形性がゆるやかな ( $\alpha \sim 1$ ) 場合は精度はよいが、非線形性が強くなる ( $\alpha \ll 1$ ) と最も関心のある非線形応答領域で過小値を与えてくる。

本研究は上記の系の等価線形化法の近似度の向上を試みたものである。手法としては、双一次履歴系とその等価線形系に消散エネルギー率の一致および応答平均振動

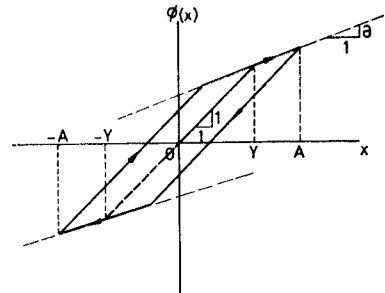


図-1 復元力特性

数の一致を定常確率過程で要求している。本論文において定義する消散エネルギー率は、上の Karnopp のそれとは異なるものであることに注意したい。さて外力がホワイト・ノイズであると、これらの規範を満たす種々の等価線形系が得られるわけであるが、さらにこれらの応答パワー・スペクトル密度を実験結果と比較することにより原系により近い等価線形系を選ぶことができる。ところで、線形系においては系の振動数特性の一致は非定常応答の一致をも意味するのであるが、非線形系においては一般に成立しない。しかし、これらの間になんらかの相関性が存在すれば、定常不規則応答の近似から非定常不規則応答を予測することが可能となるので、上の異なる等価線形系の遷移応答をも比較している。

## 2. 双一次履歴系

この系は降伏点を越える定常振動時において、図-1のような閉ループを描く。ここで  $Y$  は降伏変位を、 $A$  は振幅を表わす。この力学モデルは、図-2 のように、通常の1自由度系モデルにさらに直列のばね、クーロン・スライダを付加した形であり、したがって、基礎運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + K\phi(x) = mf(t) \dots \dots \dots (1)$$

あるいは

\* 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室

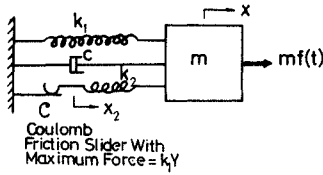


図-2 双一次履歴系の力学モデル

$$\ddot{x} + 2\beta_0\omega_0\dot{x} + \omega_0^2\phi(x) = f(t) \dots\dots\dots(1)'$$

ここで、 $m$ ：質量、 $c$ ：減衰係数、 $K$ ：初期剛性、 $\phi(x)$ ：図-1の復元力特性、 $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ ：微小線形振動時の固有振動数、 $\beta_0 = c/2\omega_0 m$ ：微小線形振動時の減衰定数、 $mf(t)$ ：不規則外力

以下の解析では、実験結果<sup>9)</sup>と比較できるように降伏比(降伏後剛性/初期剛性) $\alpha$ を、ゆるやかな非線形系として $\alpha=1/2$ 、また完全弾塑性に近い系として $\alpha=1/21$ を選んである。外力 $f(t)$ には系の動的特性を重視し、かつ解析を簡単にするため平均値0、強度レベル $S_0$ のホワイト・ノイズを想定する。したがって、

$$\left. \begin{aligned} E[f(t)] &= 0 \\ E[f(t)f(t+\tau)] &= R_f(\tau) = 2\pi S_0\delta(\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

ここに記号 $E[\cdot]$ は不規則関数の期待値を、 $\delta(\cdot)$ はDiracのデルタ関数を意味する。

ところで非線形系と線形系との相違点は次にある。いま式(1)'の微小振動を考えると、定常確率応答(変位 rms,  $\sigma_X$ ; 速度 rms,  $\sigma_{\dot{X}}$ )は外力に比例的で

$$\frac{\sigma_X}{N} = \frac{\sigma_{\dot{X}}/\omega_0}{N} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta_0}} \dots\dots\dots(3)$$

ここに

$$N = \frac{\sqrt{2}S_0\omega_0}{\omega_0^2} \dots\dots\dots(4)$$

で与えられる。ところが双一次履歴系の応答は単に $N$ に比例的とはならず、 $Y/N$ の関数となって現われる(図-5, 6参照)。そして実験結果によれば、非線形性がゆるやかな場合は $Y/N$ のいかなるときも狭帯域応答となるも(図-7(a), (b)参照)、非線形性がきつくなると $Y/N \gg 1$ あるいは $Y/N < 1$ 、すなわち応答が弾性に近い、あるいは降伏レベルをはるかに超過するとき以外は狭帯域応答とはいえない(図-8, 11(b), 12参照)。注意すべきは、これが通常期待されるダクティリティ・ファクターの領域内であることである。

### 3. 等価線形化法

ここで定義する等価線形系とは、不規則応答を対象としているので、双一次履歴系の変位・速度 rms 値を近似することができる線形系を指す。このため等価線形化規範として定常確率過程において変位に関する消散エネルギー率の一致、および速度に関する運動エネルギー

の一致を考える。後者は前者が満足されれば応答平均振動数の一致となることは明らかである。Caughey による1自由度系を使っての Krylov-Bogoliubov 法はこの特別な場合である。このことはモーメント法<sup>5)</sup>から容易にわかる。すなわち、式(1)の双一次履歴系に対する等価線形系を

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = mf(t) \dots\dots\dots(5)$$

あるいは

$$\ddot{x} + 2\beta_{eq}\omega_{eq}\dot{x} + \omega_{eq}^2x = f(t) \dots\dots\dots(5)'$$

$$\text{ここに、} \omega_{eq} = \sqrt{k_{eq}/m}, \beta_{eq} = c_{eq}/2\sqrt{mk_{eq}}$$

とすると、式(1)', (5)'の復元力に $\dot{x}$ を乗じて期待値を取り $E[x\dot{x}] = 0$ を考慮すると、消散エネルギー率の一致は

$$\beta_{eq}\omega_{eq} = \beta_0\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2 \frac{E[\phi(x)\dot{x}]}{E[\dot{x}^2]} \dots\dots\dots(6)$$

を、また式(1)', (5)'に $x$ を乗じ上と同様にして運動エネルギーの一致は

$$\left(\frac{\omega_{eq}}{\omega_0}\right)^2 = \frac{E[\phi(x)x]}{E[x^2]} \dots\dots\dots(7)$$

を導く。式(6), (7)は取りも直さず Krylov-Bogoliubov 法から求められるものである。以下、これらについて述べる。

#### (1) 消散エネルギー率の一致

双一次履歴系の消散エネルギー率を1サイクルの履歴消散エネルギー(H.E.D.)から推定する。これは、

$$(H.E.D.) = \begin{cases} 0 & , A \leq Y \text{ に対して} \\ 4Y(A-Y)K(1-\alpha) & , A > Y \text{ に対して} \end{cases} \dots\dots\dots(8)$$

履歴サイクルの周期は非線形応答量の関数であるが、図-2から明らかなようにクーロン・スライダの周期となる。いまこれを $2\pi/\omega_h$ とすると、履歴消散エネルギー率は

$$(H.E.D./\text{単位時間}) = \frac{\omega_h}{2\pi}(H.E.D.) \dots\dots\dots(9)$$

従来の研究<sup>2), 3), 6)</sup>では、応答の slowly varying amplitude の仮定のもとに、上の履歴サイクルに次節で述べる応答平均振動数を採用しているが、これは減衰の小さい1自由度系の応答のごとく狭帯域応答過程に対しては正しいが、そうでない場合は誤った結果に導くおそれがある。実際、履歴サイクルは明確には規定できないとしても

$$\sqrt{\alpha}\omega_0 \leq \omega_h \leq \omega_0 \dots\dots\dots(10)$$

と制限され、応答量が降伏レベルをはるかに超過する状況では下限(降伏後の固有振動数)に、一方、わずかに降伏レベルを超過する状況では上限になるものと思われる。

次に、応答の極値分布について、非線形応答量が大きい ( $A \gg Y$ ) あるいは小さい ( $A \sim Y$ ) では双一次履歴系は狭帯域応答を示すので、Rayleigh 分布

$$P(A) = \frac{A}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_X^2}\right) \dots\dots\dots(11)$$

と仮定する。本研究では、すべての応答領域においても便宜的にこの分布を使用する。したがって、履歴系の消散エネルギー率の期待値 (以後、単に履歴消散エネルギー率と呼ぶ) は式 (8), (10), (11) より

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \omega_0 E[\text{H.E.D.}] &\leq E[\text{H.E.D.}/\text{単位時間}] \\ &\leq \frac{\omega_0}{2\pi} E[\text{H.E.D.}] \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

ここで、

$$E[\text{H.E.D.}] = 2\sqrt{\pi} K(1-\alpha) Y^2 \cdot \eta \cdot \text{erfc}(\eta^{-1}) :$$

1 サイクル当りの履歴エネルギー期待値

$$\eta = \frac{\sqrt{2}\sigma_X}{Y}, \text{erfc}(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$$

ところで質量一定  $m$  のいかなる粘性減衰を有する線形系も式 (2) のホワイト・ノイズを受けると、一定値  $m\pi S_0$  の消散エネルギー率を有する (付録 A を参照)。これを式 (12) における履歴消散エネルギー率と一致させると

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2(1-\alpha)\eta \cdot \text{erfc}(\eta^{-1})} &\leq \left(\frac{Y}{N}\right)^2 \\ &\leq \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}(1-\alpha)\eta \cdot \text{erfc}(\eta^{-1})} \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

この式は応答  $\sigma_X/Y$  あるいは  $\sigma_X/N$  の上限および下限を有する  $Y/N$  値に対して求めることができることを示している。一方、次節に述べる系の応答平均振動数  $\omega_{av}$  を履歴エネルギー・サイクル、 $\omega_h$  にとれば

$$\left(\frac{Y}{N}\right)^2 = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{\omega_{av}}{\omega_0}\right)(1-\alpha)\eta \cdot \text{erfc}(\eta^{-1})} \dots\dots(14)$$

これはホワイト・ノイズ入力ときの Caughey の解<sup>2)</sup>の別の表現である。

さて、式 (13) の上限解、下限解および式 (14) の解 ( $\omega_{av} = \omega_{KB}$ ) を実験結果<sup>4)</sup>と 図-3 に比較する。これより、上限解が  $Y/N$  の全領域にわたって最も良い近似となっており、最も関心のある  $Y/N = 1 \sim 10$  で、 $\alpha = 1/2$  のときは実験値とほとんど一致し、 $\alpha = 1/21$  では Caughey の解よりはるかに近似度を向上し 20% 以内の誤差である。 $Y/N > 10$  では、応答は線形に近くなり、履歴によるエネルギー消散は小さく、そのサイクルの取り方による影響はなくなっていく。図-3 に見られる実験結果との差は応答の極値分布に帰せられるであろう。 $\sigma_X/Y \sim 0.5$  付近では、双一次履歴系の応答は Gauss 分布からかなり離れて、振幅が制限されたかのような分布となってい

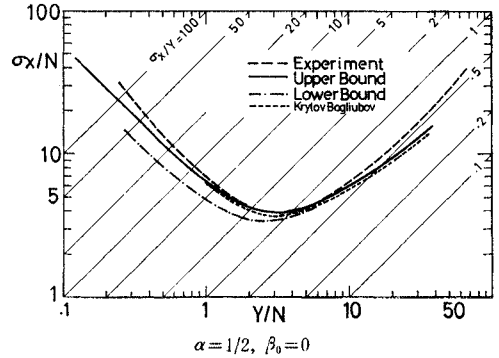


図-3(a) rms 変位

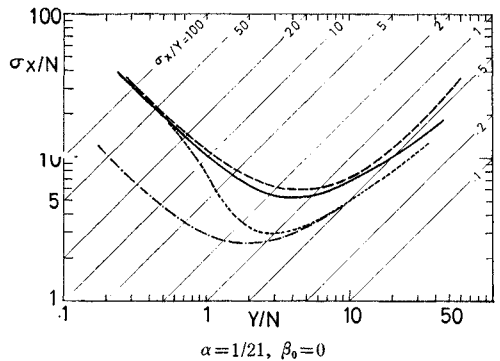


図-3(b) rms 変位

ると文献 4) では報告されているからである。一方、 $\sigma_X/Y \sim 3$  付近では応答状態は Gauss 分布にほとんど近いので、上に見られた良好な近似度もうなずける。

(2) 応答平均振動数の一致

次に、双一次履歴系に粘性減衰が存在する場合、および rms 速度を予測する場合に、応答平均振動数の一致が必要となる。ここでいう応答平均振動数とは、次式で定義する量である。

$$\omega_{av} = \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} \dots\dots\dots(15)$$

通常の 1 自由度系、式 (5) の等価線形系では、これは固有振動数  $\omega_{eq}$  に一致する。式 (15) の応答平均振動数を解析的に近似する方法として、Caughey の Krylov-Bogoliubov 法による解<sup>2)</sup>、あるいは同氏の定常調和共振振動数<sup>7)</sup>の期待値を採用することが考えられる。そしてそれらは

$$\left(\frac{\omega_{KB}}{\omega_0}\right)^2 = \frac{E[AC(A)]}{E[A^2]} \dots\dots\dots(16)$$

$$E\left[\left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right)^2\right] = E\left[\frac{C(A)}{A}\right] \dots\dots\dots(17)$$

となる。ただし、

$$C(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi \phi(A \cos \phi) d\phi$$

$$= \begin{cases} A & , A \leq Y \\ \frac{A}{\pi} \left[ \alpha\pi + (1-\alpha) \left\{ \cos^{-1} \left( 1 - 2\frac{Y}{A} \right) - 2 \left( 1 - 2\frac{Y}{A} \right) \sqrt{\frac{Y}{A} \left( 1 - \frac{Y}{A} \right)} \right\} \right] & , A > Y \end{cases}$$

振幅  $A$  の確率密度に式 (11) の Rayleigh 分布を適用すると、式 (16), (17) は

$$\left( \frac{\omega_{KB}}{\omega_0} \right)^2 = 1 - \frac{8(1-\alpha)}{\pi} \int_1^\infty (\xi^{-3} + \eta^{-2}\xi^{-1}) (\xi-1)^{1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\eta^2}\right) d\xi \dots\dots\dots (18)$$

$$E \left[ \left( \frac{\omega_R}{\omega_0} \right)^2 \right] = 1 - \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \int_1^\infty (\xi^{-2} - 4\xi^{-1}\eta^{-2} + 4\eta^{-2}) (\xi-1)^{1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\eta^2}\right) d\xi \dots\dots\dots (19)$$

また、ときとして等価剛性を履歴ループの対角線で近似することがある。すなわち

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , A \leq Y \\ \alpha + \frac{Y}{A}(1-\alpha) & , A > Y \end{cases} \dots\dots\dots (20)$$

この場合系の期待固有振動数は、

$$E \left[ \left( \frac{\omega_d}{\omega_0} \right)^2 \right] = 1 - (1-\alpha) \left\{ \exp\left(-\frac{1}{\eta^2}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{\eta^2}} \operatorname{erfc}(\eta^{-1}) \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式 (18), (19), (21) の応答極限状態での値は、 $\sigma_X/Y \ll 1$  (あるいは  $\eta \ll 1$ ) のとき

$$\left( \frac{\omega_{KB}}{\omega_0} \right)^2 = E \left[ \left( \frac{\omega_R}{\omega_0} \right)^2 \right] = E \left[ \left( \frac{\omega_d}{\omega_0} \right)^2 \right] = 1$$

そして、 $\sigma_X/Y \gg 1$  (あるいは  $\eta \gg 1$ ) のとき

$$\left( \frac{\omega_{KB}}{\omega_0} \right)^2 = E \left[ \left( \frac{\omega_R}{\omega_0} \right)^2 \right] = E \left[ \left( \frac{\omega_d}{\omega_0} \right)^2 \right] = \alpha$$

となる。しかし、中間値  $\sigma_X/Y$  に対してはこれらは異なり、どれを双一次履歴系の応答平均振動数に採用するかは実験結果との比較から決定する (図-4 参照)。これより  $\alpha=1/2, 1/21$  ともに Krylov-Bogoliubov の方法が良好な近似を与え、特に  $\alpha=1/2$  のときは  $\sigma_X/Y \leq 0.6$  にわずかの誤差が見られるのみである。また図-4には後に述べる3変数線形系の応答平均振動数も合わせて載せてある。したがって、以下の解析では Krylov-Bogoliubov 法より導かれる式 (18) を双一次履歴系の応答平均振動数と見なして等価線形化を行なう。

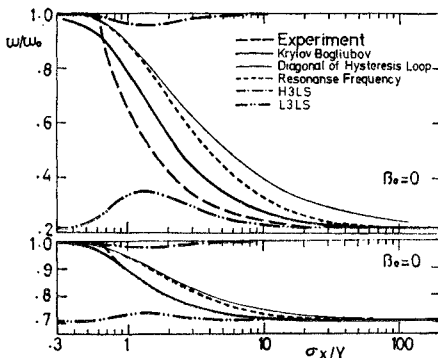


図-4 応答平均振動数

4. rms 応答値の予測

以上の等価線形化規範から、粘性減衰を有する双一次

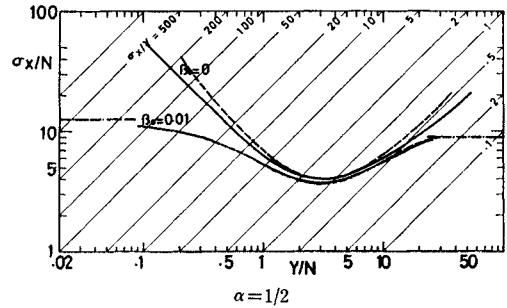


図-5 (a) rms 変位

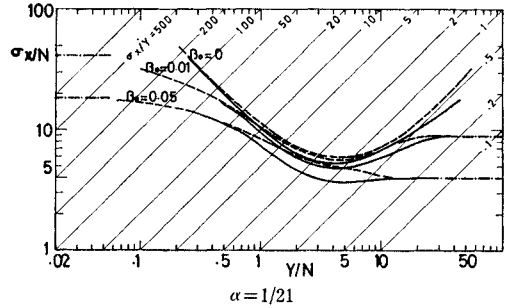


図-5 (b) rms 変位

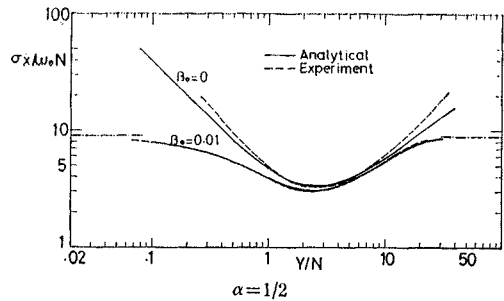


図-6 (a) rms 速度

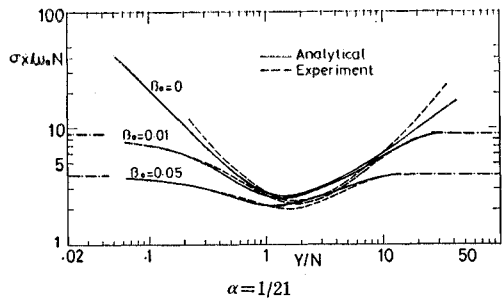


図-6 (b) rms 速度

履歴系がホワイト・ノイズ外力を受けたときの定常変位・速度 rms 応答値を次式から求められる。

$$c \omega_{KB}^2 \sigma_X^2 + \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \omega_0 K (1-\alpha) Y \sigma_X \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{Y}{\sqrt{2} \sigma_X} \right) = m \pi S_0 \dots \dots \dots (22)$$

あるいは

$$\beta_0 \left( \frac{\omega_{KB}}{\omega_0} \right)^2 \eta^2 + \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} (1-\alpha) \eta \cdot \operatorname{erfc}(\eta^{-1}) = \frac{\pi}{2} \left/ \left( \frac{Y}{N} \right)^2 \right. \dots \dots \dots (22)'$$

および

$$\sigma_{\dot{X}} = \omega_{KB} \sigma_X \dots \dots \dots (23)$$

図-5, 6 はそれぞれ変位・速度 rms 応答予測結果を実験値と比較したものである。α=1/2 のゆるやかな非線形系のときは、粘性減衰 β₀=1% でほとんど完全な精度で変位・速度の定常 rms 値を予測できる。一方、α=1/21 の完全弾塑性に近い非線形系のとき、変位に関しては β₀=1% で 15% 以内の精度で、また β₀=5% で 25% 以内の精度で定常 rms を予測できることがわかる。速度応答に関しては 20% 以内の予測精度である。

ところで、応答の両極端状態は、σ<sub>X</sub>/Y ≧ 1 に対しては ω<sub>KB</sub> = √α ω₀, erfc(⋅) の級数展開式

$$\operatorname{erfc} \left( \frac{Y}{\sqrt{2} \sigma_X} \right) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{Y}{\sigma_X} - 3.1 \left( \frac{Y}{\sigma_X} \right)^3 + \frac{1}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} \left( \frac{Y}{\sigma_X} \right)^5 - \dots \right]$$

を用いると式 (22)' は

$$\alpha \beta_0 \left( \frac{\sqrt{2} \sigma_X}{Y} \right)^2 + \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} (1-\alpha) \left( \frac{\sqrt{2} \sigma_X}{Y} \right) \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Y}{\sigma_X} \right) = \frac{\pi}{2} \left/ \left( \frac{Y}{N} \right)^2 \right.$$

第2項は第1項に比べて非常に小さいから、結局

$$\sigma_X / N = \sigma_{\dot{X}} / \sqrt{\alpha} \omega_0 N = \frac{1}{2} \sqrt{\pi / \alpha} \beta_0$$

を得る。これは降伏後剛性を有する1自由系の定常 rms 値である。一方、σ<sub>X</sub>/Y ≪ 1 に対しては ω<sub>KB</sub> = ω₀,

$$\operatorname{erfc} \left( \frac{Y}{\sqrt{2} \sigma_X} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_X}{Y} \exp \left( -\frac{Y^2}{2 \sigma_X^2} \right) \cdot \left[ 1 - \frac{\sigma_X^2}{Y^2} + \frac{1 \cdot 3 \sigma_X^4}{Y^4} - \dots \right]$$

であるので、式 (22)' は

$$\beta_0 \left( \frac{\sqrt{2} \sigma_X}{Y} \right)^2 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi} (1-\alpha) \left( \frac{\sqrt{2} \sigma_X}{Y} \right)^2 \cdot \exp \left( -\frac{Y^2}{2 \sigma_X^2} \right) = \frac{\pi}{2} \left/ \left( \frac{Y}{N} \right)^2 \right.$$

ここにおいても第2項は第1項に比べて非常に小さいから σ<sub>X</sub>/N = σ<sub>Ẋ</sub>/ω₀N = 1/2 √π/β₀ を得る。これは初期剛性を有する1自由度系の定常 rms 応答値である。図-5, 6 中これらは1点鎖線で示されている。

### 5. 応答パワー・スペクトル密度

前節の rms 応答値予測においては明確な等価線形系を規定しなかったが、等価線形化規範式 (22)', (23) を満たす種々の異なる線形系が考えられよう。いま1つの比較標準として応答パワー・スペクトル密度 (PSD) の比較がある。

簡単に Iwan と Lutes の実験結果<sup>4)</sup>(図-7, 8, 11, 12 の点線) を考察すると、α=1/2 のゆるやかな非線形系では PSD のピークの位置は応答量 σ<sub>X</sub>/Y に応じて移動するものの、狭帯域確率応答を示し、軽減衰1自由度系の様相と酷似している。一方、α=1/21 の完全弾塑性に近い場合で、σ<sub>X</sub>/Y ≧ 1 あるいは σ<sub>X</sub>/Y < 1 のときはそれぞれに応ずる応答平均振動数の軽減衰1自由度系のようなピークを有するが、その中間の σ<sub>X</sub>/Y に対しては、α=1/2 の PSD と異なって、上の2つのピークのうち一方が減少すると同時に他方が増大する傾向となる。したがって、ある σ<sub>X</sub>/Y (=4~9) に対しては明確なピークが現われない。すなわち、広帯域確率過程応答となる。そして低振動数領域では、いかなる場合も降伏後剛性を有する系の応答特性を持つ。

本研究では、外力にホワイト・ノイズを想定しているので、線形系においては PSD は直接系の振動数特性を評価することになる。以下、等価線形系に1自由度系その2モード系、3階系およびその2モード系を考える。

#### (1) 等価1自由度系 (2LS)

この系は式 (5) で表わされ、その振動数特性を表わすアドミタンス、|H<sub>z,eq</sub>(ω)| は

$$\omega_0^2 |H_{z,eq}(\omega)| = \frac{1}{\left( \frac{\omega_{eq}}{\omega_0} \right)^2} \cdot \left[ \frac{1}{\left\{ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 / \left( \frac{\omega_{eq}}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + 4 \beta_{eq}^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 / \left( \frac{\omega_{eq}}{\omega_0} \right)^2} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (24)$$

そして、これらのパラメータは等価線形化規範から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_{eq}}{\omega_0} &= \frac{\omega_{KB}}{\omega_0} = \left( \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\omega_0 N} \right) / \left( \frac{\sigma_X}{N} \right) \\ \beta_{eq} &= \frac{\pi}{4} / \left\{ \left( \frac{\omega_{eq}}{\omega_0} \right)^3 \left( \frac{\sigma_X}{N} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

で σ<sub>X</sub>/Y あるいは Y/N の関数となる。この系は、式 (24) から明らかなように β<sub>eq</sub> が小さいときは ω<sub>eq</sub> でピークを有する。それゆえ、ゆるやかな非線形系および応答状態が極端な場合の完全弾塑性に近い系の等価線形化に有効となろう。図-7 (a) は前者の場合について式 (24) と双一次履歴系の PSD を比較したものである。その際の使用パラメータを表-1 に示す。また 図-7

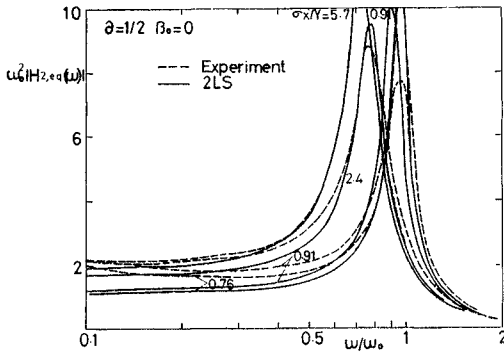


図-7(a) 応答パワー・スペクトル密度

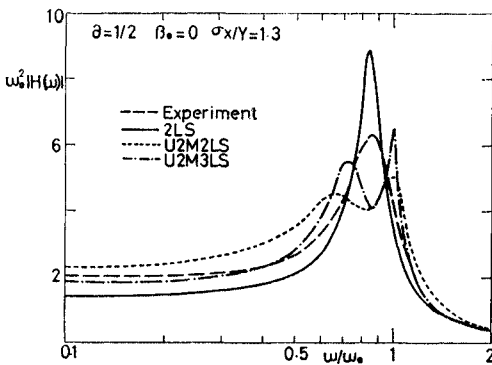


図-7(b) 応答パワー・スペクトル密度

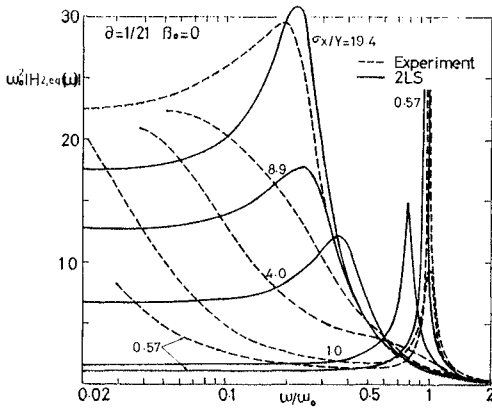


図-7(c) 応答パワー・スペクトル密度

表-1 等価 2LS のパラメータ

$\alpha=1/2$			$\alpha=1/21$		
$\sigma_X/Y$	$\omega_{eq}/\omega_0$	$\beta_{eq}$	$\sigma_X/Y$	$\omega_{eq}/\omega_0$	$\beta_{eq}$
0.76	0.949	0.036	0.57	0.949	0.014
0.91	0.911	0.055	1.0	0.787	0.054
1.3	0.854	0.077	4.0	0.389	0.283
2.4	0.780	0.084	8.9	0.282	0.380
5.7	0.729	0.055	19.4	0.240	0.296

(b) には以下述べる等価線形形の PSD も合わせ載せてある。これらより  $\sigma_X/Y \gg 1$  のときは式 (24) は非常によく双一次履歴系の PSD を近似しているが  $\sigma_X/Y=1.3$  では全体としての近似度はよくない。また  $\sigma_X/Y < 1$  のとき低振動数領域でわずかの矛盾が残る。なぜなら  $\omega \rightarrow 0$  のとき  $\omega_0^2 |H_{2,eq}(\omega)| \rightarrow 1$  となるからである。式 (24) を完全弾塑性に近い系に用いると、図-7(c) のように  $\sigma_X/Y=1 \sim 8.9$  でまったく異なる振動数成分を持つことになる。

(2) 2階2モード系 (U2M2LS)

これは完全弾塑性に近い系の振動数特性に注目して、それぞれ初期剛性と降伏後剛性に応ずる固有振動数を持つ2つの1自由度系モードを、それらの相関を無視して重ね合わせたものである<sup>8)</sup>。したがって、系のアドミタンスは

$$\omega_0^2 |H_{2,2}(\omega)| = \left[ \frac{1}{\left\{ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + 4 \beta_{2H}^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} + \frac{1}{\left\{ \alpha - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + 4 \beta_{2L}^2 \alpha \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(26)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \beta_{2H} &= \frac{\pi(\alpha-1)}{4 \left\{ \alpha \left( \frac{\sigma_X}{N} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_X'}{\omega_0 N} \right)^2 \right\}} \\ \beta_{2L} &= \frac{\pi(1-\alpha)}{4 \alpha^{3/2} \left\{ \left( \frac{\sigma_X}{N} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_X'}{\omega_0 N} \right)^2 \right\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

図-8 は  $\alpha=1/21$  に対して応答 PSD を比較したものであり、その使用パラメータを表-2 に示す。全般的な傾向は実験結果とよく合っているが、 $\sigma_X/Y=1 \sim 8.9$  においてまだ十分とはいえない。もちろん、これは定常 rms 値の予測にも帰因されよう。

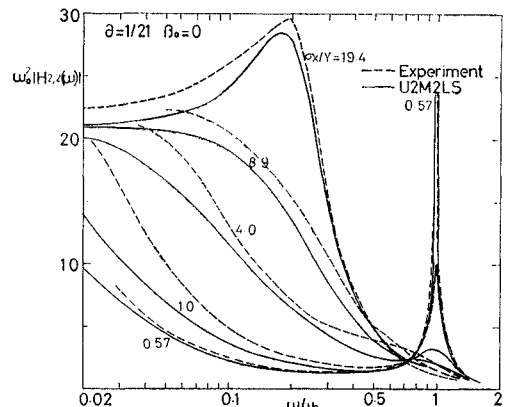


図-8 応答パワー・スペクトル密度

表-2 等価 U2M2LS のパラメータ

$\sigma_X/Y$	$\alpha=1/21$			
	Mode 1		Mode 2	
	(Res. Freq.)/ $\omega_0$	$\beta_{2H}$	(Res. Freq.)/ $\omega_0$	$\beta_{2L}$
0.57	1.0	0.0115	0.218	1.1109
1.0	1.0	0.0263	0.218	2.5317
4.0	1.0	0.0166	0.218	1.6009
8.9	1.0	0.0085	0.218	0.8163
19.4	1.0	0.0041	0.218	0.3944

(3) 3 階系

これは双一次履歴系モデル (図-2) において、クーロン・スライダーを 図-9 のごとく粘性ダンパーで置換した線形系である。運動方程式は

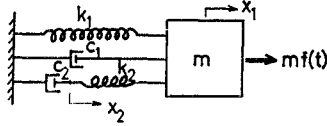


図-9 3 階系

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mf(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $x_1, x_2$  はそれぞれ質量、付加粘性ダンパーの変位を表わす。変位  $x_1$  のアドミタンスはよって

$$\omega_0^2 |H_{31}(\omega)| = \left[ \frac{1 + \left\{ \frac{1-\alpha}{2\beta_{32}} \right\}^2}{\alpha - \left\{ \frac{\beta_{31}}{\beta_{32}}(1-\alpha) + 1 \right\} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]^* \left[ \frac{\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{+ \left[ \frac{1-\alpha}{2\beta_{32}} \left\{ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} + 2\beta_{31} \right]^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (29)$$

ここに、

$$\beta_{31} = \frac{c_1}{2\omega_0 m}, \quad \beta_{32} = \frac{(1-\alpha)k_2}{2\omega_0 c_2}$$

式 (29) からは応答状態が極端な場合、すなわち  $\sigma_X/Y \ll 1$  のとき  $\beta_{32} \rightarrow 0$ 、したがって

$$\omega_0^2 |H_{31}(\omega)| = \left[ \frac{1}{\left\{ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + 4\beta_{31}^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]^{1/2}$$

また

$\sigma_X/Y \gg 1$  のとき  $\beta_{32} \rightarrow \infty$ 、したがって

$$\omega_0^2 |H_{31}(\omega)| = \left[ \frac{1}{\left\{ \alpha - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + 4\beta_{31}^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]^{1/2}$$

これらの式は式 (28) の 3 階系がパラメータ  $\beta_{32}$  によって上の応答状態における等価 2LS の振動数特性を合わ

せ持つことを示し、双一次履歴系のそれぞれの応答状態とピーク付近で一致する。しかし、等価線形化規範式 (22)' より等価粘性減衰定数  $\beta_{32}$  はあらゆる値を取ることができない。いま、減衰定数  $\beta_{31}=0$  とすると

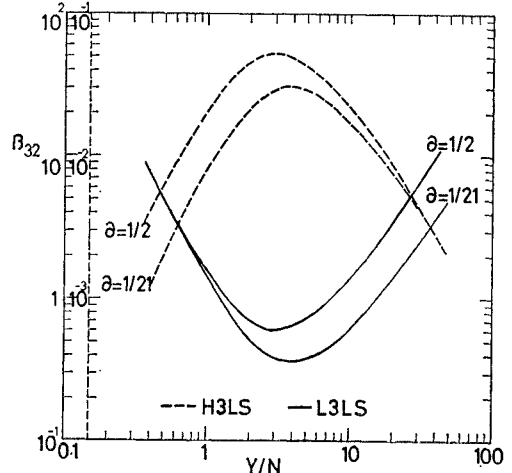


図-10 3 階系の等価粘性減衰定数

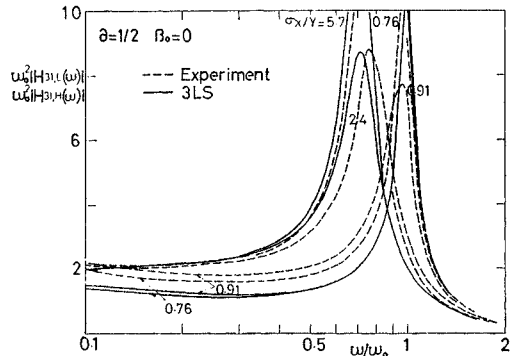


図-11 (a) 応答パワー・スペクトル密度

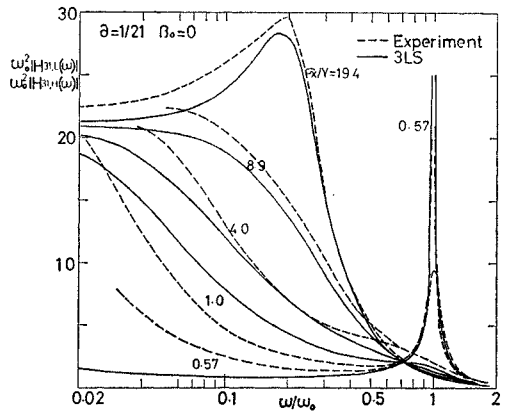


図-11 (b) 応答パワー・スペクトル密度

$$\beta_{32} = \frac{1-\alpha^2}{2\pi} \left\{ \alpha(1-\alpha) \left( \frac{\sigma_{X_{31}}}{N} \right)^2 \pm \sqrt{\alpha^2(1-\alpha)^2 \left( \frac{\sigma_{X_{31}}}{N} \right)^4 - \alpha\pi^2} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

と解けて (付録 B 参照), 図-10 のごとくある領域内に制限される。ただし,  $\sigma_{X_{31}}$  は 3 階系の質量変位 rms である。したがって, その応答平均振動数 (付録 B 参照)

$$\left( \frac{\omega_{31}}{\omega_0} \right)^2 = \alpha \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha(1-\alpha)^2 + 4\beta_{32}^2} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

は, 図-4 の一点および二点鎖線となり, 双一次履歴系の微小固有振動数  $\omega_0$ , あるいは降伏後剛性の固有振動数  $\sqrt{\alpha}\omega_0$  付近に限られることになる。以下, 前者の系を高振動数 3 階系 (H3LS), 後者の系を低振動数 3 階系 (L3LS) と呼ぶ。これより 3 階系は,  $\alpha=1/2$  のときよりも  $\alpha=1/21$  のほうがかなりの非線形応答範囲に使用可能が判る。図-11 の応答 PSD の比較より  $\sigma_X/Y \gg 1$  のとき式 (29) は良好な近似を与えている。しかし  $\sigma_X/Y = 0.7 \sim 2.0$  では使用不可能である。そこでこの範囲に対して, 上の 3 階系の 2 モード重ね合わせを考える。係数  $r$  を低振動数 3 階系の応答貢献度として, 等価線形化規範式 (23) より

$$\left( \frac{\omega_{KB}}{\omega_0} \right)^2 = r \left( \frac{\sigma_{\dot{X}_{31L}}}{\omega_0 \sigma_{X_{31L}}} \right)^2 + (1-r) \left( \frac{\sigma_{\dot{X}_{31H}}}{\omega_0 \sigma_{X_{31H}}} \right)^2 \dots\dots\dots (32)$$

ここに  $\sigma_{X_{31L}}, \sigma_{X_{31H}}$  はそれぞれ低振動数および高振動数 3 階系の定常 rms 変位で,  $\sigma_{\dot{X}_{31L}}, \sigma_{\dot{X}_{31H}}$  はそれぞれに定常 rms 速度を表わす。式 (32) で  $\beta_{31}=0$  のときは式 (30) から明らかのように  $\sigma_{X_{31L}} = \sigma_{X_{31H}} = \sigma_{X_{31}}$ , また  $\beta_{31}$  が存在しても小さければ  $\sigma_{X_{31L}} \approx \sigma_{X_{31H}}$  が成立する。したがって, この 2 モード系のアドミタンスは

$$|H_{31,2}(\omega)| = [r|H_{31,L}(\omega)|^2 + (1-r)|H_{31,H}(\omega)|^2]^{1/2} \dots\dots\dots (33)$$

ここに  $|H_{31,L}(\omega)|, |H_{31,H}(\omega)|$  は低振動数および高振

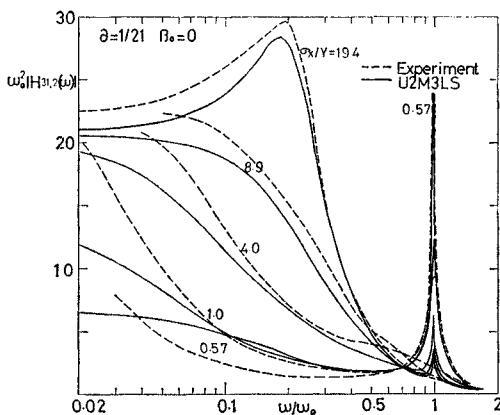


図-12 応答パワー・スペクトル密度

表-3 等価 U2M3LS のパラメータ

$\alpha=1/21$			
$\sigma_X/Y$	$\beta_{32-L}$	$\beta_{32-H}$	$r$
0.57	0.9237	0.0117	0.094
1.0	0.3822	0.0283	0.383
4.0	0.6320	0.0171	0.913
8.9	1.2644	0.0085	0.973
19.4	2.6308	0.0041	0.991

動数 3 階系のアドミタンスで, 式 (29) から算出される。 $\alpha=1/21$  に対して式 (33) と実験結果との比較を図-12 に, その際の使用パラメータを表-3 に示す。これより 2 モード 3 階系は  $\sigma_X/Y=1.0$  付近で非常によく双一次履歴系の応答 PSD を近似している。しかし欠点はいかなる  $\sigma_X/Y$  に対しても  $\omega/\omega_0=1$  で小さなスパイクを有することである。

以上, 異なる種々の等価線形系について定常応答パワー・スペクトル密度を比較したが, 画一的にどの系がよいかはいえず, 非線形性の程度および非線形応答量の程度によって適宜選ぶほうがよいと判明した。

### 6. 非定常 (遷移) 確率応答

次に上記の等価線形系の非定常 (遷移) 応答について比較を行なった。耐震工学においては, 非定常確率外力に対する非定常確率応答を求めることが重要であるが, 等価線形系の近似度を調べる上からは遷移応答に注目すればよい。

一般に, 不規則外力を受ける線形系の応答解析には, Rice の方法<sup>9)</sup>, Fokker-Plank 方程式<sup>10)</sup>があるが, ここでは外力をホワイト・ノイズとしていること, また応答に共分散マトリックスを算出することから後者を選んだ。すなわち, ある時刻  $t$  の系の状態ベクトル ( $\{x\}, \{\dot{x}\}$ ) を

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

とすると, 運動方程式 (5) あるいは式 (28) は次の形に

表-4 線形系パラメータ

線形系	1 自由度系	3 階系
$\{y\}$	$\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \end{Bmatrix}$
$[a]$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & c \\ m & m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k_2 & -k_2 & 0 \\ c_2 & c_2 & 0 \\ -K & k_2 & -c_1 \\ m & m & m \end{bmatrix}$
$\{F\}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$



書き表わすことができる。

$$\frac{d}{dt}\{y\}=[a]\{y\}+\{F\}f(t) \dots\dots\dots(35)$$

線形 1 自由度系, 3 階系について,  $\{y\}$ ,  $[a]$ ,  $\{F\}$  を表—4 にまとめる。この連立一次微分系に関する Fokker-Plank 方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} (A_i P) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (B_{ij} P) \dots\dots\dots(36)$$

ここに,  $P$  は遷移確率密度とよばれるもので

$$P=P(\{y(t)|\{y_0(t_0)\})$$

の条件付確率である。また係数  $A_i$ ,  $B_{ij}$  は

$$\{A y_i\} = \{y_i(t+\Delta t) - \{y_i(t)\}$$

として

$$\{A_i\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[\{A y_i\} | \{y(t)\} = \{y\}] = [a]\{y(t)\}$$

$$\{B_{ij}\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[\{A y_i\} \{A y_j\}^T | \{y(t)\} = \{y\}] = 2\pi S_0[\{F\} \{F\}^T]$$

$n$  はベクトル  $\{y\}$  の大きさである。式 (36) を解くには次式に変換するとよい<sup>11)</sup>。

$$\left(\frac{\sigma_X}{N}\right)^2 = \frac{\pi}{4\beta_{eq}\left(\frac{\omega_{eq}}{\omega_0}\right)^3} \times \begin{cases} \left[1 - e^{-2\beta_{eq}\omega_{eq}t} \left\{1 + \frac{\beta_{eq}\omega_{eq}}{\omega_d} \sin 2\omega_d t + \frac{2\beta_{eq}^2\omega_{eq}^2}{\omega_d^2} \sin^2 \omega_d t\right\}\right], & \beta_{eq} \leq 1 \dots\dots(44.a) \\ \left[1 - e^{-2\beta_{eq}\omega_{eq}t} \left\{1 + \frac{\beta_{eq}\omega_{eq}}{\omega_d} \sinh 2\omega_d t + \frac{2\beta_{eq}^2\omega_{eq}^2}{\omega_d^2} \sinh^2 \omega_d t\right\}\right], & \beta_{eq} > 1 \dots\dots(44.b) \end{cases}$$

速度分散については,

$$\left(\frac{\sigma_{\dot{X}}}{\omega_0 N}\right)^2 = \frac{\pi}{4\beta_{eq}\left(\frac{\omega_{eq}}{\omega_0}\right)} \times \begin{cases} \left[1 - e^{-2\beta_{eq}\omega_{eq}t} \left\{1 - \frac{\beta_{eq}\omega_{eq}}{\omega_d} \sin 2\omega_d t + \frac{2\beta_{eq}^2\omega_{eq}^2}{\omega_d^2} \sin^2 \omega_d t\right\}\right], & \beta_{eq} \leq 1 \dots\dots(45.a) \\ \left[1 - e^{-2\beta_{eq}\omega_{eq}t} \left\{1 - \frac{\beta_{eq}\omega_{eq}}{\omega_d} \sinh 2\omega_d t + \frac{2\beta_{eq}^2\omega_{eq}^2}{\omega_d^2} \sinh^2 \omega_d t\right\}\right], & \beta_{eq} > 1 \dots\dots(45.b) \end{cases}$$

ここに,

$$\omega_d = \omega_{eq} \sqrt{1 - \beta_{eq}^2} \quad (\beta_{eq} \leq 1),$$

$$\omega_d = \omega_{eq} \sqrt{\beta_{eq}^2 - 1} \quad (\beta_{eq} > 1)$$

である。式 (44.a), (45.a) は等価線形系 2LS に対してはそのまま使用され, 等価線形系 U2M2LS に対しては  $\beta_{eq} \leq 1$  の低振動数モードに  $\omega_{eq} = \sqrt{\alpha}\omega_0$ ,  $\beta_{eq} = \beta_{2L}$  として, また高振動数モードに  $\omega_{eq} = \omega_0$ ,  $\beta_{eq} = \beta_{2H}$  として使用される。一方, 式 (44.b), (45.b) は U2M2LS の低振動数モードで  $\beta_{eq} > 1$  のとき,  $\omega_{eq} = \sqrt{\alpha}\omega_0$ ,  $\beta_{eq} = \beta_{2L}$  として使用される。

3 階系に対しては, 式 (38) の  $[q]$  はまずその逆マトリックスが求まり

$$[q]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{k_2}{k_2+c_2\lambda_1} & \frac{k_2}{k_2+c_2\lambda_2} & \frac{k_2}{k_2+c_2\lambda_3} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} \dots\dots(46)$$

ここで, 固有値  $\lambda$  は

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_i^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial z_i} (z_i P) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} \dots\dots\dots(37)$$

そこで

$$\{z\} = [q]\{y\} \dots\dots\dots(38)$$

とすると, 式 (36) と式 (37) の比較より

$$[q][a] = [\lambda][q] \dots\dots\dots(39)$$

を得る。これは  $\lambda_i$  が  $[a]$  の固有値であり, すなわち

$$[a] - \lambda[I] = 0 \dots\dots\dots(40)$$

$[q]$  がそれらに必ず固有マトリックスであることを意味している。式 (37) の解は初期条件を静止状態とすれば

$$\sigma_{z_i z_j} = E[z_i z_j] = -\frac{\mu_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} \{1 - e^{(\lambda_i + \lambda_j)t}\} \dots\dots(41)$$

ここに,

$$[\mu] = [q][B][q]^T \dots\dots\dots(42)$$

そして, 式 (41) の共分散マトリックスを元の座標に直すと

$$\sigma_{y_i y_j} = E[y_i y_j] = [q]^{-1} E[z_i z_j] ([q]^{-1})^T \dots\dots(43)$$

となる。

演算結果は, 1 自由度系の式 (5)' については簡単に表わされ, 変位分散については

$$\lambda^3 + \left(\frac{k_2}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\lambda^2 + \frac{k_2 c_1 + K c_2}{m c_2} \lambda + \frac{k_1 k_2}{m c_2} = 0 \dots\dots\dots(47)$$

の解である。

図—13, 14 は 5. の等価線形系について実験結果<sup>12)</sup>と比較したものである。ここで遷移応答の等価線形系による違いを注意されたい。いま, これと定常応答パワー・スペクトル密度との相関性を調べると,  $\alpha=1/2$  では相関性は薄いが  $\alpha=1/21$  ではかなり強い。たとえば, 前者では一律に等価線形系 2LS で非常によく双一次履歴系の遷移応答を近似できるが, 定常応答パワー・スペクトル密度の近似はいつもよいとは必ずしもいえない(図—7 (b) 見よ)。一方, 後者では, 定常応答パワー・スペクトル密度の近似度のよい等価線形系が遷移応答の近似度もよい。 $\sigma_X/Y=0.57$  では U2M2LS  $\sigma_X/Y=1.0$  では U2M3LS,  $\sigma_X/Y \geq 1$  では H3LS である。図—15 は双一次履歴系に粘性減衰を有する場合の最も関心のある非線形応答領域について,  $\alpha=1/2$  では等価線

形系に 2LS,  $\alpha=1/21$  では U2M3LS を選んだ例である。後者の減衰定数  $\beta_{31}, \beta_{32}$  の決定は, この場合, 式 (22), (23) から算出するのは非常に困難となるので, 付録 B にある近似算法を採用した。この方法は, 最も関心のある非線形定常応答領域において, 式 (22), (23) からよりもさらによい rms 値予測の結果となった (図

B1, B2 参照)。これらより,  $\alpha=1/2$  の  $\beta_0=1\%$  の場合, 2LS で十分な精度で遷移応答をも予測できる。 $\alpha=1/21$  の場合は, 変位応答の予測精度は速度応答のそれよりよい。また減衰 5% では双方ともかなりの精度といえる。

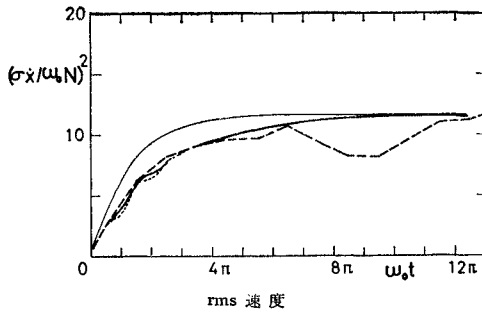
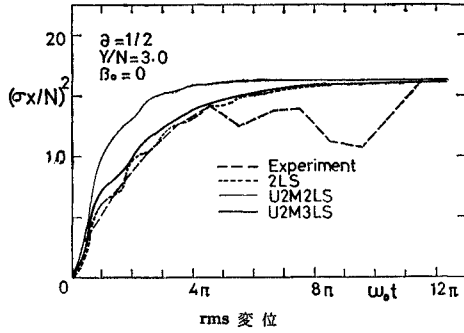


図-13 (a) 遷移応答

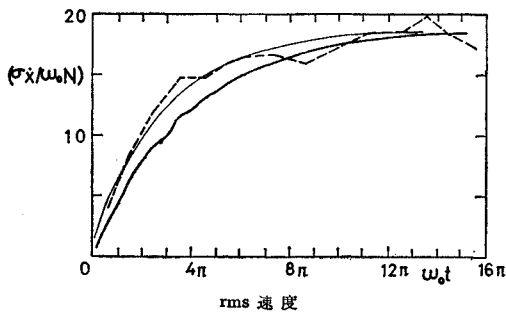
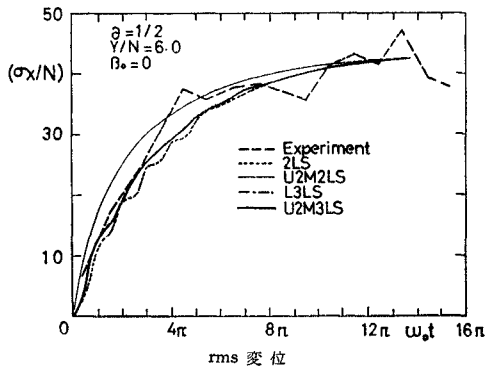


図-13 (b) 遷移応答

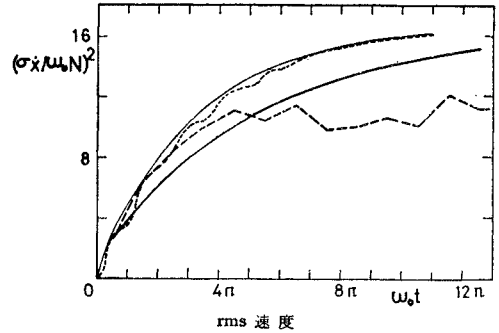
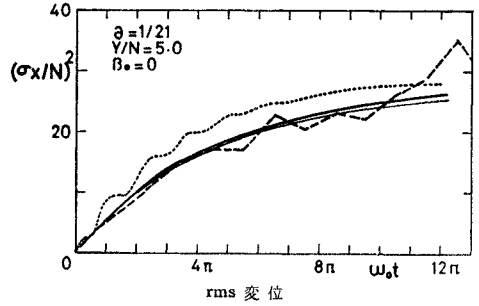


図-14 (a) 遷移応答

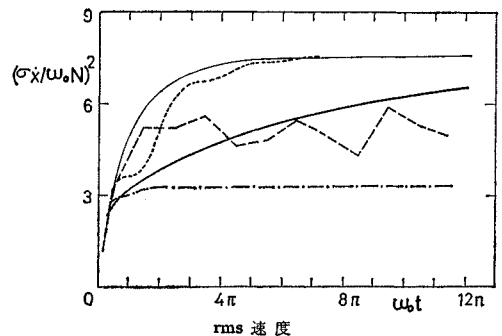
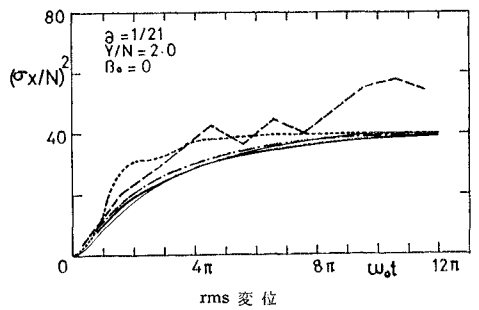


図-14 (b) 遷移応答

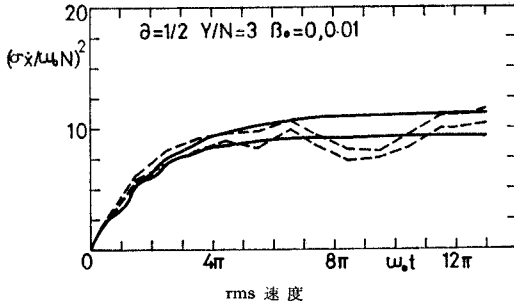
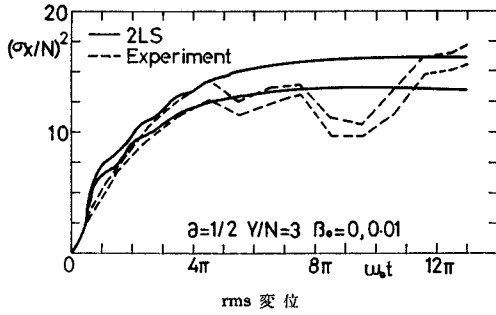


図-15 (a) 遷移 応 答

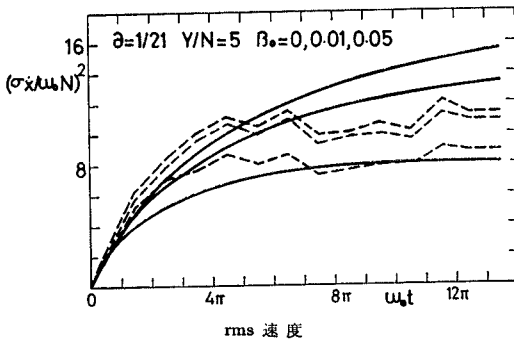
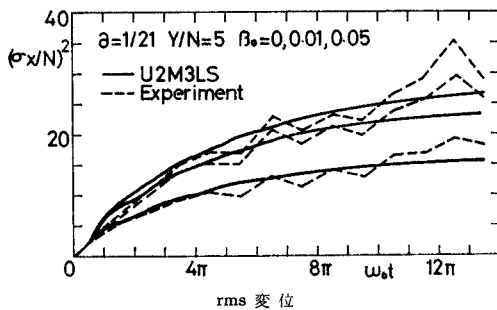


図-15 (b) 遷移 応 答

## 7. 結 論

本研究で得られた結果を列挙すれば、

(1) 定常不規則外力を受ける双一次履歴系の定常変位・速度 rms を予測するには、式 (22) の消散エネルギー率の一致および式 (23) の応答平均振動数の一致を

適用すれば、ゆるやかな非線形系 ( $\alpha=1/2$ ) のときはほぼ完全な精度で、また完全弾塑性に近い系 ( $\alpha=1/21$ ) のときは 25% 以内の精度で達成できる。注意すべきことは履歴サイクルに降伏後剛性の固有振動数を採用すればよいことが判明したことである。また応答平均振動数予測には、今のところ slowly varying amplitude の仮定のもとに等価 1 自由度系のそれを用いるのがよい。

(2) 上の等価線形化規範を満足する異なる等価線形系が種々考えられるが、本論文では、1 自由度系 (2LS)、その 2 モード系 (U2M2LS)、3 階系 (3LS) およびその 2 モード系 (U2M3LS) を選び、それらの振動数特性を双一履歴系の応答パワー・スペクトル密度と比較した。その結果、 $\alpha=1/2$  では等価 2LS でほぼ近似できるが、 $\alpha=1/21$  では非線形応答量に応じてより適切な等価線形系が決まる。

(3) 耐震工学的には非定常確率応答が重要であるので、上の等価線形系の遷移応答を双一次履歴系のそれと比較した。土木構造物で関心のあるダクティリティ・ファクター領域では、等価線形系間の差異が見られ、非線形性が強くなると定常応答パワー・スペクトル密度をよく近似している系が遷移応答をもよく近似する。 $\alpha=1/2$  では等価 2LS で、 $\alpha=1/21$  では等価 U2M3LS がよい等価線形系をなすことがわかった。

(4) 遷移応答時間の長さは定常応答量  $\sigma_x/Y$  によって異なり、通常の期待される範囲 ( $\sigma_x/Y=1\sim 2$ ) では、 $\alpha=1/2, 1/21$  ともに微小振動固有周期の数倍程度である。したがって、外力の継続時間との関係で定常確率応答のほうがより重要性を持つこともある。

以上、本論文では外力にホワイト・ノイズを選んだが、任意のパワー・スペクトル密度を有する不規則外力に対しても等価ホワイト・ノイズを考え対処することができる<sup>13)</sup>。また時間とともに振幅 rms が変化する非定常外力に対しては、応答計算を各ステップに分割し、その中で定常確率解を使用することが考えられる。これについては、一部発表している<sup>14)</sup>。

なお、この論文は著者が米国ライス大学へ留学中(1970~1972)に行なった研究の一部をとりまとめたものである。有益な助言を頂いた Loren D. Lutes 教授に感謝の意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) Jennings, P.C.: Equivalent Viscous Damping For Yielding Structures, Journal of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 94, No. EM 1, 1968, pp. 103-116.
- 2) Caughey, T.K.: Random Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 27, 1960, pp. 649-652.
- 3) Karnopp, D., and Brown, R.N.: Random Vibration of Multi-degree-of-freedom Hysteresis, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 42, No. 1, 1967,

pp. 54-59.

- 4) Iwan, W.D., and Lutes, L.D. : Response of the Bilinear Hysteretic System to Stationary Random Excitation, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 43, No. 3, 1968, pp. 545-552.
- 5) Kozin, F., and Kozin, C.H. : A Moment Technique for System Parameter Identification, Bulletin of Shock and Vibration, 1968, pp. 119-131.
- 6) Goto, H., Iemura, H. : Linearization Techniques for Earthquake Response of Simple Hysteretic Structures, Proc. of JSCE, No. 212, April, 1973, pp. 109-119.
- 7) Caughey, T.K. : Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, No. 4, 1960, pp. 640-643.
- 8) Lutes, L.D. : Equivalent Linearization for Random Vibration, Journal of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 96, No. EM 3, 1970, pp. 227-242.
- 9) たとえば, Lin, Y.K. : Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1970, pp. 110-142.
- 10) Caughey, T.K. : Derivation and Application of the Fokker-Plank Equation to Discrete Non-linear Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 35, No. 11, 1963, pp. 1683-1692.
- 11) Wang, M.C., and Uhlenbeck, G.E. : On the Theory of the Brownian Motion II, Rev. Mod. Phys., 17 (2, 3), 1945, pp. 323-342; collected in N. Wax (ed.), Selected papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, New York, 1954, pp. 113-132.
- 12) Shah, V.S. : Nonstationary Random Response of Bilinear Hysteretic Systems, Rice University (Ph. D. Thesis), 1971.
- 13) Takemiya, H. : Studies on the Application of Random Vibration Theory to Earthquake-resistant Design of Civil Engineering Structures, Kyoto University (Doctoral Thesis), 1973.
- 14) 竹宮宏和・森 邦久 : 履歴振動系の等価減衰について, 土木学会関西支部年次学術講演会概要集, 1973年6月1-60.
- 15) Karnopp, D. : Power Balance Method for Non-Linear Random Vibration, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 34, No. 1, 1967, pp. 212-214.

付録 A. エネルギー消散率

1 自由度系

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mf(t) \dots\dots\dots(A.1)$$

の定常確率過程におけるエネルギー消散率は  $cE[\dot{x}^2]$  で, 外力エネルギーとのつり合いから Karopp の方法<sup>15)</sup>

$$\begin{bmatrix} E[x_1^2] & E[x_1x_2] & E[x_1\dot{x}_1] \\ E[x_2^2] & E[x_2\dot{x}_1] & \\ \text{対称} & & E[\dot{x}_1^2] \end{bmatrix} = E[y_i y_j] = \frac{\pi S_0}{2\beta_{32}\omega_0^3} \sqrt{\left[ \left\{ 1 + \frac{4\beta_{31}\beta_{32}}{(1-\alpha)^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{\beta_{31}}{\beta_{32}}(1-\alpha) \right\} + \alpha \frac{\beta_{31}}{\beta_{32}} \right]}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 + \frac{4\beta_{32}^2}{\alpha(1-\alpha)^2} + \frac{4\beta_{31}\beta_{32}}{\alpha(1-\alpha)} & \frac{4\beta_{32}}{\alpha(1-\alpha)} \left( \frac{\beta_{32}}{1-\alpha} + \beta_{31} \right) & 0 \\ \frac{4\beta_{32}}{\alpha(1-\alpha)} \left( \frac{\beta_{32}}{1-\alpha} + \beta_{31} \right) & -\frac{\beta_{32}}{1-\alpha} \omega_0 & \\ \text{対称} & & 1 + \frac{4\beta_{32}}{(1-\alpha)^2} + \frac{4\beta_{31}\beta_{32}}{1-\alpha} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(B.4)$$

に基づいて求める。まず, 式 (A.1) に  $\dot{x}$  を乗じ

$$E[x^{(r-1)}\dot{x}] = 0$$

ここで右肩添字は微分を表わす。

を考慮すると

$$(E.D.)_2 = cE[\dot{x}^2] = E[f(t)\dot{x}] = m \int_{-\infty}^t \dot{h}(t-\tau) E[f(t)f(\tau)] d\tau \dots\dots\dots(A.2)$$

ここに  $\dot{h}(t)$  は速度応答衝撃関数である。さらに, これに式 (2) を代入すると

$$(E.D.)_2 = \pi S_0 m^2 \dot{h}(0) \dots\dots\dots(A.3)$$

ところで  $\dot{h}(0)$  は単位衝撃より

$$m\dot{h}(0) = 1 \dots\dots\dots(A.4)$$

$$\therefore (E.D.)_2 = m\pi S_0 \dots\dots\dots(A.5)$$

次に, 系が式 (28) の 3 階系の場合, エネルギー消散率は

$$(E.D.)_3 = c_1 E[\dot{x}_1^2] + c_2 E[\dot{x}_2^2] = c_1 E[\dot{x}_1^2] + k_2 E[x_1\dot{x}_2] \dots\dots\dots(A.6)$$

$$\frac{d}{dt} E[x_i^{(r)} x_j^{(s)}] = 0 \quad (i, j=1, 2)$$

を考慮すると 式 (28) より

$$(E.D.)_3 = c_1 E[\dot{x}_1^2] - k_2 [x_1\dot{x}_2] = mE[f(t)\dot{x}_1] \dots\dots\dots(A.7)$$

したがって, 式 (A.2)~(A.4) を繰り返すと

$$(E.D.)_3 = m\pi S_0 \dots\dots\dots(A.8)$$

同様に, 質量  $m$  のいかなる線形系も同一エネルギー消散率  $m\pi S_0$  を有することが証明されよう。

付録 B. 3 階系の定常確率応答

これは式 (41) において  $t \rightarrow \infty$  とすればよく, 安定な系では固有値  $\lambda_i$  の実部は負であるから式 (40) は

$$E[z_i z_j]_{st} = -\frac{\mu_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} \dots\dots\dots(B.1)$$

あるいは

$$[\lambda_i \setminus] E[z_i z_j]_{st} + E[z_i z_j]_{st} [\lambda_j \setminus] = -[\mu_{ij}] \dots\dots\dots(B.2)$$

これに式 (38), (41) を用いると式 (B.2) は

$$[a] E[y_i y_j]_{st} + E[y_i y_j] [a]^T = -[B] \dots\dots(B.3)$$

この方程式は Lyapanov の安定性方程式であり, いまの場合簡単に解けて

さらに、付加粘性ダンパー（図-9 の点2）の速度応答は

$$\begin{aligned}
 E[\dot{x}_2^2] &= \left(\frac{k_2}{c_2}\right)^2 E[(x_1 - x_2)^2] \\
 &= \left(\frac{k_2}{c_2}\right)^2 (E[x_1^2] - 2E[x_1 x_2] + E[x_2^2]) \\
 &= \frac{\pi S_0}{2\beta_{32}\omega_0} \cdot \frac{4\beta_{32}^2}{(1-\alpha)^2} \\
 &\quad \left\{ 1 + \frac{4\beta_{31}\beta_{32}}{(1-\alpha)^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{\beta_{31}}{\beta_{32}}(1-\alpha) \right\} + \alpha \frac{\beta_{31}}{\beta_{32}} \\
 &\quad \dots\dots\dots (B.5)
 \end{aligned}$$

次に系の粘性減衰定数  $\beta_{31}, \beta_{32}$  を決定する方法について述べる。まず双一次履歴系に粘性減衰がないとき、式 (B.4) で  $\beta_{31}=0$  として

$$\left(\frac{\sigma_{X_{31}}}{N}\right)^2 \frac{\pi}{4\beta_{32}} \left\{ 1 + \frac{4\beta_{32}^2}{\alpha(1-\alpha)^2} \right\} \dots\dots\dots (B.6)$$

$$\left(\frac{\sigma_{\dot{X}_{31}}}{\omega_0 N}\right)^2 \frac{\pi}{4\beta_{32}} \left\{ 1 + \frac{4\beta_{32}^2}{(1-\alpha)^2} \right\} \dots\dots\dots (B.7)$$

よって式 (30), (31) を得る。しかし、 $\beta_{31}$  が存在するときは、等価線形化規範である式 (22)', (23) を満足する  $\beta_{31}, \beta_{32}$  を求めることは高次連立代数方程式を解かなければならない。本研究では、それよりも結果的によい応答近似解を与えることとなった以下の方法を採用した。すなわち、双一次履歴系の粘性減衰が小さいときは、この履歴減衰へ及ぼす影響は小さいと考え、 $\beta_{32}$  は単独に式 (22)', (30) から算出し、 $\beta_{31}$  は原系と3階系との間の対応する粘性減衰消散率を一致させて

$$c_1 E[\dot{x}_1^2] = c E[\dot{x}^2] \dots\dots\dots (B.8)$$

よって

$$\beta_{31} = \left(\frac{\omega_{KB}}{\omega_{31}}\right)^2 \beta_0 \dots\dots\dots (B.9)$$

ただし、 $\omega_{31}$  は式 (B.6), (B.7) から求まる応答平均振動数式 (31) である。

以上より算出される rms 応答値を 図-B.1, 2 に示す。関心のある応答領域では、図-5, 6 よりも近似度がよいことが判る。このときの付加ダンパーの応答平均サイクルは式 (B.4), (B.5) より

$$\begin{aligned}
 \omega_{av,2} &= \left[ \frac{E[\dot{x}_2^2]}{E[x_2^2]} \right]^{1/2} = \omega_0 \left[ \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta_{31}}{\beta_{32}}(1-\alpha)} \right]^{1/2} \\
 &\simeq \sqrt{\alpha} \omega_0 \dots\dots\dots (B.10)
 \end{aligned}$$

で仮定した双一次履歴系の平均履歴サイクルと同一であることを注意されたい。

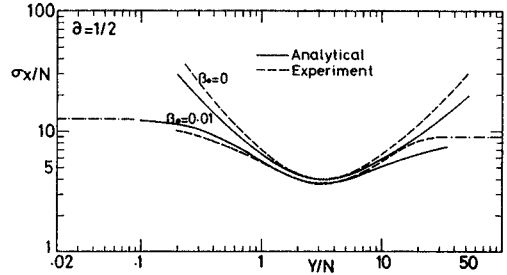


図-B.1 (a) 定常 rms 変位

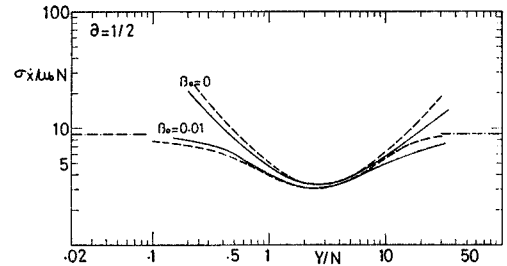


図-B.1 (b) 定常 rms 速度

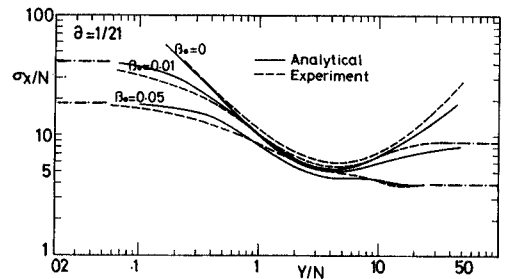


図 B.2 (a) 定常 rms 変位

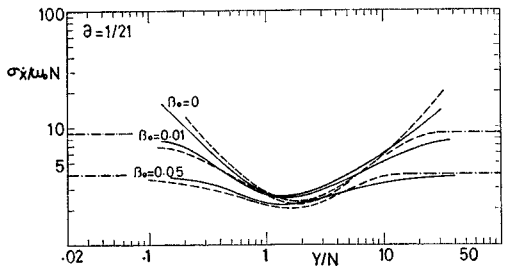


図-B.2 (b) 定常 rms 速度

(1972.6.19・受付)  
(1973.6.8・再受付)