

粒状体のランダム・パッキングに関する一つの試み

ONE EXAMPLE OF TWO DIMENSIONAL RANDOM PACKING OF SAND PARTICLES

伯野元彦*・平尾寿雄**

By Motohiko Hakuno and Hisao Hirao

1. はじめに

近年土を粒状体として取り扱う研究が多くなってきた。土の力学的特性の根本機構を解明するためには、粒子の集合体という本来の姿に着目し、各種の現象の内部機構を微視的立場で把握して、それを巨視的な力学特性と結びつけるためである。

日本においては、最上の一連の研究が先導となり、続々と同種の研究が盛んとなっている。

土を粒状体として扱う多くの既往研究を分類してみると、次のような 4 種となろう。

1. 実際に砂れきを扱った研究
2. 鉛散弾粒・ガラスビーズなどの球体を用いた研究
3. 鉛・アルミニウム・光弾性材料などの円柱を用いた 2 次元モデルによる研究
4. 抽象的モデルによるシミュレーション

われわれは、粒子の性質を変化させることが容易、今まであまり試みられていないなどの理由から、4. の電子計算機内での抽象的モデルによるランダム・パッキング・シミュレーションを試みることにした。

このランダム・パッキング問題は、土木以外の分野、たとえば、物理学、化学工学、冶金などにおいては、比較的はやくからとり上げられており、Round と Newton¹⁾、Vold²⁾ らの研究がある。

2. 既往の研究とわれわれのモデル

すでに述べたように、粒状体のモデル化の試みがさまざまな方法でなされ、その目的に応じて多くの成果が得られてきている。本節では、コンピューターによる粒状体のシミュレーションを取り扱う観点から、従来の研究

例をとり上げてみる。

モンテカルロ法によるランダムパッキングを作る方法を分類すると、次のようなものがある。

1. 棄却法 (rejection method)
2. 局所移動法 (method of local displacement)
3. 割込法 (intrusion method)
4. 落下法 (method of falling particles)
5. 成長法 (method of particle growth)

くわしい説明は省略するが、概略を説明すると、1. の棄却法は確率論的に最も近づきやすい方法である。これは、乱数により、次々と粒子の位置を決定し、粒子が重なり合った場合は、棄却するというものである。一次元におけるランダムパッキングの問題はこの方法により取り扱われている。2. の方法は、粒子の中心を格子点におき、それから一定の小さな範囲でランダムに動かすものである。3. はコヒレントな液体をシミュレーションするために、Round と Newton によって用いられた方法である。4. は粒子があるポテンシャル場をポテンシャルの低いところに落ちる現象に対応するように作られるものである。5. の成長法は鑄物の焼結における金属グレインの成長、森林における植物の成長などのモデルで、ランダム の点を中心とし円を成長させるものである。

土を対象としてのランダムパッキングを考える上では、4. の落下法が土の生成あるいは三軸試験における試料の作成などを見ても、最も妥当な方法ではないかと考えられる。本研究において村山朔郎⁴⁾の研究および佐武正雄⁵⁾の研究を参照したが、これらの研究におけるパッキングの方法も基本的には落下法を用いたものであろう。

村山らの方法は、箱の中に粒状体を注ぎ込むとき、個々の粒子がおそらく粒子の落下地点付近の安定する位置に順次積み上げられるであろうと仮定している。粒子の抽出法にモンテカルロ法を採用し、パッキングを試みて

* 正会員 工博 東京大学助教授 地震研究所

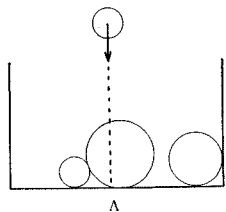
** 学生会員 東京大学大学院学生

いる。4種の径の粒子を用い、乱数表をひいた値により粒子を抽出している。粒子配置については、最下段では左から右に横につめて並べ、右端に達すれば右から左へ、その上の段で粒子の安定する位置に順次積み上げるようにし、再び左端に達すれば左から右へと順次パッキングを行なっている。粒子の材質としては抽象的な円、アルミ棒、光弾性材料の丸棒を用い、接点傾斜角の度数分布、あるいは光弾性実験によるせん断時の粒子間伝達力の実態把握を行なっている。

佐武らの方法は、パッキングを電子計算機で行なっている。プログラムにより乱数を発生し、粒子の組成割合に応じた確率によって粒子の抽出を行なっている。粒子配列の方法は、重力が作用した場合を想定して、ある粒子をつめるに当たっては、できるだけ低位置に置くことにし、その条件に当てはまる位置がいくつかある場合には、その内の最も端（左または右に固定）に近いものをとることにしている。このようにして、あらかじめ定められたパッキング面に粒子がつまることができなくなるまで続けている。具体的計算例として2種類の円（径の比19:12）についてパッキングを行なっている。また実験として、直径18mm、12mmの2種の円筒（高さ約10mm）をそれぞれ塩化ビニールパイプ、アクリルパイプより切り取り、中に石膏をつめた粒子を用いて間げき率の測定を行なっている。

以上の2つの例に共通していえることは、粒子配置の決定にあたり、位置を一方の端から他端へと順次決定している点および、その位置が安定なものである点（具体的には他の2つ以上の粒子で安定に支えられる位置に置くこと）であろう。このような方法においては、粒子の性質が粒子配列に影響するかどうかの比較は困難であろう。また、準安定ともいえる状態を想定することも困難

ではないかと思われる。



図一 粒子の落下モデル

われわれは、図一に示すように、二次元的なモデルを考え、箱の中に任意の粒径分布をもった円形断面が静かに落下し、堆積していくというプロセスを採用した。そして、粒子が落下し、他の粒子または壁に接触し、安定して停止するかどうかは、通常のクーロンの降伏条件が粒子間にも成立するとした。

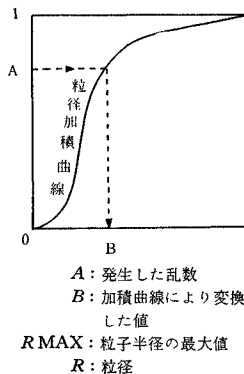
3. われわれの扱ったモデル

(1) 粒子の粒径分布

プログラムに汎用性を持たせるために、粒径加積曲線

において加積率、粒径ともに0から1の値を与え、粒径は、粒子半径の最大値を与えることにより種々の場合に対応できるようにしてある。図示すると次のようである。図一2のような粒径加積曲線が与えられたとき、たて軸に一樣乱数(A)を発生し、その値を加積曲線に応じた値(B)に変換する。次に半径の最大値

R MAX を B に乗じその値を R とする。このようにして必要な個数だけの粒子の半径を決定する。



図一2 粒子径の決定方法

(2) 粒子位置の決定

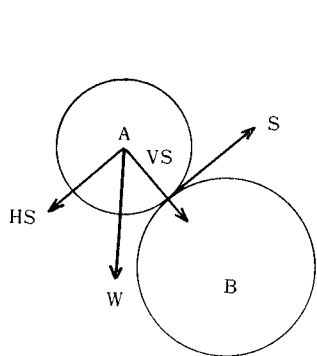
粒子形状は、取り扱いの簡単さから、円形としたため、粒子形状因子の粒子配列に及ぼす影響を考察することは不可能となり、粒子の物理化学的性質と粒状体の特性の間の関連的をしぼらざるを得なかった。すなわち、粒子間摩擦角、粘着力、比重、ヤング率と粒径加積曲線をパッキングのシミュレーションに導入することを目的とした。粒子位置は、すでに存在する粒子とあらたに加わった粒子との相対的位置関係および接触した粒子間での安定を検討することにより決定される。したがって、次の過程で粒子位置を決定する。

- i) 粒子径の決定
- ii) 粒子の落下位置の決定
- iii) 落下地点真下付近の他粒子との接触
- iv) 接触位置での安定、不安定の検討
- v) 安定位置の決定

iv) の安定、不安定の検討においては、種々の仮定を行なっているため、以下に多少詳しく述べる。

粒子を落下させた結果、他の球と接触するが、このとき、以下に述べる規則にしたがって粒子の動きを追跡する。

i) 粒子の形状を円形（球形）としてのパッキングを扱うが、他の球との位置決定にあたり、粒子のころがりを見せ、粒子の運動をすべりのみに限定する。この仮定は、おそらく本研究における最も重要な仮定のひとつであろう。このような仮定の妥当性に関しては多くの問題が残っているといえよう。にもかかわらず、このような仮定を行なった理由は、主に次の2点によるのである。第一には、円形（球形）の粒子を扱う場合、ころがりに抵抗するなんらかの力を導入することが困難であること、第二には、実際の粒状体（砂、れきなど）において粒子の運動は主にすべりによると考えられることであ



W: 粒子Aの重量
 HS: Wの接線方向の成分
 VS: Wの垂線方向の成分
 S: 粒子間摩擦力および粘着力による抵抗

図-3 粒子の安定検討(a)

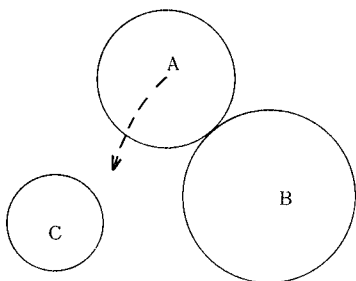
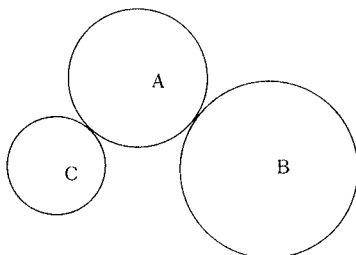
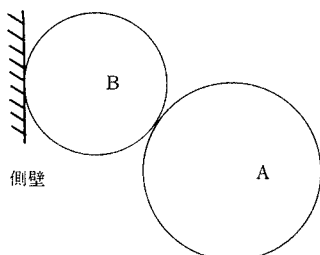


図-4 粒子の安定検討(b)



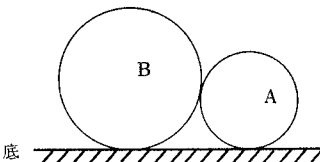
運動した結果他の球Cと接触した。
安定

図-5 (a)



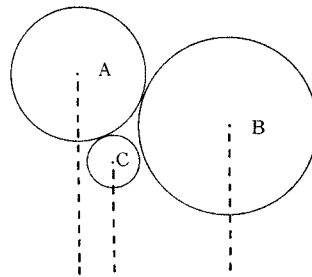
運動した結果側壁と接触した。
安定

図-5 (b)



運動した結果底と接触した。
安定

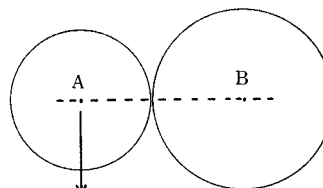
図-5 (c)



運動した結果他の球Cと接触したが、球Aの中心が支持している球Bおよび球Cの中心のあいだから外に出た。
不安定

この場合には、あらかじめ球Aと球Cのあいだで、すべりの判定を行なう

図-5 (d)



運動した結果、球Aの中心が球Bの中心と同じ高さになるまで、互に述べた4種類の場合にも当てはまらなかった。
不安定

この場合には、図の球Aの位置から、球を落下させる。すなわち最初の状態にもどる。

図-5 (e)

る。すべりのみを粒子の運動として考えることにより、粒子間摩擦力および粘着力をパッキングに導入することが可能となったわけである。

ii) ここで相接する2粒子の力のつり合いを 図-3 のようにして取り扱う。粒子間摩擦角および粘着力をそれぞれ θ, C とすると、図-3 における抵抗力 S は

$$S = VS \cdot \tan \theta + C \dots\dots\dots (1)$$

として表わされる。HS および S の値の比較から次のような条件のときに粒子Aの運動を決定する。

$HS > S$ 粒子Aはすべる。

$HS < S$ 粒子Aはこの状態で安定。

HS および VS は W から求められる。ゆえに粒子の安定は、粒子の径、比重、摩擦角、粘着力から決定されるのである。このような判定を行なった結果、安定であると判定されたとき、この粒子の位置はこの位置に決定され、以後粒子の移動はないものとして新たな粒子についての位置決定に移る。実際には、次から次へと粒が上から堆積した場合、式(1)のつり合い条件が満足されなくなるわけであるが、本研究では、つり合い条件が以

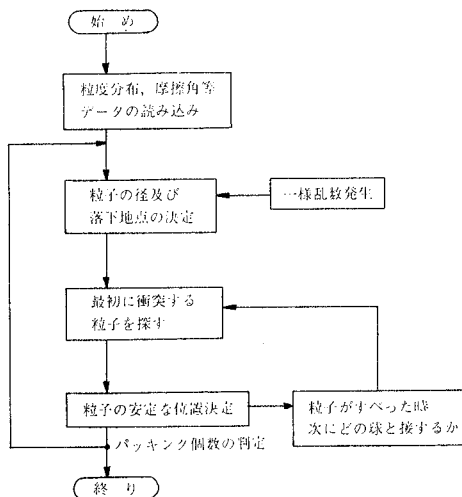


図-6 シミュレーション流れ図

後満足されなくなっても、粒子は崩壊しないとしている。この点は今後に残された問題である。

iii) 上記の判定の結果不安定であり粒子がすべると

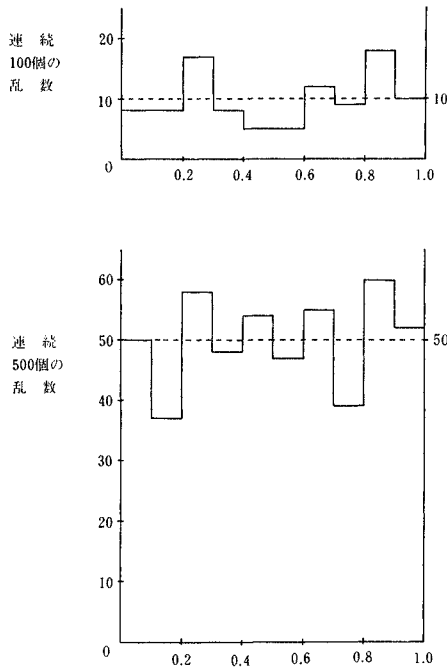


図-7 乱数の度数分布 (計算機の組込関数)

判定されたとき、次のような運動を考える。図-4のように、球Bの周囲にそって球Aをすべらせるのである。このような運動を粒子Aについて考えたとき、粒子は図-5の場合のいずれかの状態となるであろう。以上のようにして粒子の位置を次々と移動して行き安定と判定される状態を求めた。

以上、この数値実験の流れ図を示すと図-6のようになる。

(3) 発生した乱数の性質

計算機中で一様乱数を計算し、それを使用したわけであるが、その統計的性質は、シミュレーション結果にも影響することもあると思いチェックしてみたところ、図-7に示すような結果が得られた。ほぼ一様と見なせるであろう。

4. 数値実験結果とその考察

以上述べた方法により、実際にパッキングを行なった結果を述べる。入力データとして次表のような値を用いた。

以上の数値を適宜組合せて合計7種のパッキングを行なった。

粒径加積曲線は、本研究においては、粒径と粒子数百分率で与えてある。3種のタイプ S, M, G を図示すると図-8 (a),(b),(c) のようになる。ここで S タイプ

とは同一粒径の粒子のパッキングであり、M タイプは村山らの研究で用いられた粒度分布と類似するものであり、G タイプは、まったくランダムに粒径を決定するタイプである。

このような3つのタイプが実際の砂あるいはれきの粒度分布をよく表現しているとは考えられない。ここでは、このような3つのタイプによりどのような差があらわれるかを見たかったためである。必要であれば任意の粒度分布を与えることによりパッキングを行なえばよいのである。同様に粒子間摩擦角、粘着力、比重、最大粒径、粒子数などすべて任意の値を与えることによりどのようなパッキングも可能であることが、コンピューターによるランダムパッキングの特長なのである。

次に、数値実験結果の数例を示し考察を加えよう。

図-9 (a) : 粒径が均一で、しかも摩擦も、粘着力もないという理想的な場合であって、最も密につまる配列である。村山らの結果と類似している。

図-9 (b), (c) : 同じく粒径均一で、摩擦または、粘着力の働らく場合であるが、摩擦と粘着力の間に効果の差はないように見える。しかも、アクロバットの構造が見受けられるが、これは後述するように、粒子の安定位置をいったん決めた後は、その上に落下した粒子の重みに耐えかねて、崩壊するという現象を考慮していないためと思われる。

図-9 (d) : 粒径、大、中、小の三種が混合したタイプのパッキングであるが、この場合には、教科書どおり、大径粒子間に中、小粒子が詰まって、密度をたかめてい

粒子数	100個
粒径加積曲線	S, M, G の3種
最大粒径	Sタイプ 0.04 Mタイプ 0.15 Gタイプ 0.08
粒子間摩擦角	0.0 ラジアン 0.4 ラジアン
粘着力	0.0 0.003
比重	1.0

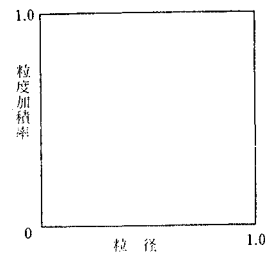


図-8 (a) S タイプ

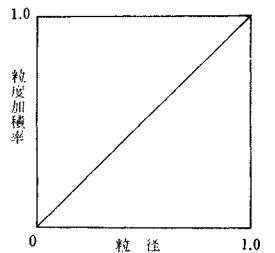


図-8 (b) G タイプ

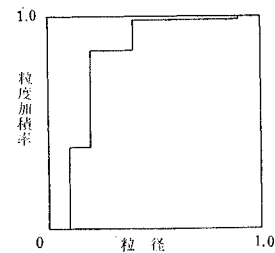


図-8 (c) M タイプ

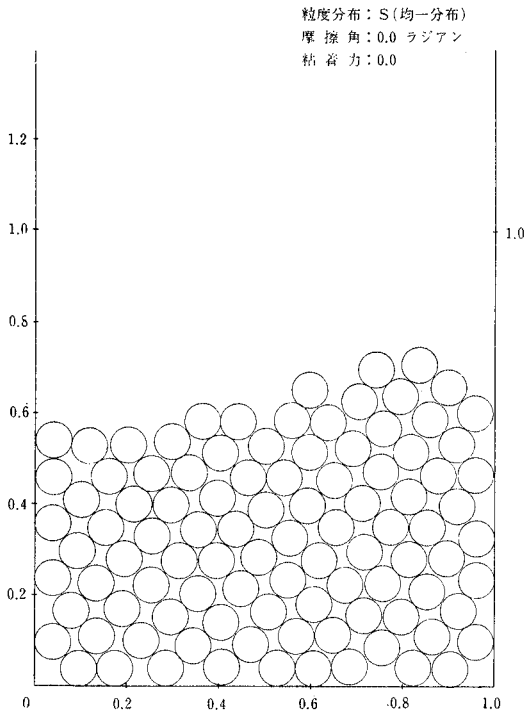


図-9 (a) 粒子配列例

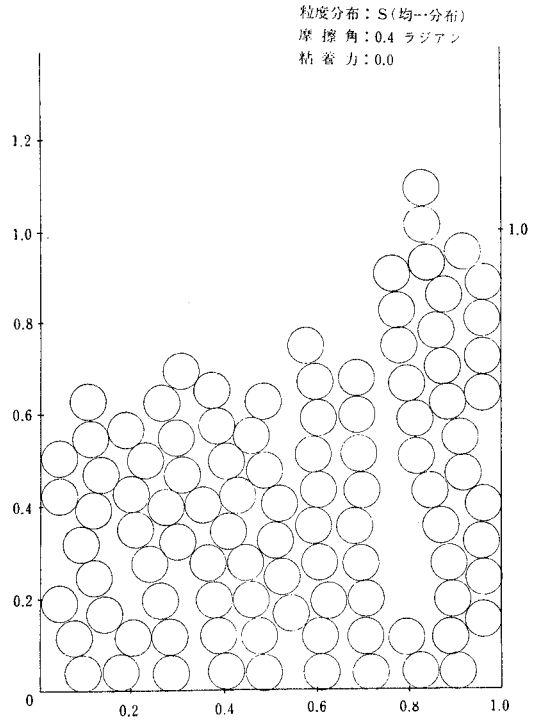


図-9 (c) 粒子配列例

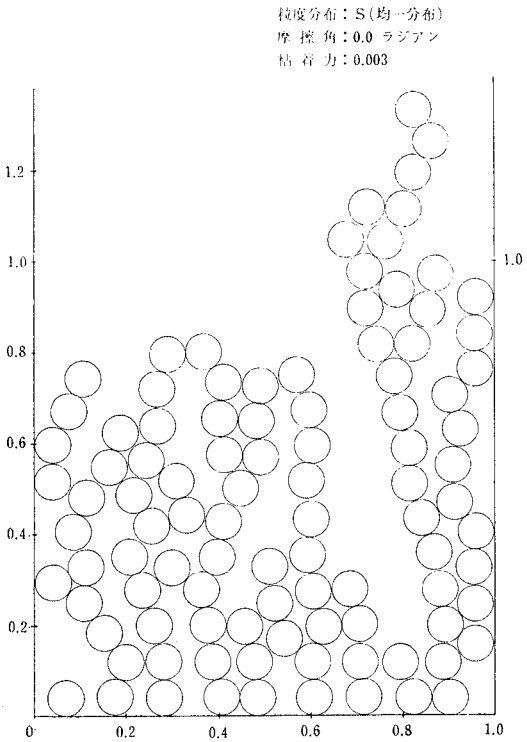


図-9 (b) 粒子配列例

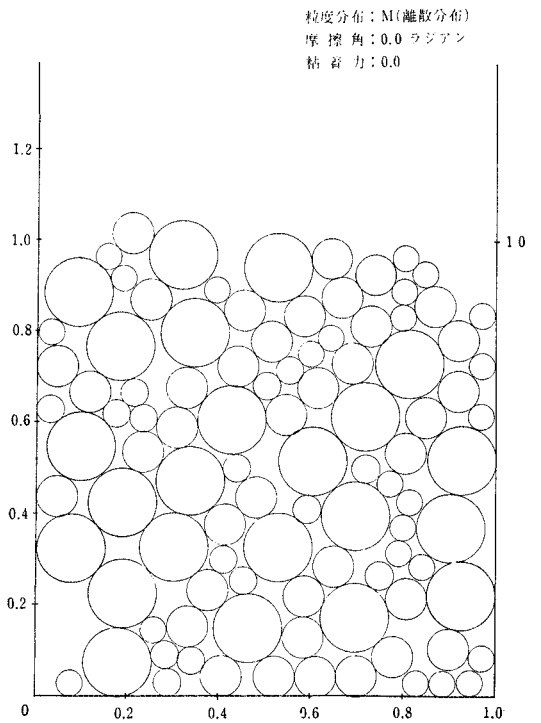


図-9 (d) 粒子配列例

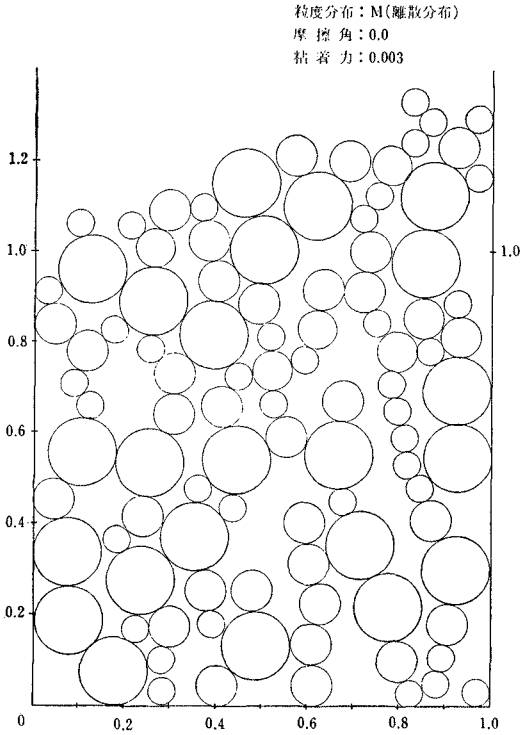


図-9 (e) 粒子配列例

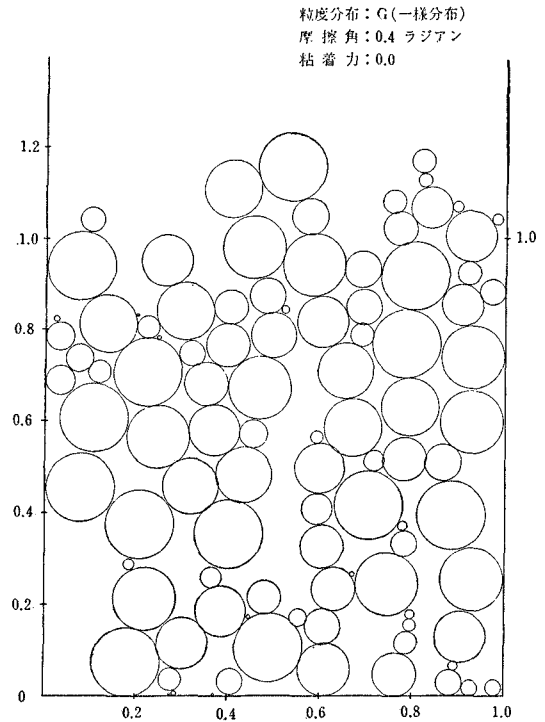


図-9 (g) 粒子配列例

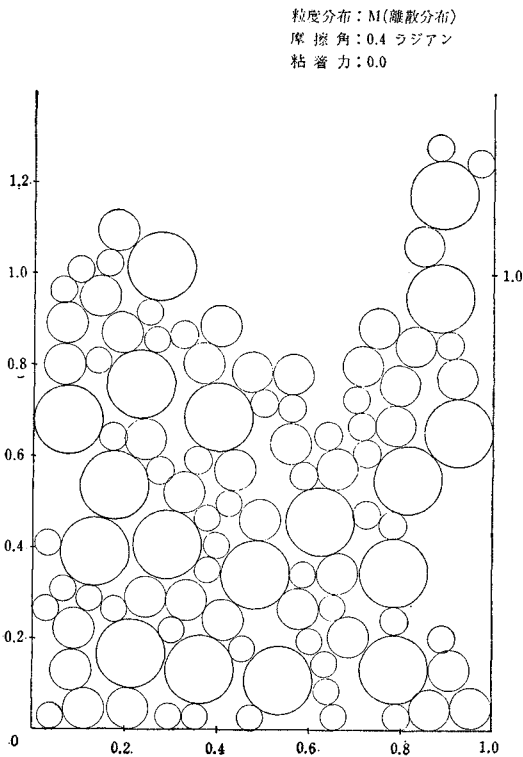


図-9 (f) 粒子配列例

ることがわかる。

図-9(e),(f)：それぞれ摩擦，粘着力のみが，作用した場合であるが，これらは，粘土の微構造として得られているものに似ている場合もある。

図-9(g)：粒度が一様に分布している場合であるが，やはり，密度が比較的高いつまり方をしているようである。

5. パッキング結果の考察

(1) 安息角の検討

パッキングの際，粒子をある限られた位置から落下させ，パッキングの状態を調べることにより粒子間摩擦角と安息角との対応がつかないであろうかとの考えから実際にそのようなパッキングを行なってみた。ある程度予想されたことではあるが，結果はさんたんたるものであった。安息角が実際よりも非常に大きく出たのである。

この原因の最大のものは，粒子位置決定をある粒子とその粒子の接している粒子との間での安定の判定のみによった点である。つまり，図-10(a),(b) のような2種類の場合ともに安定と判断されることによるのである。図-10(a)において粒子Aが安定と判定されたとき，

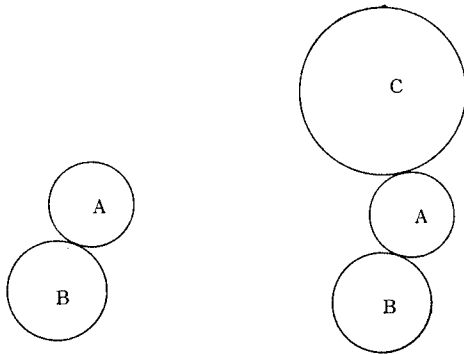


図-10 (a)

図-10 (b)

後に 図-10 (b) のように新たに粒子 C が接触しても、粒子 A の安定はまったく不動のものとしていることによるのである。実際には、図-10 (b) のような場合、A と B との間での安定条件は満たされなくなるであろう。したがって、粒子 C の位置も変化するのである。

以上の条件をプログラムに取りくむことが今後の最大の課題となるであろう。

(2) 粒状体の内部応力の推定

村山らの粒状体のシミュレーションにおいては、光弾性材料の丸棒を用いたせん断試験から、粒状体内部の応力を推定しようと試みている。本研究においては次のような方法により、まったくのモデル化によって応力の推定を試みた。すなわち、粒子が他の粒子と接触しているとき、2 粒子の中心間に 2 つの粒子の半径の和を長さとする一様断面の部材が存在するものと想定し、粒状体を骨組構造物に置きかえることにより応力の推定を行なってみた。

具体的には、図-11 のような構造の変更を行なうわけである。このような変換を考えた理由として、粒子の接触点において伝達される垂直応力、せん断などが骨組構造物においてあらわれる軸力、モーメントなどと対応しているのではないかと考えたからである。

さて、骨組構造物に置換えを行なう場合には、骨組部材の断面、弾性係数が粒子間のばね係数と等しくなるよ

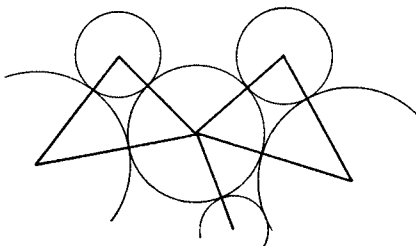


図-11 粒体構造の骨組構造への変換

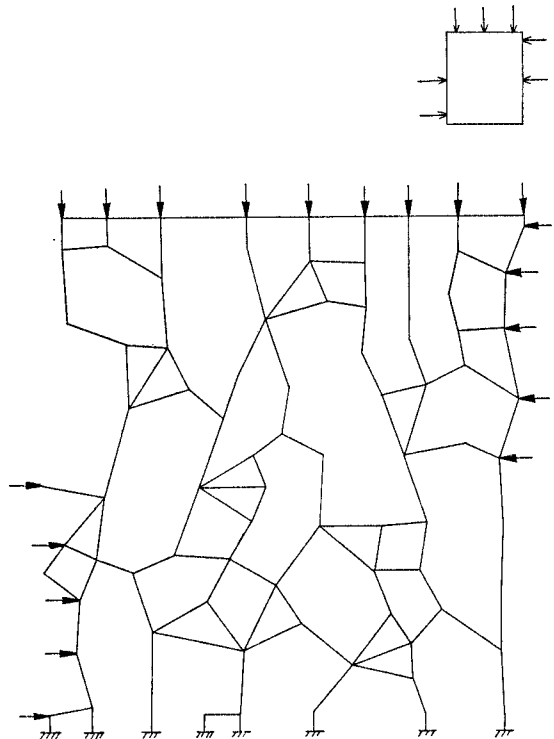


図-12 パッキングモデルの骨組構造への変換

うに決定した。すなわち、Hertz の理論により⁶⁾、半径 R の球が平面に接し、互いに P という圧力で押しつけられた場合、球の中心の相対変位 α と P との関係は、

$$K = \frac{dP}{d\alpha} = 2\mu a / (1 - \mu)$$

$$\text{ここに、} a = [3(1 - \nu)PR / 8\mu]^{1/3}$$

ν, μ はポアソン比とせん断弾性係数である。

このように P と α の関係は比例関係になく、ばね係数が圧力 P によって変わるといふ複雑な関係である。

同様にせん断力 S を受けた場合、変形 δ との間には次のような関係がある。

$$L = \frac{dS}{d\delta} = 4\mu a / (2 - \mu)$$

本研究では、各球間の P は一定値と仮定して、球の直応力に対するばね係数 K と摩擦力に対するばね係数 L を定め、それを部材の直力に対するばね係数、部材の両端が埋め込みの場合のせん断変形から導出したせん断ばね係数と等しくなるように、弾性係数、断面形状を定めた。

具体的なモデルとしての構造は、先にパッキングを行なった粒度分布 M タイプの摩擦角 0.4 ラジアン、粘着力 0 の場合のパッキングモデルについて骨組で置きかえたものを用いた。その骨組は 図-12 のようである。

こうして作成した構造に同図に示したような上下なら

— 圧縮応力
 - - - 引張応力
 ← 外力

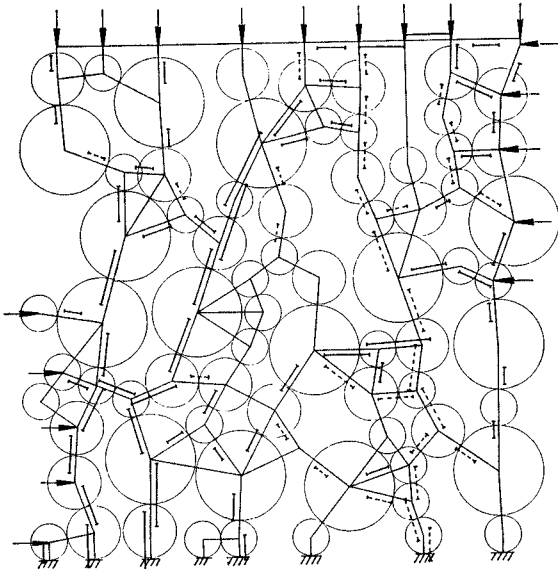


図-13 粒子間に働く直応力

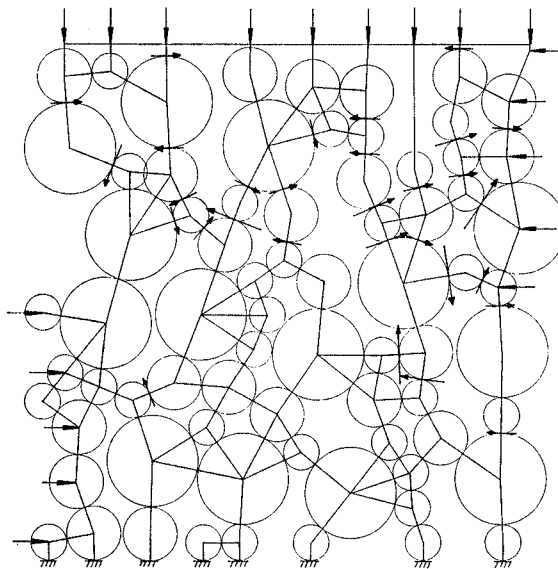


図-14 粒子間に働くせん断力

びに水平方向に荷重を加え、そのときの応力をマトリックス法を用いて求めた。その結果を 図-13, 14 に示してある。この図には力の記入されていない箇所もあるが、これは図が見つらなくなることを避けるため、ある程度以下の大きさの力は記入しなかったためである。

この結果を見ると、図-13 の直応力に関しては、右下隅から、左上へかけて、引張り応力を生じていること

が多く、左下隅から右上へかけての方向では、圧縮応力を生じていることが多い。個々の応力にはかなりのばらつきがあるが全体として見た場合には、常識的な結果といえよう。

せん断応力(図-14)では、水平外力を加えている右上部と、それに次いで、左上部に大きいせん断力が多くの粒子間に作用している。そして、個々の粒子についてみると、粒子を回転させようとする力が粒子表面の2か所、なかには3か所に働いている場合もあって、実際にすべりを生じる場合には、粒子が回転を起しながらすべることもあることを示唆していて興味深い。

(3) 間げき比について

間げき比については、同様のシミュレーションによって、村山らは4種の径の粒子について0.28を、佐武は、2種の径の粒子について、実験を行ない、0.22を得ているが、われわれの場合、3種の粒径の粒子を混合し、摩擦係数を2種に変えて表-1のような結果を得た。摩擦のない場合には、粒度分布にはあまり関係せず、間げき比はだいたい、村

表-1

粒子数比		間げき比		
0.04φ	0.08φ	0.16φ	θ=0	θ=0.4
0	100	0	0.27	0.47
40	40	20	0.31	0.36
20	30	50	0.27	
10	20	70	0.27	

山らの値と似ているが、これは村山らのパッキングの方法を考えれば、それが、とりもおさず最も密につめていく方法であり、その結果が、摩擦のない場合と、ほぼ等しいということは首肯できよう。摩擦のある場合には、もちろん、間げき比は増大していく。ただ、その増加のしかたは、粒子の安定条件を第1段階でしか考えていないため、大きめに出ていると思われる。

6. む す び

電算機中において、任意粒度分布をもつ粒子を発生させ、箱中に落下させ、粒子間に働らく、摩擦力、粘着力のみによって定まる降伏条件の下で、どのような粒状構造が生じるかを調べ、さらに、その構造に外力を加えた場合の応力状態を剛トラスとして解いてみた。この試みにより次のことがらが知られたと思う。

(1) 粒子間摩擦係数または、粘着力が大きくなると、当然のことながら、空げきが増える。ただ、本研究では粒子間の安定は、その粒子が落下した時のみにチェックするだけであるので、粒子がほぼ直立して成長するという場合もあった。これは、今後に残された問題であ

る。

(2) 摩擦係数と粘着力がない場合には、最密と思われる粒状体構造を形成した。

(3) 摩擦係数、粘着力が小さいかない場合には、大きい粒子の間の空けきを小さい粒子が埋めて、密な組織となっていた。

(4) この粒状体に、外力をかけたときの粒子間に働らく応力は、連続体として見た場合には、当然のことながらばらつきが多すぎる感じではあるが、全体としての傾向は、常識的なものであった。粒子に回転を起こさせるようなせん断力が働いている場合も認められた。

(5) 本研究では粒子の累積による安定性の変化が無視されているため、摩擦係数、粘着力が非常に小さい場合にしか適当な結果を与えないように思われた。

(6) 今後の課題としては、さらに進んで粒状体としての破壊、すなわち、粒子間のすべりをこのシミュレ-

ションによって、取り扱うことである。

本研究に当っては、東京大学土木工学科 石原研而助教授の適切なアドバイスを頂いたことを感謝致します。

参考文献

- 1) Round and Newton : Random packing of equal spheres on a plane surface, Nature 1963
- 2) Vold, M.J. : Sediment volume and structure in suspensions of anisometric particles, J. Chem. Phys. 1962
- 3) 樋口伊佐夫 : 粒子統計における二,三の研究, 統計数理研究所彙報 12 巻 1 号 (1964)
- 4) 村山朗郎・松岡 元 : 2 次元モデルによる粒状体のせん断現象の微視的考察, 京都大学防災研究所年報第 13 号 B
- 5) 佐武正雄 他 : 電子計算機によるパッキングのシミュレーションについて, 土木学会東北支部技術研究発表会講演概要, 昭 46 年
- 6) Timoshenko and Goodier : Theory of Elasticity, pp. 372~377 (1951) McGraw-Hill

(1972. 8. 7・受付)

(1973. 8. 11・再受付)