

粘弾性地盤内の構造物に作用する圧力の一計算法

A METHOD OF CALCULATION OF PRESSURE ACTING ON UNDERGROUND
STRUCTURE IN VISCOELASTIC MEDIUM

桜井春輔*・吉村佳映**

By Shunsuke Sakurai and Yoshiteru Yoshimura

1. ま え が き

非線形な挙動を示す材料を対象とした構造解析においても、その第一近似としては、材料をフックの法則にしたがう弾性体と仮定する場合が多い。しかし、トンネルあるいは地下発電所のような地中構造物に作用する圧力の解析においては、たとえ第一近似としても、地山を弾性体と仮定することはできない。なぜなら、弾性地山の場合は、掘削と同時に地山の变形は終了し、その後構造物を建造しても、それには圧力が作用しないことになるからである。

しかし、現実には、掘削後地山は時間とともに変形する。そして、掘削後ある時刻に構造物を築造すれば、その後は地山の变形が拘束されるため構造物には圧力が作用することになる。この圧力は通常は最終的な一定値に達するまで増大する。このような現実の構造物に作用する圧力の発生機構を考慮すれば、その解析には、たとえ第一近似解としても、時間の要素を考慮しなければならないことがわかる。しかし、このような観点から、時間を考慮した力学体系で地中構造物に作用する圧力を取り扱うようになったのはほんの最近のことである^{1)~4)}。

時間を考慮した解析を行なうためには、地山を粘弾性体と仮定する方法が考えられる。そして、さらに線形の粘弾性モデルが適用できるとすれば、Laplace 変換を基礎とした弾性体との対応原理⁵⁾を用いることにより、その理論解は形式的には容易に求めることができる。しかし実際には、Laplace 逆変換が必ずしも容易ではなく、また、この手法の適用できないような場合、たとえば、境界が時間的に移動する場合、さらに、初期応力あるいは初期ひずみの存在する場合などがあり、したがって、線形粘弾性地山を仮定した場合でも、理論解の得られる

のは限られた初期条件および境界条件を持つ問題に限定されている。

しかし一方、地中構造物の設計という立場からは、過渡的な圧力の経時変化よりも、その最大値を知ることが問題となる。したがって、本論文においては、地中構造物に作用する終局圧力を理論的に求める方法について一つの提案を行なう。なお、ここで提案する方法は地山を線形粘弾性体と仮定しているが、時間を考慮する必要はなく、終局圧力を直接求めることができる。

2. 基礎方程式

材料がフックの法則にしたがう等方、等質な完全線形弾性体であるとすれば、変位場 u_i は次の Navier の式を満足しなければならない。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2 \dots \dots (1)$$

ここで、 λ, μ は Lamé の定数、 X_i は物体力、 ρ は密度を表わす。また、添字に関しては総和規約を適用する。いま準静的な問題に限定すれば、式(1)を満足する u_i は一般に次のように表わされる⁶⁾。

$$u_i = \Gamma(\nu, R, P) / 2G,$$

$$\Gamma(\nu, R, P) = 2(1-\nu) F_{i,jj} - F_{j,ji} \dots \dots (2)$$

ここで、 G, ν はそれぞれせん断弾性係数、ポアソン比であり、 $\Gamma(\nu, R, P)$ はポアソン比、位置および外力によって定まる関数である。また、 F_i は Galerkin vector と呼ばれ、物体力のない場合には重調和方程式を満足する。すなわち、

$$F_{i,jjmm} = 0 \dots \dots (3)$$

いま、材料が粘弾性体であり、時間に無関係に一定な集中心力 P のみが作用する場合の変位は式(2)から次のように表わされる。

$$u_i(t) = \Gamma_0(\nu, R) \cdot \psi(t) \cdot P \dots \dots (4)$$

ここで、 $\Gamma_0(\nu, R)$ は単位集中心力 $P=1$ が作用した場合の関数 $\Gamma(\nu, R, P)$ を表わす。すなわち、ポアソン比お

* 正会員 Ph. D. 神戸大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 大林組技術研究所

よび位置のみの関数である。また、 $\psi(t)$ はせん断変形を表わすクリープ関数である。

なお、ここでポアソン比は時間と無関係に一定であると仮定している。もちろん、厳密にはポアソン比は時間の関数と考えなければならないが、その影響は小さいとしてここでは無視することにする。したがって、体積変形の経時変化は、与えられたポアソン比に対し、クリープ関数 $\psi(t)$ によって一意的に決定されることになる。

次に、外力が時間とともに変化する場合を考えれば、式(4)は次のような重畳積分(convolution integral)の形で表わされる。

$$u_i(t) = \Gamma_0(\nu, R) \psi(t) * P'(t) * \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 $P'(t) \equiv \partial P(t) / \partial t$ である。

式(5)が、以下の理論の展開に用いる基礎方程式である。

3. 粘弾性論的考察

初期応力 p, q の作用する地山に、任意形状のトンネルを掘削し、覆工を施した場合について考える。しかし、以下に述べる考え方はトンネルのみならず、その他の地中構造物の場合にも適用できるものである。ただし、ここでは理論の展開を容易にするため二次元問題として取り扱っているが、三次元への拡張も可能である。

図-1において、 $r=b(\theta)$ における地山の変位は、地山と覆工との境界に垂直および接線方向の変位として、それぞれ式(5)にならって式(6)のように表わされる。なお、ここでの解析においては、トンネルが地下のかなり深い所に建造される場合を対象とし、したがって地山を重力場と考えず、トンネル中央部の初期応力が無限遠方に作用するものとしている。しかし、重力場とした場合

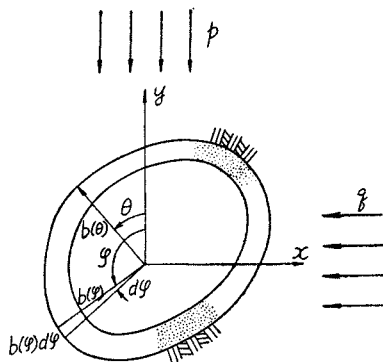


図-1 トンネルの幾何学的関係

$$*) \quad f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$$

においても本解析法の適用は可能である。

$$\begin{aligned} u_g(\theta, t) &= (A_1(\theta)p + A_2(\theta)q) \psi^*(t) \\ &+ \int_0^{2\pi} B_1^*(\theta; \varphi) \psi(t) * \sigma_0'(\varphi, t) b(\varphi) d\varphi \\ &+ \int_0^{2\pi} B_2^*(\theta; \varphi) \psi(t) * \tau_0'(\varphi, t) b(\varphi) d\varphi \\ v_g(\theta, t) &= (A_3(\theta)p + A_4(\theta)q) \psi^*(t) \\ &+ \int_0^{2\pi} B_3^*(\theta; \varphi) \psi(t) * \sigma_0'(\varphi, t) b(\varphi) d\varphi \\ &+ \int_0^{2\pi} B_4^*(\theta; \varphi) \psi(t) * \tau_0'(\varphi, t) b(\varphi) d\varphi \\ &\dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 $\sigma_0(\varphi, t), \tau_0(\varphi, t)$ はそれぞれ覆工に作用する垂直およびせん断応力であり、 $A_i(\theta) (i=1, 2, 3, 4)$ は地山の初期応力による素掘トンネル壁面の変位を表わす係数で、 θ の関数である。 $B_1^*(\theta; \varphi), B_3^*(\theta; \varphi)$ はトンネル内周の点 φ に単位の集中力が壁面に垂直に作用するときの点 θ における垂直および接線方向の変位を、また、 $B_2^*(\theta; \varphi), B_4^*(\theta; \varphi)$ は点 φ に単位集中力が壁面の接線方向に作用するときの点 θ における垂直および接線方向の変位を表わす。また、 $\psi^*(t), \psi(t)$ は地山のクリープ関数である。

一方、覆工の外側($r=b(\theta)$)における垂直および接線方向の変位はそれぞれ次のように表わされる。

$$\begin{aligned} u_l(\theta, t) &= \int_0^{2\pi} C_1^*(\theta; \varphi) \phi(t) * \sigma_0'(\varphi, t) b(\varphi) d\varphi \\ &+ \int_0^{2\pi} C_2^*(\theta; \varphi) \phi(t) * \tau_0'(\varphi, t) b(\varphi) d\varphi \\ v_l(\theta, t) &= \int_0^{2\pi} C_3^*(\theta; \varphi) \phi(t) * \sigma_0'(\varphi, t) b(\varphi) d\varphi \\ &+ \int_0^{2\pi} C_4^*(\theta; \varphi) \phi(t) * \tau_0'(\varphi, t) b(\varphi) d\varphi \\ &\dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ここで、 $C_1^*(\theta; \varphi), C_3^*(\theta; \varphi)$ は覆工外側の点 φ に単位の集中力が覆工に垂直に作用するときの、点 θ における垂直および接線方向の変位を、また、 $C_2^*(\theta; \varphi), C_4^*(\theta; \varphi)$ は点 φ に単位の集中力が覆工に対し接線方向に作用するときの点 θ における垂直および接線方向の変位を表わす。 $\phi(t)$ は覆工材料のクリープ関数である。

いま、 $\sigma_0(\varphi, t), \tau_0(\varphi, t)$ が変数分離可能であると仮定する。すなわち、

$$\begin{aligned} \sigma_0(\varphi, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} D_{1m}(\varphi) Q_{1m}^*(t) \\ \tau_0(\varphi, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m}(\varphi) Q_{2m}^*(t) \end{aligned} \dots \dots (8)$$

ここで、 $D_{1m}(\varphi), D_{2m}(\varphi)$ は φ のみの関数、 $Q_{1m}^*(t), Q_{2m}^*(t)$ は t のみの関数とする。なお、 $\sigma_0(\varphi, 0) = \tau_0(\varphi, 0) = 0$ であるから、 $Q_{1m}^*(0) = Q_{2m}^*(0) = 0$ でなければならない。

地山と覆工の境界において、分離あるいはすべりが生じないものと仮定すれば、その境界面における変位の適合条件は次のようになる。

$$u_g(\theta, t) = u_r(\theta, t), \quad v_g(\theta, t) = v_r(\theta, t) \dots \dots (9)$$

式 (6) および式 (7) を、式 (8) の関係を考慮して、式 (9) に代入し、さらに両辺を Laplace 変換すれば式 (11) を得る。なお、ここで Laplace 変換は次式により定義されるものとする。

$$\bar{F}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \dots \dots \dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} & \{A_1(\theta) p + A_2(\theta) q\} \bar{\psi}^*(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{1m}^*(\theta) \bar{\psi}(s) \\ & - C_{1m}^*(\theta) \bar{\phi}(s)\} s \bar{Q}_{1m}^*(s) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{2m}^*(\theta) \bar{\psi}(s) - C_{2m}^*(\theta) \bar{\phi}(s)\} \\ & s \bar{Q}_{2m}^*(s) = 0 \\ & \{A_3(\theta) p + A_4(\theta) q\} \bar{\psi}^*(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{3m}^*(\theta) \bar{\psi}(s) \\ & - C_{3m}^*(\theta) \bar{\phi}(s)\} s \bar{Q}_{1m}^*(s) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{4m}^*(\theta) \bar{\psi}(s) - C_{4m}^*(\theta) \bar{\phi}(s)\} \\ & s \bar{Q}_{2m}^*(s) = 0 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} B_{1m}^*(\theta) &= \int_0^{2\pi} B_1^*(\theta; \varphi) D_{1m}(\varphi) b(\varphi) d\varphi, \\ B_{2m}^*(\theta) &= \int_0^{2\pi} B_2^*(\theta; \varphi) D_{2m}(\varphi) b(\varphi) d\varphi, \\ B_{3m}^*(\theta) &= \int_0^{2\pi} B_3^*(\theta; \varphi) D_{1m}(\varphi) b(\varphi) d\varphi, \\ B_{4m}^*(\theta) &= \int_0^{2\pi} B_4^*(\theta; \varphi) D_{2m}(\varphi) b(\varphi) d\varphi \\ C_{1m}^*(\theta) &= \int_0^{2\pi} C_1^*(\theta; \varphi) D_{1m}(\varphi) b(\varphi) d\varphi, \\ C_{2m}^*(\theta) &= \int_0^{2\pi} C_2^*(\theta; \varphi) D_{2m}(\varphi) b(\varphi) d\varphi, \\ C_{3m}^*(\theta) &= \int_0^{2\pi} C_3^*(\theta; \varphi) D_{1m}(\varphi) b(\varphi) d\varphi, \\ C_{4m}^*(\theta) &= \int_0^{2\pi} C_4^*(\theta; \varphi) D_{2m}(\varphi) b(\varphi) d\varphi \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

θ に関する関数はすべて周期 2π であるから、一般性を失うことなく、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A_i(\theta) &= A_{i0} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{im} \cos m\theta + A_{im}' \sin m\theta), \\ & \quad (i=1, 2, 3, 4) \\ \sum_{m=1}^{\infty} B_{1m}^*(\theta) \bar{Q}_{1m}^*(s) &= B_{10} \bar{Q}_{10}(s) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (B_{1m} \bar{Q}_{1m}(s) \cos m\theta &+ B_{1m}' \bar{Q}_{1m}'(s) \\ & \sin m\theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m}^*(\theta) \bar{Q}_{2m}^*(s) &= B_{20} \bar{Q}_{20}(s) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (B_{2m} \bar{Q}_{2m}(s) \cos m\theta &+ B_{2m}' \bar{Q}_{2m}'(s) \\ & \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} B_{3m}^*(\theta) \bar{Q}_{1m}^*(s) &= B_{30} \bar{Q}_{10}(s) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (B_{3m} \bar{Q}_{1m}(s) \cos m\theta &+ B_{3m}' \bar{Q}_{1m}'(s) \\ & \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} B_{4m}^*(\theta) \bar{Q}_{2m}^*(s) &= B_{40} \bar{Q}_{20}(s) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (B_{4m} \bar{Q}_{2m}(s) \cos m\theta &+ B_{4m}' \bar{Q}_{2m}'(s) \\ & \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} C_{1m}^*(\theta) \bar{Q}_{1m}^*(s) &= C_{10} \bar{Q}_{10}(s) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{1m} \bar{Q}_{1m}(s) \cos m\theta &+ C_{1m}' \bar{Q}_{1m}'(s) \\ & \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m}^*(\theta) \bar{Q}_{2m}^*(s) &= C_{20} \bar{Q}_{20}(s) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{2m} \bar{Q}_{2m}(s) \cos m\theta &+ C_{2m}' \bar{Q}_{2m}'(s) \\ & \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} C_{3m}^*(\theta) \bar{Q}_{1m}^*(s) &= C_{30} \bar{Q}_{10}(s) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{3m} \bar{Q}_{1m}(s) \cos m\theta &+ C_{3m}' \bar{Q}_{1m}'(s) \\ & \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} C_{4m}^*(\theta) \bar{Q}_{2m}^*(s) &= C_{40} \bar{Q}_{20}(s) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{4m} \bar{Q}_{2m}(s) \cos m\theta &+ C_{4m}' \bar{Q}_{2m}'(s) \\ & \sin m\theta) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

ここで、 $A_{i0}, A_{im}, A_{im}', B_{i0}, B_{im}, B_{im}', C_{i0}, C_{im}, C_{im}' (i=1, 2, 3, 4)$ は定数である。

式 (13) を式 (11) に代入して得られる式が、 θ に無関係に成立するためには、次に示す関係が成立しなければならない。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} & \{A_{1m} p + A_{2m} q\} \bar{\psi}^*(s) + \{B_{1m} \bar{\psi}(s) \\ & - C_{1m} \bar{\phi}(s)\} s \bar{Q}_{1m}(s) + \{B_{2m} \bar{\psi}(s) \\ & - C_{2m} \bar{\phi}(s)\} s \bar{Q}_{2m}(s) = 0 \\ & \{A_{3m} p + A_{4m} q\} \bar{\psi}^*(s) + \{B_{3m} \bar{\psi}(s) \\ & - C_{3m} \bar{\phi}(s)\} s \bar{Q}_{1m}(s) + \{B_{4m} \bar{\psi}(s) \\ & - C_{4m} \bar{\phi}(s)\} s \bar{Q}_{2m}(s) = 0 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (m=0, 1, \dots, \infty) \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} & \{A_{1m}' p + A_{2m}' q\} \bar{\psi}^*(s) \\ & + \{B_{1m}' \bar{\psi}(s) - C_{1m}' \bar{\phi}(s)\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & s\bar{Q}_{1m}'(s) + \{B_{2m}'\bar{\psi}(s) \\ & - C_{2m}'\bar{\phi}(s)\} s\bar{Q}_{2m}'(s) = 0 \\ & \{A_{3m}'p + A_{4m}'q\} \bar{\psi}^*(s) \\ & + \{B_{3m}'\bar{\psi}(s) - C_{3m}'\bar{\phi}(s)\} \\ & s\bar{Q}_{1m}'(s) + \{B_{4m}'\bar{\psi}(s) \\ & - C_{4m}'\bar{\phi}(s)\} s\bar{Q}_{2m}'(s) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (m=1, 2, \\ & \dots, \infty) \end{aligned} \quad (15)$$

式 (14) を解いて $\bar{Q}_{1m}(s)$, $\bar{Q}_{2m}(s)$ を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \bar{Q}_{1m}(s) \\ & = \frac{\{X_{4m}\bar{\psi}(s) + X_{5m}\bar{\phi}(s)\} \bar{\psi}^*(s)}{X_{1m}\{\bar{\psi}(s)\}^2 + X_{2m}\bar{\psi}(s)\bar{\phi}(s) + X_{3m}\{\bar{\phi}(s)\}^2} \\ & \cdot \frac{1}{s} \\ & \bar{Q}_{2m}(s) \\ & = \frac{\{X_{6m}\bar{\psi}(s) + X_{7m}\bar{\phi}(s)\} \bar{\psi}^*(s)}{X_{1m}\{\bar{\psi}(s)\}^2 + X_{2m}\bar{\psi}(s)\bar{\phi}(s) + X_{3m}\{\bar{\phi}(s)\}^2} \\ & \cdot \frac{1}{s} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (m=0, 1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} & X_{1m} = B_{1m}B_{4m} - B_{2m}B_{3m}, \\ & X_{2m} = B_{2m}C_{3m} + B_{3m}C_{2m} - B_{1m}C_{4m} - B_{4m}C_{1m}, \\ & X_{3m} = C_{1m}C_{4m} - C_{2m}C_{3m}, \\ & X_{4m} = (A_{3m}B_{2m} - A_{1m}B_{4m})p + (A_{4m}B_{2m} \\ & - A_{2m}B_{4m})q \\ & X_{5m} = (A_{1m}C_{4m} - A_{3m}C_{2m})p + (A_{2m}C_{4m} \\ & - A_{4m}C_{2m})q \\ & X_{6m} = (A_{1m}B_{3m} - A_{3m}B_{1m})p + (A_{2m}B_{3m} \\ & - A_{4m}B_{1m})q \\ & X_{7m} = (A_{3m}C_{1m} - A_{1m}C_{3m})p + (A_{4m}C_{1m} \\ & - A_{2m}C_{3m})q \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$\bar{Q}_{1m}'(s)$, $\bar{Q}_{2m}'(s)$ も式 (15) を解いて、式 (16) と同様な形で与えられる。そして、これらの Laplace 逆変換を求めれば、覆工に作用する圧力の経時変化は形式的に求められたことになる。

次に、地山のクリープ関数について考えてみよう。なお、本研究においては、地山構成材料の体積ひずみに起因するクリープはせん断変形に対するクリープと一意的な関係があると仮定しているのせん断変形に対するクリープ関数のみを考えることにする。

地山構成材料のクリープ変形は、応力レベルがあまり高くない場合は、時間とともにある一定値に落ち着くものと考えられる。したがって、最も簡単には、

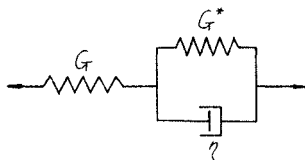


図-2 地山構成材料のレオロジーモデル

せん断応力とせん断ひずみの間の関係は図-2 に示す3要素モデルによって表わすことができる。このモデルに対するクリープ関数は次式で与えられる。

$$\psi(t) = \frac{1}{2G} + \frac{1}{2G^*}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (18)$$

ここで、 G および G^* はそれぞれせん断弾性係数、遅延せん断弾性係数を表わす。また、 $\tau(= \eta/G^*)$ は遅延時間である。

次に、クリープ変形開始後ある時刻 t_0 経過したときを基準にとれば、クリープ関数は次のように与えられる。

$$\psi(t - t_0) = \frac{e^{-t_0/\tau}}{2G^*}(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}) \quad (19)$$

すでに述べた理論式は、覆工構築時を基準にして定式化されているので、地山の初期応力による素掘トンネルの変位は、トンネル掘削後覆工を施すまでの時間 t_0 の間に生ずる変位を差し引いて考えなければならず、したがって、この場合のクリープ関数は式 (19) を考慮して、次のように表わすことができる。

$$\psi^*(t) = \frac{e^{-t_0/\tau}}{2G^*}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (20)$$

一方、覆工の構成材料のクリープ変形は、地山のそれと比較して非常に小さいと仮定する。すなわち、覆工は弾性体と考える。したがって、覆工材料のクリープ関数は次のように与えることにする。

$$\phi(t) = 1/2 G_I \quad (21)$$

式 (18)、式 (20) および式 (21) をそれぞれ Laplace 変換し、式 (16) に代入すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \bar{Q}_{1m}(s) = \frac{f_{3m}s + f_{4m}}{s(s^2 + 2f_{1m}s + f_{2m})}, \\ & \bar{Q}_{2m}(s) = \frac{f_{5m}s + f_{6m}}{s(s^2 + 2f_{1m}s + f_{2m})} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} & f_{1m} = \frac{2G_I^2(G + G^*)X_{1m} + GG_I}{2G^*\tau(G_I^2X_{1m} + GG_I X_{2m} + G^2X_{3m})} \\ & \quad \cdot \frac{G_I^2(G + G^*)X_{1m} + GG^*G_I}{(G + G^*)X_{2m} + G^2G^*X_{3m}} \\ & f_{2m} = \frac{G_I^2(G + G^*)X_{1m} + GG^*G_I}{G^*\tau^2(G_I^2X_{1m} + GG_I X_{2m} + G^2X_{3m})} \\ & \quad \cdot \frac{e^{-t_0/\tau}GG_I(G_I X_{4m} + GX_{5m})}{G^*\tau(G_I^2X_{1m} + GG_I X_{2m} + G^2X_{3m})} \\ & f_{3m} = \frac{e^{-t_0/\tau}\{GG_I^2(G + G^*)X_{4m} + G^2G^*G_I X_{5m}\}}{G^*\tau^2(G_I^2X_{1m} + GG_I X_{2m} + G^2X_{3m})} \\ & f_{4m} = \frac{e^{-t_0/\tau}GG_I(G_I X_{6m} + GX_{7m})}{G^*\tau(G_I^2X_{1m} + GG_I X_{2m} + G^2X_{3m})} \\ & f_{5m} = \frac{e^{-t_0/\tau}\{GG_I^2(G + G^*)X_{6m} + G^2G^*G_I X_{7m}\}}{G^*\tau^2(G_I^2X_{1m} + GG_I X_{2m} + G^2X_{3m})} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式 (22) の Laplace 逆変換を求めると、次のようにな

る。

$f_{1m}^2 > f_{2m}$ の場合

$$Q_{1m}(t) = \frac{f_{4m}}{f_{2m}} + \frac{f_{4m} + f_{3m}(f_{1m} + \sqrt{f_{1m}^2 - f_{2m}})}{2\sqrt{f_{1m}^2 - f_{2m}}(f_{1m} + \sqrt{f_{1m}^2 - f_{2m}})} \cdot e^{-(f_{1m} + \sqrt{f_{1m}^2 - f_{2m}})t} - \frac{f_{4m} - f_{3m}(f_{1m} - \sqrt{f_{1m}^2 - f_{2m}})}{2\sqrt{f_{1m}^2 - f_{2m}}(f_{1m} - \sqrt{f_{1m}^2 - f_{2m}})} \cdot e^{-(f_{1m} - \sqrt{f_{1m}^2 - f_{2m}})t}$$

$f_{1m}^2 < f_{2m}$ の場合

$$Q_{1m}(t) = \frac{f_{4m}}{f_{2m}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{f_{2m} - f_{1m}^2}}{\sqrt{f_{2m} - f_{1m}^2}} e^{-f_{1m}t} \cdot \sin(\sqrt{f_{2m} - f_{1m}^2}t + \phi) \right\} + \frac{f_{3m}}{\sqrt{f_{2m} - f_{1m}^2}} e^{-f_{1m}t} \sin \sqrt{f_{2m} - f_{1m}^2}t, \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{f_{2m} - f_{1m}^2}}{f_{1m}} \right)$$

$f_{1m}^2 = f_{2m}$ の場合

$$Q_{1m}(t) = \frac{f_{4m}}{f_{2m}} + \left\{ \left(f_{3m} - \frac{f_{4m}}{f_{1m}} \right) t - \frac{f_{4m}}{f_{2m}} \right\} \cdot e^{-f_{1m}t}$$

.....(24)

$Q_{2m}(t)$ は式 (24) の f_{3m} , f_{4m} をそれぞれ f_{5m} , f_{6m} で置き換えることによって得られる。

いま、材料定数は正数であり、 X_{1m} , X_{2m} および X_{3m} も一般的には正数と考えられるので、式 (23) から f_{1m} は正数である。したがって、式 (24) において $t \rightarrow \infty$ とすれば、 $Q_{1m}(t)$ はいかなる場合にも、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_{1m}(t) = \frac{f_{4m}}{f_{2m}} \left. \begin{aligned} & e^{-t/\tau} G G_I \{ G_I (G + G^*) \\ & \quad \cdot X_{4m} + G G^* X_{5m} \} \\ & = \frac{G_I^2 (G + G^*)^2 X_{1m} + G G^* G_I \\ & \quad \cdot (G + G^*) X_{2m} + G^2 G^* X_{3m}}{G_I^2 (G + G^*)^2 X_{1m} + G G^* G_I \\ & \quad \cdot (G + G^*) X_{2m} + G^2 G^* X_{3m}} \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

にそれぞれ収束する。

一方、 $Q_{1m}'(t)$, $Q_{2m}'(t)$ についても、式 (14) と式 (15) を比較することにより、式 (24) とまったく同型の解を得ることがわかる。そして、さらに $t \rightarrow \infty$ において、式 (25) に相当する有限値に収束する。

4. 弾性論的考察

ここでは、時間に依存する地山の力学的性質を基にし

て、トンネル覆工に作用する圧力を弾性論的に考察してみよう。

一般に、トンネル掘削後覆工を施すまでの時間が長いほど、覆工に作用する圧力は減少する。これは、いいかえれば、覆工を施すまでの時間が長いほど、地山の見かけの剛性が増加したと考えることができる。したがって、地山の初期応力によるトンネル内壁の変位の計算においては、地山のみかけのせん断弾性係数を G_g' とし、覆工の構築により、地山を拘束するときの変位の計算におけるそのせん断弾性係数 G_g と、区別しなければならない。一方、覆工のせん断弾性係数は G_l とする。

上に述べたせん断弾性係数を用いれば、初期応力 p , q の作用する地山のトンネル内壁 ($r=b(\theta)$) における垂直および接線方向の変位は式 (6) と同様にして、それぞれ次のように表わされる。

$$u_g(\theta) = \frac{1}{2G_g'} (A_1(\theta)p + A_2(\theta)q) + \frac{1}{2G_g} \left[\int_0^{2\pi} B_1^*(\theta; \varphi) \sigma_0(\varphi) b(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} B_2^*(\theta; \varphi) \cdot \tau_0(\varphi) b(\varphi) d\varphi \right] \\ v_g(\theta) = \frac{1}{2G_g'} (A_3(\theta)p + A_4(\theta)q) + \frac{1}{2G_g} \left[\int_0^{2\pi} B_3^*(\theta; \varphi) \sigma_0(\varphi) b(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} B_4^*(\theta; \varphi) \cdot \tau_0(\varphi) b(\varphi) d\varphi \right] \dots (26)$$

ここで、 $\sigma_0(\varphi)$, $\tau_0(\varphi)$ はそれぞれ覆工に作用する垂直およびせん断応力であり、 $A_i(\theta)$, $B_i^*(\theta; \varphi)$ ($i=1, 2, 3, 4$) はすべて式 (6) におけるものと等しい。

一方、覆工の外側 ($r=b(\theta)$) における垂直および接線方向の変位は、式 (7) と同様にして、それぞれ次のように表わされる。

$$u_l(\theta) = \frac{1}{2G_l} \left[\int_0^{2\pi} C_1^*(\theta; \varphi) \sigma_0(\varphi) b(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} C_2^*(\theta; \varphi) \tau_0(\varphi) b(\varphi) d\varphi \right] \\ v_l(\theta) = \frac{1}{2G_l} \left[\int_0^{2\pi} C_3^*(\theta; \varphi) \sigma_0(\varphi) b(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} C_4^*(\theta; \varphi) \tau_0(\varphi) b(\varphi) d\varphi \right] \dots (27)$$

ここで、 $C_i^*(\theta; \varphi)$ ($i=1, 2, 3, 4$) はすべて式 (7) におけるものと同じである。

覆工に作用する応力 $\sigma_0(\varphi)$, $\tau_0(\varphi)$ は一般性を失うことなく次のように表わすことができる。

$$\sigma_0(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1m}^* D_{1m}(\varphi) \\ \tau_0(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m}^* D_{2m}(\varphi) \dots (28)$$

ここで、 $D_{1m}(\varphi)$ 、 $D_{2m}(\varphi)$ は φ の関数で、式 (8) におけるものと等しいとする。また、 α_{1m}^* 、 α_{2m}^* は定数である。

地山と覆工との境界における変位の適合条件は、

$$u_g(\theta) = u_l(\theta), \quad v_g(\theta) = v_l(\theta) \dots \dots \dots (29)$$

であり、したがって、式 (26) および式 (27) から、式 (28) を考慮して、次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{G_g'} \{A_1(\theta)p + A_2(\theta)q\} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_{1m}^*(\theta)}{G_g} - \frac{C_{1m}^*(\theta)}{G_l} \right\} \alpha_{1m}^* \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_{2m}^*(\theta)}{G_g} - \frac{C_{2m}^*(\theta)}{G_l} \right\} \alpha_{2m}^* = 0 \\ & \frac{1}{G_g'} \{A_3(\theta)p + A_4(\theta)q\} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_{3m}^*(\theta)}{G_g} - \frac{C_{3m}^*(\theta)}{G_l} \right\} \alpha_{1m}^* \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_{4m}^*(\theta)}{G_g} - \frac{C_{4m}^*(\theta)}{G_l} \right\} \alpha_{2m}^* = 0 \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

ここで、 $B_{im}^*(\theta)$ 、 $C_{im}^*(\theta)$ ($i=1, 2, 3, 4$) はすべて式 (12) に定義した θ に関する関数である。

なお、 θ に関する関数はすべて周期 2π であるから、式 (13) と同様に、一般性を失うことなく次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} A_i(\theta) &= A_{i0} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{im} \cos m\theta + A_{im}' \sin m\theta) \\ & \quad (i=1, 2, 3, 4) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1m}^* B_{1m}^*(\theta) &= \alpha_{10} B_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{1m} B_{1m} \cos m\theta \\ & \quad + \alpha_{1m}' B_{1m}' \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m}^* B_{2m}^*(\theta) &= \alpha_{20} B_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{2m} B_{2m} \cos m\theta \\ & \quad + \alpha_{2m}' B_{2m}' \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1m}^* B_{3m}^*(\theta) &= \alpha_{10} B_{30} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{1m} B_{3m} \cos m\theta \\ & \quad + \alpha_{1m}' B_{3m}' \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m}^* B_{4m}^*(\theta) &= \alpha_{20} B_{40} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{2m} B_{4m} \cos m\theta \\ & \quad + \alpha_{2m}' B_{4m}' \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1m}^* C_{1m}^*(\theta) &= \alpha_{10} C_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{1m} C_{1m} \cos m\theta \\ & \quad + \alpha_{1m}' C_{1m}' \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m}^* C_{2m}^*(\theta) &= \alpha_{20} C_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{2m} C_{2m} \cos m\theta \\ & \quad + \alpha_{2m}' C_{2m}' \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1m}^* C_{3m}^*(\theta) &= \alpha_{10} C_{30} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{1m} C_{3m} \cos m\theta \\ & \quad + \alpha_{1m}' C_{3m}' \sin m\theta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m}^* C_{4m}^*(\theta) &= \alpha_{20} C_{40} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{2m} C_{4m} \cos m\theta \\ & \quad + \alpha_{2m}' C_{4m}' \sin m\theta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

ここで、 A_{i0} 、 A_{im} 、 A_{im}' 、 B_{i0} 、 B_{im} 、 B_{im}' 、 C_{i0} 、 C_{im} 、

C_{im}' ($i=1, 2, 3, 4$) は、すべて、式 (13) におけるものと同じ定数であり、さらに、 α_{10} 、 α_{20} 、 α_{im} 、 α_{im}' ($i=1, 2$) も定数である。

式 (31) を式 (30) に代入して得られる式が、 θ に無関係に成立するためには、次に示す関係が成立しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{G_g'} (A_{1m}p + A_{2m}q) + \left(\frac{B_{1m}}{G_g} - \frac{C_{1m}}{G_l} \right) \alpha_{1m} \\ & + \left(\frac{B_{2m}}{G_g} - \frac{C_{2m}}{G_l} \right) \alpha_{2m} = 0 \\ & \frac{1}{G_g'} (A_{3m}p + A_{4m}q) + \left(\frac{B_{3m}}{G_g} - \frac{C_{3m}}{G_l} \right) \alpha_{1m} \\ & + \left(\frac{B_{4m}}{G_g} - \frac{C_{4m}}{G_l} \right) \alpha_{2m} = 0 \\ & (m=0, 1, 2, \dots, \infty) \dots \dots \dots (32) \\ & \frac{1}{G_g'} (A_{1m}'p + A_{2m}'q) + \left(\frac{B_{1m}'}{G_g} - \frac{C_{1m}'}{G_l} \right) \alpha_{1m}' \\ & + \left(\frac{B_{2m}'}{G_g} - \frac{C_{2m}'}{G_l} \right) \alpha_{2m}' = 0 \\ & \frac{1}{G_g'} (A_{3m}'p + A_{4m}'q) + \left(\frac{B_{3m}'}{G_g} - \frac{C_{3m}'}{G_l} \right) \alpha_{1m}' \\ & + \left(\frac{B_{4m}'}{G_g} - \frac{C_{4m}'}{G_l} \right) \alpha_{2m}' = 0 \\ & (m=1, 2, \dots, \infty) \dots \dots \dots (33) \end{aligned} \right\}$$

式 (32) を解いて α_{1m} 、 α_{2m} を求めることができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1m} &= \frac{G_g G_l (G_l X_{4m} + G_g X_{5m})}{G_g' (G_l^2 X_{1m} + G_g G_l X_{2m} + G_g^2 X_{3m})} \\ \alpha_{2m} &= \frac{G_g G_l (G_l X_{6m} + G_g X_{7m})}{G_g' (G_l^2 X_{1m} + G_g G_l X_{2m} + G_g^2 X_{3m})} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

ここで、 X_{im} ($i=1, 2, \dots, 7$) は式 (17) に示す値である。また、 α_{1m}' 、 α_{2m}' は式 (33) から求めることができる。

いま、 G_g' 、 G_g の代りにそれぞれ $G^*/e^{-t_0/t}$ および $GG^*/(G+G^*)$ を用いれば、式 (34) は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1m} &= \frac{e^{-t_0/t} G G_l \{G_l (G+G^*) X_{4m} + GG^* X_{5m}\}}{G_l^2 (G+G^*)^2 X_{1m} + GG^* G_l \cdot (G+G^*) X_{2m} + G^2 G^2 X_{3m}} \\ \alpha_{2m} &= \frac{e^{-t_0/t} G G_l \{G_l (G+G^*) X_{6m} + GG^* X_{7m}\}}{G_l^2 (G+G^*)^2 X_{1m} + GG^* G_l \cdot (G+G^*) X_{2m} + G^2 G^2 X_{3m}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

5. 覆工に作用する圧力の近似計算法の提案

以上、覆工に作用する圧力に関して、粘弾性論的および弾性論的に考察を加えたが、その結果によれば、式 (35) に示す α_{1m} 、 α_{2m} はそれぞれ式 (25) に示す $Q_{1m}(t)$ 、 $Q_{2m}(t)$ の $t \rightarrow \infty$ の収束値と一致している。また、この

場合 α_{1m}' , α_{2m}' についても、同様に $Q_{1m}'(t)$, $Q_{2m}'(t)$ の収束値と一致することは容易に理解できる。したがって、式 (13) の両辺を Laplace 逆変換した式と式 (31) との比較を行えば、明らかに、 $Q_{1m}^*(t)$, $Q_{2m}^*(t)$ の $t \rightarrow \infty$ とした値は α_{1m}^* , α_{2m}^* と同一であることがわかる。このことから、式 (8) と式 (28) との比較において、覆工に作用する圧力 $\sigma_0(\varphi, t)$, $\tau_0(\varphi, t)$ の $t \rightarrow \infty$ における収束値は、式 (28) の $\sigma_0(\varphi)$, $\tau_0(\varphi)$ に等しいことがわかる。

したがって、覆工に作用する圧力の終局値の計算法として、前節に述べた弾性論的な方法が考えられる。すなわち、覆工に作用する圧力は、地山と覆工との境界における変位の適合条件式

$$u_l = u_{\theta}^{\textcircled{1}} + u_{\theta}^{\textcircled{2}} \dots \dots \dots (36)$$

から求めることができるが、この場合、地山の初期応力によるトンネル内壁の変位 $u_{\theta}^{\textcircled{1}}$ の計算においては、地山のみかけのせん断弾性係数を $G^*/e^{-t/\tau}$ とし、覆工からの圧力によって生ずる地山の変位 $u_{\theta}^{\textcircled{2}}$ の計算においては、地山のみかけのせん断弾性係数を $GG^*/(G+G^*)$ とし、さらに、覆工の変位 u_l は覆工材料のせん断弾性係数を G_l として計算する。なお、初期応力による地山の変位としては、地山の初期ひずみに起因する変位を差し引いた、トンネル掘削による変位のみについて考えなければならない。ここで、 G は地山材料のせん断弾性係数、 G^* はその遅延せん断弾性係数、 τ は遅延時間を表わす。また、 t_0 はトンネル掘削後覆工を施すまでの時間である。

この方法によれば、任意形状のトンネル覆工に作用する圧力を、時間を考慮することなく、弾性学と類似の手法によって容易に求めることができる。なお、この手法はトンネル以外の地中構造物に対しても適用できるものである。次節に、この方法による計算例を示す。

6. 円形トンネル覆工に作用する圧力

平面ひずみ状態における応力および変位は極座標 (r , θ) において次のように表わされる (図-3 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_{\theta} &= 2\{\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})\} \\ \sigma_{\theta} - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{i\theta}\{\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)\} \\ 2G(u_r + iv_{\theta}) &= e^{-i\theta}\{\kappa\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{z}'(\bar{z})\} \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

ここで、 $\psi(z)$, $\chi(z)$ ($z=re^{i\theta}$, $i=\sqrt{-1}$) は複素応力関数であり、 $\bar{\psi}(\bar{z})$, $\bar{z}(\bar{z})$ はそれぞれの共役関数である。また dash は微分を表わす。 κ はポアソン比を ν とするとき、 $\kappa=3-4\nu$ となる。 G はせん断弾性係数である。ただし、ここで応力は圧縮を正とする。

(1) 初期応力による地山の応力および変位

初期応力の作用するトンネル掘削前の地山の応力および変位は次の複素応力関数によって求められる。

$$\psi(z) = Az, \quad \chi(z) = Bz^2 \dots \dots \dots (38)$$

一方、地山の初期応力が円形トンネルの無限遠方に作用する場合は、次の複素応力関数によって応力および変位が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= M \log z + Az + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} z^{-n} \\ \chi(z) &= Nz \log z + K \log z + Bz^2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B_{-n} z^{-n} \end{aligned} \right\} \dots \dots (39)$$

ここで、 $A, B, M, N, K, A_{-n}, B_{-n}$ は境界条件により求まる複素定数である。

したがって、トンネル掘削によって生ずる地山の応力および変位は、式 (39) によって求まる値から、式 (38) による値を差し引いて求めることができる。いま、図-

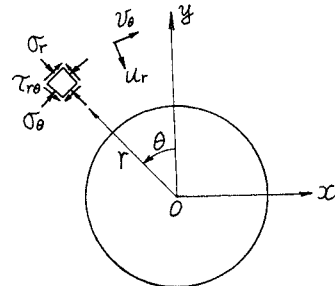
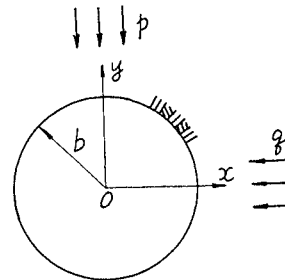
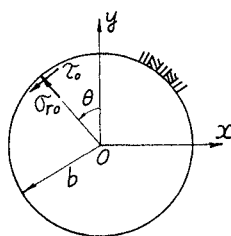


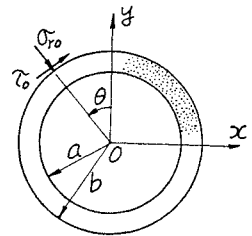
図-3 座標および符号の規約



(a) トンネルに作用する初期応力



(b) 覆工から地山に作用する圧力



(c) 覆工に作用する圧力

図-4 解析手順説明図

4 (a)に示すように、 p, q なる初期応力が無限遠に作用し、トンネル内壁で $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ なる境界条件を考慮する。そして、さらに覆工を施したときを基準にすれば、トンネル掘削による変位は、地山のみかけのせん断弾性係数を $G^*/e^{-t_0/\tau}$ として、次のように表わされる。ここで t_0 は掘削後覆工を施すまでの時間、 b はトンネルの半径である。

$$\left. \begin{aligned} u_r^\theta &= \frac{e^{-t_0/\tau}}{4G^*} \left[\frac{b^2}{r} (p+q) + (q-p) \left\{ \frac{b^4}{r^3} - \frac{(1+\kappa)b^2}{r} \right\} \cos 2\theta \right] \\ v_\theta^\theta &= \frac{e^{-t_0/\tau}(q-p)}{4G^*} \left\{ \frac{b^4}{r^3} - \frac{(1-\kappa)b^2}{r} \right\} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

(2) 覆工からの圧力によって生ずる地山の応力および変位

覆工による地山の拘束によって生ずる地山の応力および変位は、図-4 (b) に示すような、覆工と地山の境界に発生する垂直およびせん断応力 ($\sigma_{r0}(\theta), \tau_{0}(\theta)$) を考慮して、次に示す複素応力関数により求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= M^* \log z + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n}^* z^{-n} \\ \chi(z) &= N^* z \log z + K^* \log z + \sum_{n=1}^{\infty} B_{-n}^* z^{-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots(41)$$

ここで、 $M^*, N^*, K^*, A_{-n}^*, B_{-n}^*$ は境界条件によって求まる複素定数である。

この場合の変位は、式 (41) を式 (37) の第3式に代入して次のように求められる。なお、前節において説明したように、見かけのせん断弾性係数 $GG^*/(G+G^*)$ を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r^\theta &= \frac{G+G^*}{2GG^*} \left[\sum_{n=3}^{\infty} \{ (n+\kappa-1) A_{-n+1}^* r^{-n+1} + n B_{-n}^* r^{-n-1} \} \cos n\theta + \{ (\kappa+1) A_{-1}^* r^{-1} + 2 B_{-2}^* r^{-3} \} \cos 2\theta + \{ (\kappa \log r + i \kappa \theta - 1) M^* + (\log r - i \theta + 1) N^* + B_{-1} r^{-2} \} \cos \theta - \kappa r^{-1} \right] \\ \bar{v}_\theta^\theta &= \frac{G+G^*}{2GG^*} \left[\sum_{n=3}^{\infty} \{ (n-\kappa-1) A_{-n+1}^* r^{-n+1} + n B_{-n}^* r^{-n-1} \} \sin n\theta + \{ (-\kappa+1) A_{-1}^* r^{-1} + 2 B_{-2}^* r^{-3} \} \sin 2\theta + \{ (-\kappa \log r - i \kappa \theta - 1) M^* - (\log r - i \theta + 1) N^* + B_{-1} r^{-2} \} \sin \theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

(3) 覆工の応力および変位

覆工の外周に図-4 (c) に示すような垂直およびせん断応力 ($\sigma_{r0}(\theta), \tau_{0}(\theta)$) が作用するときの覆工内の応力

および変位は次の複素応力関数によって求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= M^{**} \log z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{**} z^n \\ \chi(z) &= N^{**} z \log z + K^{**} \log z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{**} z^n \end{aligned} \right\} \dots(43)$$

ここで、 $M^{**}, N^{**}, K^{**}, A_n^{**}, B_n^{**}$ は境界条件によって求まる複素定数である。

したがって、この場合の変位は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^I &= \frac{1}{2G_I} \left[\sum_{n=3}^{\infty} \{ (-n+\kappa_I-1) A_{n+1}^{**} r^{n+1} + (n+\kappa_I-1) A_{-n+1}^{**} r^{-n+1} + n B_{-n}^{**} r^{-n-1} - n B_n^{**} r^{n-1} \} \cos n\theta + \{ (\kappa_I+1) A_{-1}^{**} r^{-1} + (\kappa_I-3) A_3^{**} r^3 + 2 B_{-2}^{**} r^{-3} - 2 B_2^{**} r \} \cdot \cos 2\theta + \{ (\kappa_I \log r + i \kappa_I \theta - 1) M^{**} - (\log r - i \theta + 1) N^{**} + (\kappa_I-2) A_2^{**} r^2 + \kappa_I A_0^{**} - B_1^{**} + B_{-1}^{**} r^{-2} \} \cos \theta + \{ (\kappa_I-1) A_1^{**} r - K^{**} r^{-1} \} \right] \\ v_\theta^I &= \frac{1}{2G_I} \left[\sum_{n=3}^{\infty} \{ (n+\kappa_I+1) A_{n+1}^{**} r^{n+1} + (n-\kappa_I-1) A_{-n+1}^{**} r^{-n+1} + n B_{-n}^{**} r^{-n-1} + n B_n^{**} r^{n-1} \} \sin n\theta + \{ (\kappa_I+3) A_3^{**} r^3 + (-\kappa_I+1) A_{-1}^{**} r^{-1} + 2 B_{-2}^{**} r^{-3} + 2 B_2^{**} r \} \sin 2\theta + \{ (-\kappa_I \log r - i \kappa_I \theta - 1) M^{**} + (\log r - i \theta + 1) N^{**} + (\kappa_I+2) A_2^{**} r^2 - \kappa_I A_0^{**} + B_1^{**} + B_{-1}^{**} r^{-2} \} \sin \theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

ここで、 G_I は覆工材料のせん断弾性係数、 κ_I はポアソン比を ν_I として、 $\kappa_I = 3-4\nu_I$ である。

(4) 変位の適合条件および覆工に作用する圧力

a) 覆工と地山の境界が滑らない場合

この場合は、覆工と地山の境界 ($r=b$) において、次に示す変位に関する適合条件が満足されなければならない。

$r=b$ において：

$$u_r^I = u_r^\theta + \bar{u}_r^\theta, \quad v_\theta^I = v_\theta^\theta + \bar{v}_\theta^\theta \dots\dots\dots(45)$$

式 (40), (42), (44) を式 (45) に代入し、左右の辺の $\cos n\theta, \sin n\theta$ ($n=0, 1, \dots, \infty$) の係数をそれぞれ比較することにより、複素応力関数に含まれている複素定数間に成立しなければならない条件式を得る。そして、さらに覆工内壁および地山と覆工の境界 ($r=b$) における応力に関する境界条件、

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ において: } & \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \\ r=b \text{ において: } & \sigma_r = \sigma_{r0}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(46)$$

から、複素応力関数に含まれている複素定数間の、さらに満足されなければならない条件式を得る。これらの条件式からすべての複素定数が決定できる。なお、ここで σ_{r0} および τ_0 は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r0} &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \\ \tau_0 &= \alpha_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n' \cos n\theta + \beta_n' \sin n\theta) \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

のように表わされるものとして、 $\cos n\theta, \sin n\theta$ ($n=0, 1, \dots, \infty$) の係数について考えればよい。ここで、 $\alpha_0, \alpha_0', \alpha_n, \alpha_n', \beta_n, \beta_n'$ は複素応力関数に含まれている複素定数によって表わされる。したがって、覆工に作用する圧力は、結局、次式によって求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r0} &= A + B \cos 2\theta \\ \tau_0 &= C \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots (48)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\alpha \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right\}}{2(1-\beta) + \left(\frac{b}{a} \right)^2 (\kappa_l + 2\beta - 1)} (p+q) \\ B &= \frac{R_1}{R_2 + R_3} \left[4 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 3R_4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 1 \right\} \right] (p-q) \\ C &= \frac{R_1}{R_2 + R_3} \left[2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 3R_4 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^6 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 2 \right\} \right] (p-q) \\ R_1 &= \frac{\kappa\alpha}{2} \left\{ (\kappa_l + \beta) \left(\frac{b}{a} \right)^4 + (1-\beta) \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\} \\ R_2 &= 3(1-\beta)(1+\kappa\beta) \left\{ 1 - 2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^4 \right\} \\ R_3 &= \left\{ (\kappa_l + \beta) \left(\frac{b}{a} \right)^4 + (1-\beta) \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ (\kappa\beta - \kappa_l) - (\kappa\beta + 1) \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} \\ R_4 &= \frac{(\beta-1) \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right\}}{(\kappa_l + \beta) \left(\frac{b}{a} \right)^4 - (\beta-1) \left(\frac{a}{b} \right)^2} \\ \alpha &= G_l e^{i\theta/\tau} / G^*, \quad \beta = G_l (G + G^*) / GG^*, \\ \kappa &= 3 - 4\nu, \quad \kappa_l = 3 - 4\nu_l \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

b) 覆工と地山の境界が滑る場合

この場合の変位の適合条件式は、

$$r=b \text{ において: } u_r' = u_r^\theta + \bar{u}_r^\theta \dots (50)$$

であり、また、応力に関する境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ において: } \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \\ r=b \text{ において: } \sigma_r = \sigma_{r0}, \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (51)$$

である。これらの条件から、先と同様にして、複素応力関数に含まれている複素定数がすべて決定できる。そして、覆工に作用する圧力は次式によって求められる。

$$\sigma_{r0} = A' + B' \cos 2\theta \dots (52)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{\alpha \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right\}}{2(1-\beta) + \left(\frac{b}{a} \right)^2 (\kappa_l + 2\beta - 1)} (p+q) \\ B' &= \frac{R_1'}{R_2' + R_3'} \left[4 \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right\} + 6R_4' \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^4 \right\} \right] (p-q) \\ R_1' &= 9\kappa\alpha \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \left\{ 1 - 2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \\ R_2' &= 6 \left\{ 2 - 3 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + \beta + 3\beta\kappa - \kappa_l \right. \\ &\quad \left. - (3 + \beta + 3\beta\kappa + \kappa_l) \left(\frac{b}{a} \right)^4 \right\} \\ R_3' &= 12 \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \left\{ 1 - 2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \left\{ 2\kappa_l \right. \\ &\quad \left. - 3\beta\kappa - \beta + (\beta + 3\beta\kappa + \kappa_l + 3) \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} \\ R_4' &= \frac{2 - 3 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2}{3 \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 2 \left(\frac{b}{a} \right)^4 \right\}} \\ \alpha &= G_l e^{i\theta/\tau} / G^*, \quad \beta = G_l (G + G^*) / GG^*, \\ \kappa &= 3 - 4\nu, \quad \kappa_l = 3 - 4\nu_l \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

7. 数値計算結果とその考察

ここでは、前節において誘導した円形トンネル覆工に作用する圧力について数値計算を行なった結果を示す。

(a) Case 1

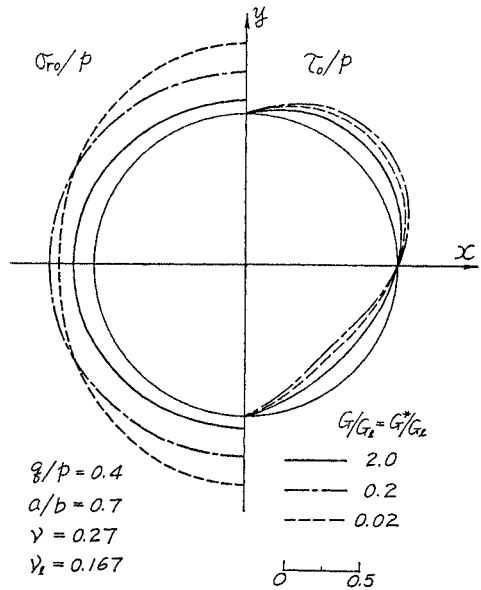


図-5 (a) 覆工に作用する圧力分布 (Case 1)

まず、図-5 (a) に覆工と地山の接触面が完全に密着している場合 (Case 1), 図-5 (b) に接触面が完全に滑る場合 (Case 2) の覆工に作用する垂直応力とせん断応力の分布を示す。これらの図から、 G_I が G および G^* に比較して小さい場合、すなわち覆工の剛性が地山のそれに比較して小さい場合は、覆工に作用する垂直応力分布が静水圧状態に近づくことがわかる。

次に、覆工の厚さの影響を調べるために、 a/b と応力との関係を示すと図-6 のようになる。こ

の図で、 a/b が 1.0 に近づくと、すなわち覆工が薄くなると、垂直応力分布は静水圧状態に近づくことがわかる。これは、 a/b が 1.0 に近づくことは覆工の剛性が小さくなることであり、したがって、先の G_I が小さい場合と結果的に同じ傾向を得るのは当然である。また、図-6 で $a/b > 0.7$ において、Case 1 の $\theta=0, \pi$ と $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ における垂直応力の大小が入れ替っている。すなわち、覆工の剛性が下ると Case 1 における垂直応力は $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ において最大値を与える。これは、最大垂直応力の発生位置が地山の初期応力としての最大主応力 p の作用方向ではなく、最小主応力 q の作

(b) Case 2

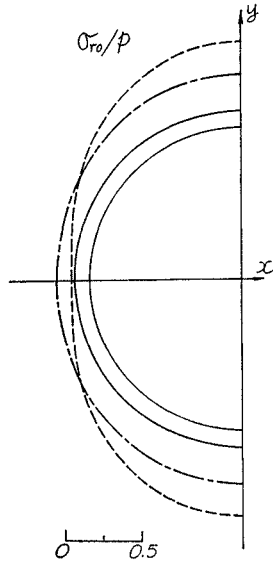


図-5 (b) 覆工に作用する圧力分布 (Case 2)

用方向であることを意味しており、興味深い結果である。

次に、筆者らの提案する解析法による結果と、従来の弾性論による解析結果とを、参考までに比較すれば、図-7 のようになる。この図において、(I) は無応力状態の弾性地山にトンネルを開削し、覆工を施して、その後地山の初期応力を荷重として作用させた場合の結果であり、(II) は (I) と同様であるが、トンネル掘削前の地山の初期ひずみは覆工圧には直接関係しないことに着目して、地山の初期応力を荷重として作用させる場合に生ずる地山のひずみから、初期ひずみを差し引いて解析した結果である。いずれにしても、(I)、(II) は

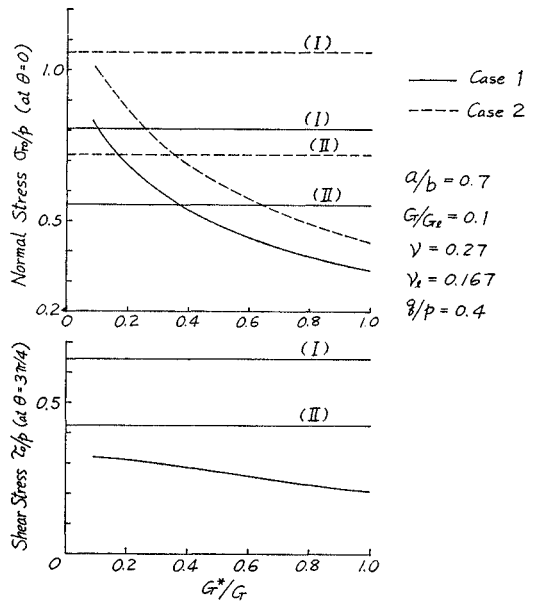


図-7 弾性論による結果との比較

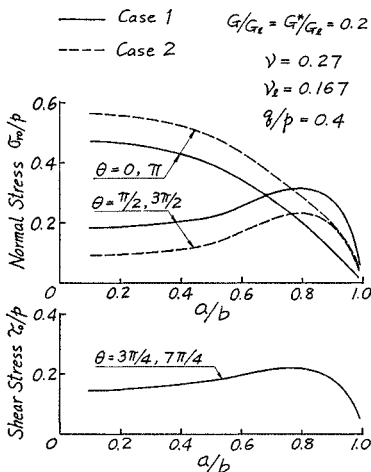


図-6 覆工厚と圧力分布との関係

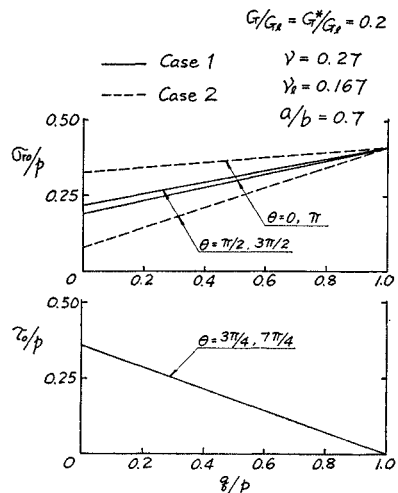


図-8 地山の初期応力と圧力分布との関係

Case 1 $a/b = 0.7 \quad \nu = 0.27$
 Case 2 $q/p = 0.4 \quad \nu_k = 0.167$

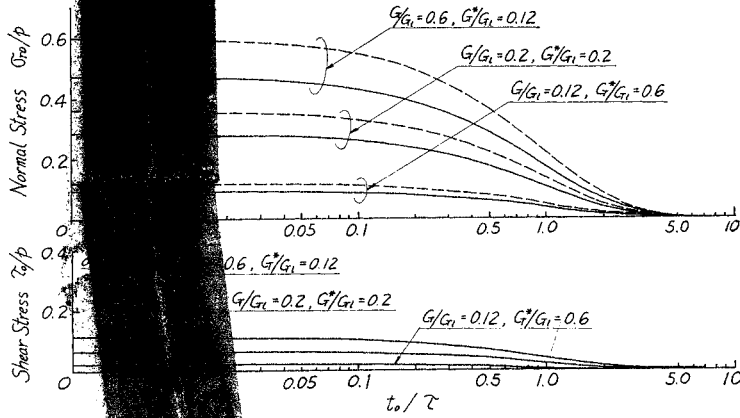


図9 覆工構築時期と圧力との関係

弾性地山に作用する圧力であり、当然、 G^* とは無関係である。しかし、掘削後に構築した覆工に圧力が作用することは、現実問題である。

粘弾性理論による地山圧力は、 $G^* \rightarrow \infty$ において、0に近づく。 $G^* \rightarrow \infty$ は地山が粘性的な性質を示さない（弾性地山）ことを意味しており、したがって、トンネル掘削後に覆工を施して、地山の弾性変形はすでに終了しているため、覆工は作用しないことになる。これは現場の経験と一致する。したがって、 $G^* \rightarrow 0$ に近づくとき、地山の粘性が増加し、作用する圧力は非常に増大する。したがって、この計算法による覆工圧は、 G^* によって大きく異なることがわかる。

なお、トンネル掘削後の時間 t_0 も、覆工圧に大きな影響を与える。図9においては $t_0 = 0$ としてある。

図8は地山の初期応力と作用する応力との関係を示したものであり、図9はトンネル掘削後覆工を施すまでの時間 t_0 と作用する応力との関係を示したものである。図9から t_0/τ が 0.1 より小さい場合は、応力はほぼ一定値を示し、 t_0/τ が 5.0 より大きくなれば覆工にはほとんど応力が作用しなくなる。あるいは、

なお、数値計算の結果、ポアソン比の影響は無視できる程度であることが確認されているので、ポアソン比が時間に無関係に一定であると仮定した本計算法の大きな誤差はないものと考えられる。

8. むすび

本論文においては、地中構造物に作用する圧力の一計算法を提案した。本計算法は施工過程の素掘り期間を考慮したものであり、地山が時間依存性の力学的性質を示す場合に適用できるものである。

地山は重ね合せ可能な線形粘弾性体と考え、弾性論的手法により、時間を考慮することなく構造物に作用する圧力の $t \rightarrow \infty$ における終局値を求めることができる。

この計算法によれば、地山の遅延せん断弾性係数 G^* が終局圧に大きな影響を与えるものであり、 $G^* \rightarrow \infty$ において覆工に圧力が作用しなくなる。また、地山掘削後構造物を築造するまでの時間 t_0 も大きな影響を与え、その構築時期を遅らせればそれだけ作用する圧力は減小する。

ここでは、円形トンネル覆工について解析を行ない、さらに数値計算結果を示したが、本計算法は任意形状の地中構造物に対しても適用可能であり、それらについての解析結果は追って報告する予定である。

最後に、本研究を行なうにあたり終始ご指導を賜った名古屋大学工学部 川本兆万教授に感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) 村山朝郎：トンネル土圧，土木学会第3回トンネル工学シンポジウム，pp. 1~16, 1966.
- 2) Dimov, I.V.: Influence of Time on the Stability of the Single Horizontal Excavations, Proc. of the 1st Cong. of the Int. Soc. of Rock Mech., Lisboa, pp. 273~278, 1966.
- 3) 桜井春輔：粘弾性地山内の円形トンネル覆工について，土木学会論文報告集，No. 181, pp. 77~89, 1970.
- 4) 村山朝郎・藤本徹：粘弾性地山の応力緩和による円形トンネルの覆工土圧，土木学会論文報告集，No. 205, pp. 93~106, 1972.
- 5) Lee, E.H.: Stress Analysis in Viscoelastic Bodies, Quart. Appl. Math., Vol. 13, No. 2, pp. 183~190, 1955.
- 6) Fung, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, p. 191, 1965.

(1973.4.7・受付)