

スプラインの非線形応力-ひずみ曲線への応用

ON AN APPLICATION OF SPLINE FUNCTION TO EXPRESSION
OF NONLINEAR STRESS-STRAIN CURVES川本 朧 万*・水島 章 次**・斉藤 敏 明***
By Toshiyazu Kawamoto, Akitsugu Mizushima and Toshiaki Saito

1. 緒 言

有限要素法などの発達により、材料非線形問題の解析が比較的容易になってきたが、その場合、材料の応力-ひずみの非線形性をいかに表示して解析に導入するかが重要な問題である。非線形な応力-ひずみ曲線を表示する方法として、通常、デジタル形式と関数形式が考えられる。前者は、実測によって与えられた応力-ひずみ曲線上の多くの点を、これらの点における応力とひずみを一対とする多くの組の形でインプットしておき、計算に必要な弾性係数やポアソン比をこれらのインプットデータから適当に内挿や微分を行なうことによって求めるものである。後者では、応力-ひずみ曲線がある数学的関数によって表わされるが、実測によって得られた材料の応力-ひずみ関係（あるいは荷重-変形関係）に最小自乗法を適用して、適当な項数の多項式で近似したり、フーリエ級数のように直交多項式で近似したり、また、双曲線や放物線形の関数を仮定して曲線近似¹⁾²⁾を行なうのが通常である。この場合、多項式近似では項数の取り方や正規方程式の係数行列の条件などによってかなり精度が落ちる恐れがあり、また、双曲線や放物線近似では解析範囲の全応力レベルにおける応力-ひずみ曲線、とくに Strain hardening や Strain softening を含むような応力-ひずみ曲線全体を一つの関数で精度よく近似することは実際上困難である。

これらに対して、近年、一つの関係曲線を多くの区間に分割して考える、いわゆる、スプライン関数 (Spline function) が利用され、非線形解析に導入されている³⁾。スプライン関数そのものの特性の研究やこの関数を利用した曲線のあてはめに関する研究は、いままで多く行な

われてきている⁴⁾⁵⁾が、この関数を有限要素解析に用いたのは Desai が初めてである。Desai は土を対象にして三軸圧縮試験によって得られた応力-ひずみ曲線をスプラインで表現して、非線形有限要素解析を行ない、Duncan らの提案した放物線近似による解析結果と比較して、スプライン近似のほうがよい結果を得ることを示している。

実測によって得られた応力-ひずみ関係の測定点と比較的スムーズな曲線上ののればよいが、一般には、測定に誤差を伴うから、測定点はスムーズな曲線の上にはならず、この場合に、多くの測定点からスムーズな曲線を求めることが問題になる。また、ある独立変数の値（たとえば応力値）に対して多くの測定値（ひずみの値）が得られているような場合には、応力-ひずみ関係としてはある幅に分散したような帯状領域のものが与えられ、これから1本の応力-ひずみ曲線を求めることが問題になる。これらの場合には、最小自乗法を適用したスプライン関数を求めることにより、もっとも確からしい応力-ひずみ曲線が数式表示されるようになるだろう。

ここでは、実測によって得られた応力-ひずみ曲線を対象として、スプライン関数による数式表示について考察する。非線形材料に対する有限要素解析を行なう場合に、前記のデジタル形式で応力-ひずみ関係をインプットしたものを用いたり、また、プロットされた測定値を通るようにスプライン定規や雲形定規でかかれた曲線を用いることはきわめて能率が悪く、したがって、有効に材料の非線形性を解析に導入するためには、実測された関係が数式表示されなければならないことになる。スプライン関数による曲線のあてはめは、一般に、多くの関係曲線に適用されるのはいうまでもないが、ここでは、応力-ひずみ曲線に対してのみ用いる場合を考える。そして、この方法を実測値に対して実際に適用する場合に生ずる問題点を検討し、その処理方法について二、三の考察を行なった。なお、スプライン関数による応力-

* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土圧研究施設

** 中部工業大学講師 電子計算機センター

*** 正会員 工博 東海大学講師 海洋学部海洋土木工学科

ひずみ曲線の表示方法のみについて述べ、その結果を有限要素解析法に適用することについてはふれない。

2. スプライン関数の概念

スプライン (Spline) とは製図で曲線を引くときに用いる自在定規のことである。曲線のあてはめに用いられるスプラインとしては次のスプライン曲線 (Cubic Spline) が一般的であって、これは与えられた測点 (節点) を通り、1次および2次の導関数が連続するように節点間を3次の曲線で近似したものである。Ahlbergら⁶⁾によるとスプライン関数はBernoulli-Eulerの法則にしたがう薄いはりと対比させて次のように説明される。いま、図-1に示すように一つの曲線 (区間 $a \leq x \leq b$) を考え、それをいくつかの節点で分割し、節点 i の座標 (x_i, y_i) は測定値よりプロットされて既知であるとす。図示の曲線を任意に曲げられた薄いはり (Spline) と考えるとき、節点 j におけるモーメント M_j はその点におけるたわみ曲線の2次導関数 $S_d''(x_j)$ より求められるが、 $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ で2次導関数 (曲率) が線形に変化すると仮定して次の関係が得られる。

$$S_d''(x) = \kappa_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + \kappa_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 κ は各節点における曲線の曲率を示す。また、 $h_j = x_j - x_{j-1}$ であり、 $S_d(x)$ はその区間におけるスプライン曲線を示す。式(1)を2回積分し、積分定数を定めることによって次式を得る。

$$S_d(x) = \kappa_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + \kappa_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{\kappa_{j-1} h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{\kappa_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \dots\dots\dots (2)$$

また、

$$S_d'(x) = -\kappa_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + \kappa_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{\kappa_j - \kappa_{j-1}}{6} h_j \dots\dots\dots (3)$$

上式をマトリックス表示すると、

$$S_d(x) = \{N\}^T \{q\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\{q\}^T = [y_{j-1}, y_j, \kappa_{j-1}, \kappa_j] \dots\dots\dots (5)$$

$$\{N\}^T = \frac{1}{6h_j} [6(x_j - x), 6(x - x_{j-1}), (x_j - x)^3 - h_j^2(x_j - x), (x - x_{j-1})^3 - h_j^2(x - x_{j-1})] \dots\dots\dots (6)$$

式(1)と式(2)より明らかなように、関数 $S_d(x)$ と $S_d''(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であるが、スプライン曲線の勾配 $S_d'(x)$ の節点 j における連続性より次の条

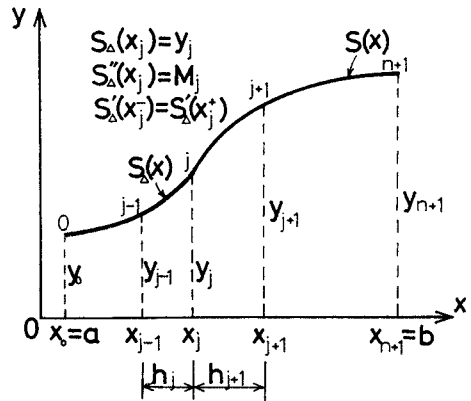


図-1 節点 j におけるスプラインの連続条件

件を生ずる。

$$S_d'(x_j^-) = S_d'(x_j^+) \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $S_d'(x)$ は式(4)より $S_d'(x) = \{N'\}^T \{q\}$ として計算されるから、式(5)、(6)の関係をを用いると次のようになる。

$$\mu_j \kappa_{j-1} + 2\kappa_j + \lambda_j \kappa_{j+1} = 6 \frac{[(y_{i+1} - y_j)/h_{j+1}] - [(y_j - y_{j-1})/h_j]}{h_j + h_{j+1}} \dots\dots\dots (8)$$

ここで $\lambda_j = h_{j+1}/(h_j + h_{j+1})$, $\mu_j = 1 - \lambda_j (j=1, 2, \dots, n)$ 。 $x_0 = a$ で $\kappa_0 = 0$, $x_{n+1} = b$ で $\kappa_{n+1} = 0$ の境界条件を仮定すると、次のように未知量 $\kappa_j (j=1, 2, \dots, n)$ に関する線形連立方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \vdots \\ \kappa_{n-2} \\ \kappa_{n-1} \\ \kappa_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

あるいは、

$$[A] \{\kappa\} = \{d\} \dots\dots\dots (10)$$

上式の右辺の $d_i (i=1, 2, \dots, n)$ は式(8)の右辺で与えられるように、節点 j およびその前後の節点における関数値より計算される。式(9)を κ_j について解くことにより、各節点の位置における関数の2次導関数 $S_d''(x_j) = \kappa_j$ が求められるから、それらの値を、式(2)に用いることにより、区間 $[a, b]$ でのスプライン関数が確定される。なお、分割が等間隔の場合には式(9)中の $\lambda_j = \mu_j = 1/2$ となる。応力-ひずみ曲線に対しては、上記の各式で、変数 x をひずみ ϵ に、関数値 y を応力 σ にとって考えればよい。その場合、変形係数は $S'(\epsilon)$ で与えられる。

程式が得られる。

$$\{[\tilde{N}_1]_i + [\tilde{N}_n]_i [B]\} \{y\} = f(x^{(i)}) \dots \dots (20)$$

$$(i=0, 1, 2, \dots, r)$$

上式で $[\tilde{N}_1]_i$ および $[\tilde{N}_n]_i$ はいずれも変数 $x^{(i)}$ が属する節点間隔に対する $[\tilde{N}_1]$, $[\tilde{N}_n]$ である。式 (20) の観測方程式に最小自乗法を適用して正規化すると、 y_j ($j=0, 1, 2, \dots, n+1$) を未知数とする正規方程式が次のように得られる。

$$\begin{pmatrix} t_{0,0} & t_{0,1} & \dots & t_{0,n} & t_{0,n+1} \\ t_{1,0} & t_{1,1} & \dots & t_{1,n} & t_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n,0} & t_{n,1} & \dots & t_{n,n} & t_{n,n+1} \\ t_{n+1,0} & t_{n+1,1} & \dots & t_{n+1,n} & t_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ g_{n+1} \end{pmatrix} \dots \dots (21)$$

上式の $t_{i,m}$ および g_i は、いずれも測定値 ($x^{(i)}$, $f(x^{(i)})$) および節点 x_j などのデータから求められるが、等間隔な節点で分割したスプライン曲線に対しては文献7) によって求められている。式 (21) の係数行列は対角要素がもっとも大きく、それから離れるほど小さくなるので、 y_i は精度よく計算される。なお、係数行列および定数項の各要素はスプラインの節点の数と位置の関数であるから、それらの取り方によって解 y_j の値、したがってスプライン関数に変化する。

4. 数値計算例および考察

上に述べた方法によって、与えられた任意の曲線を各節点におけるデータのみによって表現することができ、また、分散したデータについても、これからもっとも確からしい曲線を得ることができる。しかし、実際にこの方法を適用する場合、種々の注意すべき点がある。ここでは数値計算例を用いながら、これらの問題点について検討した。

分散したデータに対する計算例としては、豊浦標準砂の三軸圧縮試験によって得られた応力-ひずみ関係を用い、スプライン関数の適用について種々考察するとともに、その適用の改良法について後述する。しかし、まず、単純なデータから得られるスプライン曲線の特性について把握するため、図-3 に示すような4種類のなめらかな応力-ひずみ曲線について考えた。図中の曲線は、いずれも ϵ_1 軸について 1.0% の間隔で節点を取り、その節点の座標 (応力値) をデータとして与えて求められたスプライン曲線である。図からわかるように、曲線 2, 3 では、ほぼ所定のなめらかな曲線がかかれるが、曲線 1 と 4 のように、曲線の勾配が急激に変化し、そのために曲線に沿う節点間隔に著しい不同があるところでは、曲線にゆらぎが生じてくる。そこで、曲線 1 の場合

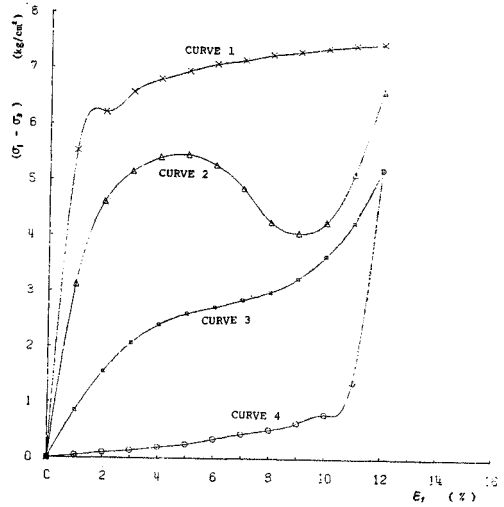


図-3 等間隔節点を用いたスプライン曲線の特性

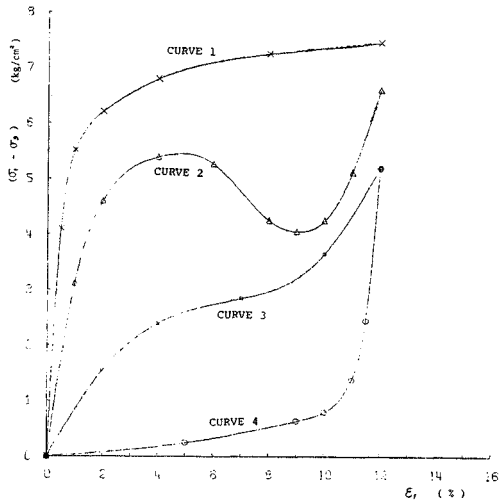


図-4 図形特性を表示するような不等間節点を用いた場合のスプライン曲線

には $\epsilon=0.5\%$ 、また、曲線 4 の場合には $\epsilon=11.5\%$ と曲線の値が大きく変化するところ (曲線に沿う節点間隔が大きいところ) にもう一点節点 (データ点) を加え、さらに、逆に変化の少ないところでは節点を省略してスプライン曲線をあてはめると、それぞれ、図-4 の曲線ようになる。なお、図中の曲線 2 と 3 は図-3 に示したそれぞれの曲線をできるだけ少ない節点で表現したものである。曲線 1 と 4 は図-4 に示すように節点を選ぶことによって、節点数は少なくとも十分なめらかな曲線を近似することができる。曲線 2, 3 についても、曲線の特徴を表現できる点を節点にとることによって、かなり少ない節点で曲線を表現するスプライン関数を定めることができる。

以上の結果より、節点の取り方により曲線が正しく近

似されない場合があるので、曲線の勾配が急激に変化するような場合には、節点を細かい間隔で設けることが必要になる。言い換えれば、スプライン曲線に沿った長さに対してほぼ等しい間隔で節点を選ぶことや、曲線の特長を良く表現しているような個所に節点を選ぶことが必要であることがわかる。

また、データの値をそのまま節点の値とするような場合、スプライン曲線は忠実に節点を通る曲線となるため、かえって曲線全体のなめらかさが失われることがある。したがって、応力-ひずみ曲線から各応力レベルでの変形係数を求めるときのように、スプライン曲線の接線を用いる場合には、このようなスプライン曲線のゆらぎに対して特に注意する必要がある。このような場合の処置については後述する。

次に、分散したデータの場合に対するスプライン曲線のあてはめの例を砂の応力-ひずみ曲線を対象にして示す。計算が比較的簡単であるという理由から、等間隔に節点を取る場合について検討した。この場合には、節点間隔を h とすれば、式 (10) の $[A]$ マトリックス、および、式 (13) の $[H]$ マトリックスは次のようになる。

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & & & & & \\ 1/2 & 2 & 1/2 & & & & 0 \\ & 1/2 & 2 & 1/2 & & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & & & 1/2 & 2 & 1/2 & \\ & & & & 1/2 & 2 & \end{pmatrix} \dots\dots(22)$$

$$[H] = \frac{3}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots(23)$$

図-5 のデータ群 1 の×印は、豊浦標準砂の三軸試験の結果のうち、 $r_d = 1.53 \text{ g/cm}^3$ で拘束圧 $\sigma_3 = 2.0 \text{ kg/cm}^2$ の場合の 4 回の実験値を示す。また、これらの測定値に対する 3 つのスプライン曲線は、節点間隔を横軸のひずみ量で 0.5%, 1.0%, 2.0% と変化させた場合のものである。このデータ群 1 では、測定回数が少なく、測定点(×印)がある分布(たとえば正規分布)にしたがっていないために、最小自乗法的に処理したスプラインでもかなりの誤差を含むと考えられる。

データ群 1 の測定点のばらつきはなんらの分布にもしたがっていないと思われるので、次に、あらかじめ与えられた曲線(図-3 の曲線 3) を仮想的な応力-ひずみ曲線とし、この曲線に対して正規乱数(標準偏差 0.2)を用いてデータを分散させて作成したデータ群 2 (図-

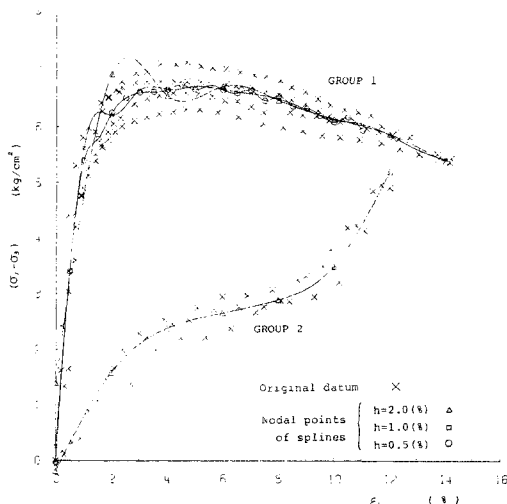


図-5 分散したデータに対するスプライン曲線におよぼす節点間隔の影響

5 の 2 群の×印) を考えて、同様にスプライン曲線をこれらのデータから最小自乗法的に求めた。それらが図-5 の 2 群の曲線であり、この場合には節点間隔として ϵ_1 で 2% にとっている。

データ群 2 の場合の結果はほぼもとの曲線を近似することができ、データが誤差を含んでいても、その分散がある分布にしたがうものであれば、ここで用いた方法によって十分に近似できることがわかる。

データ群 1 については、節点間隔 $h = 2.0\%$ の場合には、節点自身の値も大きくゆらぎ、スプラインにも当然大きなゆらぎが生じた。 $h = 1.0\%$, $h = 0.5\%$ とするにしたがって、このゆらぎは減少するが、全体としてなめらかな曲線とはならない。これはデータ自体の分布の不規則性から生じ、節点間隔を密にするだけでは解決できない問題だと思われる。また、表-1 に示すように、節点間隔を細かくとれば計算時間が極端に増えることや、間隔を密にするとその間にデータがなくなるような間隔ができるために計算できなくなる恐れがあり、節点間隔はあまり密にはできない。

以上のことから、節点間隔は、前章で述べた曲線の形による節点間隔の影響のほか、全節点数に関する計算時間、データの密度などを考慮して定め、この結果なお生じるゆらぎについては次章の改良法によって修正することが望ましい。

表-1 データ群 1 のスプライン曲線に対する計算時間 (FACOM 230-60)

節点間隔 (%)	節点数	全節点値の計算時間 (sec)	任意の 1 点に対する関数値の平均計算時間 (ms)
0.5	29	174.36	170
1.0	15	23.6	65
2.0	8	4.9	27

なお、 $j=0$ の点（この場合には原点）に対する処理として、単に $\epsilon_0=0$ なる条件を入れると、スプラインはそれに応じた点（図-5 中の縦軸上の□印や△印のように）を通り、必ずしも原点を通らない。応力-ひずみ曲線のように、曲線の性質から原点を通ることが明らかかな場合には、そのことを考慮するために、測定点として $(0, 0)$ に数個のデータがあるとして原点に重みをつけて解析すればよい。しかし、この場合には、原点近傍の測定値の重みが相対的に軽くなり、直感的に曲線を引いた場合よりかなり測定点をはずれたスプラインを与え、データが生かされない恐れがあるので注意を要する。

スプラインによる曲線近似の大きな特色の一つは、スプライン曲線に沿った微分、積分が簡単に求められることにある。図-6 の実線で示した曲線は 図-5 におけるデータ群 1 の $h=1.0\%$ の場合の一次導関数を示したものである。応力-ひずみ曲線の場合には、その接線は変形係数として解析に用いられることが多いので、この方面でもこの表現法は有用と考えられる。

5. スプライン曲線の改良

上に述べたように、与えられたデータをそのまま式 (14)、(9) および式 (2) に適用した場合、得られるスプライン関数は勾配の大きく変化する部分において、ゆらぎを生ずることがある。この改良方法として、以下に示すような 2 つの提案を行なう。

(1) 補間データによる方法

一般に、スプライン関数のゆらぎを減少させるためには、分割区間を十分小さくして節点を多く与えることによって解決できる。しかし、図-3 で示したように、与えられたデータが分散している場合には、分割区間内にデータが存在しなくなる場合が起こる。このような場合には、分割区間内に適当な方法によって補間データを与えればよい。

補間データは次のようにして与えられる。まず区間内に必ずデータを含むような分割を行ない、式 (21) により節点を計算する。次に、この節点を式 (9) および式 (2) に適用してデータの疎な部分のスプライン関数値を計算し、この値に適当な乱数（たとえば正規乱数）を加味することによって補間データが得られる。

図-7 は 図-5 で示したデータ群 1 に対して求めた節点間隔 $h=1.0\%$ の場合（図-5 の□印）のスプライン曲線に、上に述べた方法を適用した例である。このデータは比較的分散しており、 $h=0.5\%$ にとったとき、分割区間内にデータを含まない可能性がある。そこで、

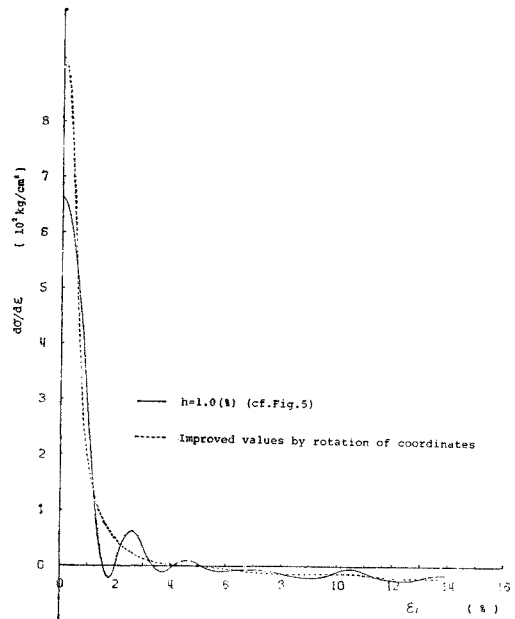


図-6 データ群 I に対するスプラインの一次導関数

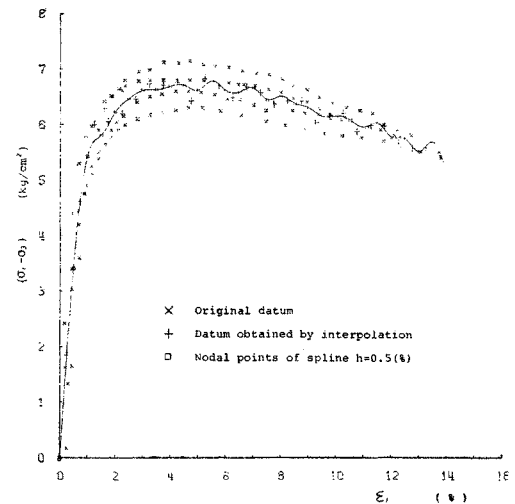


図-7 補間データによるスプラインの改良

$\epsilon=0.25\%$ のところから 0.5% 間隔に補間データを与えて元の測定データにこれを加えて計算した。このとき用いた乱数は標準偏差 0.1 の正規乱数である。このほか、二、三標準偏差をかえて計算を行なったが、結果はほとんど変わらなかった。また、 $\epsilon=2.0\%$ 以上の部分においても少しゆらぎがあるが、これは初期データがある分布（たとえば正規分布）にしたがっておらず、これに最小自乗法を適用したときに生じた誤差である。

(2) 座標回転による方法

スプライン関数の勾配の大きく変化する部分におこる

ゆらぎを減少させるためには、この部分に十分な数の節点をとればよいが、一方、図-4の曲線1のようにスプラインの勾配のゆるやかなところでは、データ群がある分布にしがたっていないために、節点間隔を細かくすると、逆に細かいゆらぎが多く生ずることになり、なめらかな曲線に近似できない恐れがある。このような場合には、大きな区間で節点をとることによって、この細かいゆらぎを減少させることができる。スプラインの勾配の大きいところでの曲線の大きいゆらぎと、勾配が小さいところでの細かいゆらぎを減少させる方法は互いに逆の関係にあるが、これらを両立させるために座標軸の回転を考える。

いま、スプライン関数に対して等間隔な分割区間の曲線に沿った節点の数を考えると、勾配の大きい部分ではその数が少なく、小さい部分ほどその数は多い。そこで、勾配が平均化されるような座標軸の回転を行ない、その座標系において分割区間を考えれば、曲線に沿った節点数も平均化される。このような節点に対してスプライン曲線を求め、それをもとの座標系に戻せばゆらぎのないなめらかなスプライン曲線を得ることができる。

座標軸の回転角度は、まず、3.で述べた方法を適用して節点を求め、それらの節点間での最大微係数と最小微係数の逆正接の平均をとればよい。また、回転後の分割幅は絶対値最大微係数をもつ節点間を回転後2等分するようにとればよい。

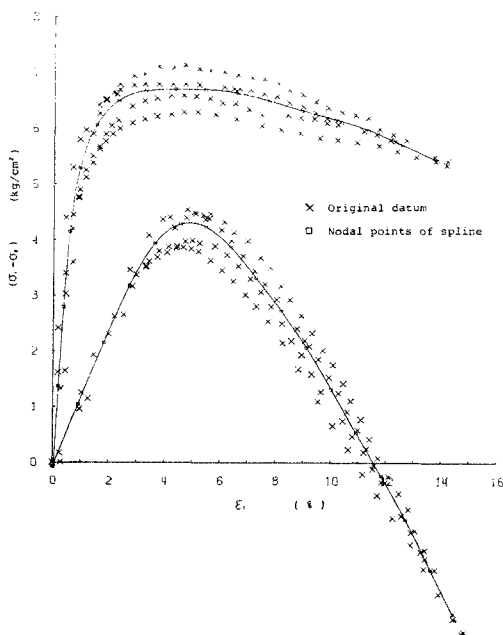


図-8 回転によるスプラインの改良

図-8は図-5で示したデータ群1に対して、この方法を適用したものである。この例では、回転したデータに対してスプライン曲線を求め、図-4で示したように、曲線の勾配が大きく変化する部分のゆらぎを減少させるために、式(2)をもちいて節点を補い、これを元に戻した様子を示したものである。図からも明らかのように、ゆらぎは消滅しほぼ満足できる応力-ひずみ曲線を得ることができる。なお、この場合の1次導関数を図-6の点線で示す。この図より、1次導関数においても改良された曲線が得られることがわかる。

6. 結 言

本研究では、非線形な応力-ひずみ曲線をスプライン関数を用いて数式表示する場合の問題点などについて考察を行なったが、その結果、次のような結論を得た。

(1) この表示法では、入力データとして測定データをそのまま用いることができること、計算は有限要素法の計算ルーチンがそのままつかえること、連続した1次導関数が簡単に求められることなどから、有限要素法を用いた材料非線形解析への導入に適している。

(2) すでにある滑らかな曲線を表現する場合の節点は、曲線に沿った長さに対してほぼ等しい間隔で選ぶことや、曲線の特徴を表現しているような個所を選ぶことが必要である。

(3) 分散したデータに対しても最小自乗法を用いても、もっとも確からしい曲線を作ることができる。しかし、この場合、種々な原因で曲線がゆらぎを生じることがある。このゆらぎを減少させるために、次に述べるような方法を提案した

(4) ゆらぎを減少させる方法の一つとして、節点間隔を小さくすれば減少することから、乱数を加味して作られた補間データを用いてデータを密にし、節点間隔を小さくすることによって改良する方法を提案した。しかし、この方法では計算時間の増加は避けられない。

(5) ゆらぎを減少させるもう一つの方法として、座標回転により曲線の大きな勾配を持った部分を緩和し、節点間隔を細かくすることなく改良する方法を提案した。この方法では、計算時間の増加は避けることができ、ほぼ満足すべき結果が得られた。

なお、本研究における計算およびX-Yプロットによる図形出力は名古屋大学大型計算機センター FACOM 230-60及び中部工業大学電子計算機センター FACOM 270-30を用いて行なった。終りに、試験データを提供していただいた名古屋大学工学部土圧研究施設 市原松平教授に感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) Kondner, R.L. : Hyperbolic Stress-Strain Responce : Cohesive Soils, Proc. ASCE, 89, SM 1, 1963, pp. 115~143.
- 2) Duncan, J.M. and C.Y. Chang : Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Proc. ASCE, 96, SM 5, 1970, pp. 1629~1651.
- 3) Desai, C.S. : Nonlinear Analyses Using Spline Functions, Proc. ASCE, 97, SM 10, 1971, pp. 1461~1479.
- 4) Schoenburg, I.J. : On Interpolation by Spline Functions and its Minimal Properties, International Series of Numerical Analysis, Vol. 5, Academic Press, 1964.
- 5) De Boor C. and R.E. Lynch : On Spline and Their Minimum Properties, J. of Math. and Mech., 15, 1966, pp. 953~969.
- 6) Ahlberg, J.H., E.N. Nilson and J.I. Walsh : The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, 1967.
- 7) 原田・市田・清野 : スプライン関数を利用する曲線のあてはめ, 情報処理学会 12 回大会予稿集 (昭和 46 年), pp. 161~162.

(1973.2.8 - 受付)