

ランガートラス橋の自由振動の立体的解析

THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF FREE VIBRATION
OF ARCH BRIDGES WITH STIFFENING TRUSS

村上 正*・会田 忠義**

By Tadashi Murakami and Tadayoshi Aida

1. ま え が き

ランガートラス橋およびランガートラス橋の振動解析について、これまでに多くの研究がなされてきたが、そのほとんどが鉛直振動を対象とするもので水平あるいは回転振動についてはまったく等閑視されてきた。短径間橋梁であればそれほど問題でないが、天草連絡道路2号橋(大矢野橋、スパン=156 m)のような中径間ないし長径間橋梁に属するランガートラス橋では、特に、桁高さが幅員に比べて大きい場合、一般の長径間橋梁と同様、耐震設計上、立体的振動特性が明らかにされなければならないことは周知のとおりである。

ランガートラス橋は桁高さが高く、しかも桁高さがスパン方向に変化しているため、一般のトラス橋のように桁を1本のはりに置き換えて解析することは不合理である。したがって、本研究のような立体的解析が必要となる。著者らは、さきに、トラス橋の自由振動の立体的解析について研究^{2)~7)}を重ねてきたが、本研究は同一手法によりランガートラス橋の自由振動の立体的解析法を示すと同時に、実橋への適用例によりランガートラス橋の立体的振動特性を明らかにしたものである。

2. 解析上の仮定

立体的解析を行なうに当たり、次の仮定を入れランガートラス橋の模型化を計った。

① 補剛トラス部の横断面は変形しないとし、残りの横断面、すなわち、補剛トラスの上節点より上の部分は変形する

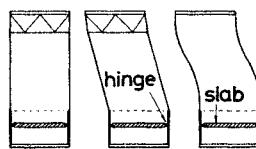


図-1

と仮定する。特に、対傾構が存在する場合は図-1のようにせん断変形の等しい箱型ラーメンに置換する。

② つり材の伸縮剛性を無限大とし、伸縮を無視するが、曲げ剛性は有限とする。また、補剛トラスの垂直材および横桁も伸縮しないとす。

③ 横断面の上の水平材(アーチ部の横支材)は剛体であるとする。

④ つり材を除いた他の部材、すなわち、補剛トラスの弦材および腹材ならびに上下の横構の各部材はすべて節点でヒンジ結合されているとする。ただし、つり材と補剛トラスおよびつり材とアーチとの結合点は橋軸方向の力に対していずれもヒンジの働きをするが、橋軸に直角な水平力に対しては剛結の働きをする。すなわち、図-1の変形をする。

⑤ 橋門構部(図-2の1'3'4'2')は、実橋ではラーメン構造であるが、ここでは横剛性が等しいトラス構造にする(斜材1'4'および2'3'を挿入する)。

⑥ 床板は補剛トラスの垂直材にヒンジ結合されている。

⑦ 床板の水平軸まわりの曲げ剛性および橋軸方向の伸縮剛性を無視するが、鉛直軸まわりの曲げ剛性および橋軸まわりのねじり剛性は考慮する。

⑧ 振動は微小振動で減衰力は作用しない。

⑨ トラス桁及びアーチの節点に質量を集中させる。解析を容易にするために、図-2のように座標をとり

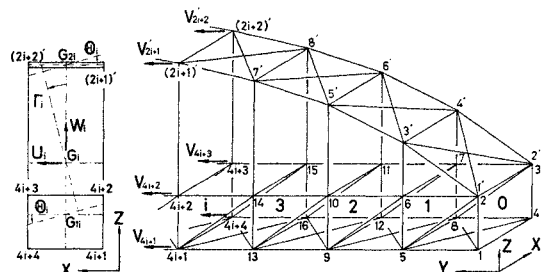


図-2

* 正会員 工博 福岡大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 山口大学助教授 工学部土木工学科

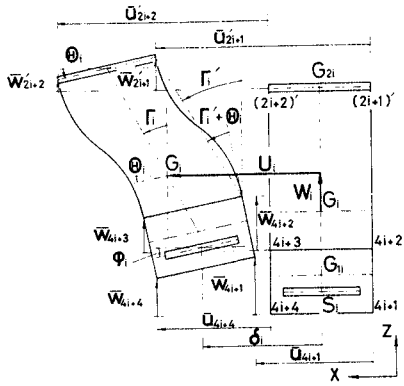


図-3

横断面番号と節点番号をつける。

3. 運動方程式^{*)}

ランガートラスの一横断面の変位および変形は上記の仮定にしたがうと、図-3 に示すように全横断面の重心の水平および鉛直変位ならびに横断面の形状変化、すなわち、鉛直せん断変形と水平せん断変形に集約される。

ここで、鉛直せん断変形とは図-4 に示す θ を指し、水平せん断変形とは図-4 に示す Γ を指す。

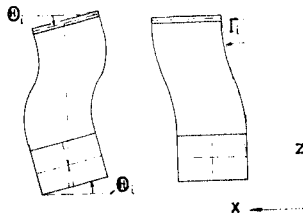


図-4

このようにモデル化されたランガートラスの一横断面では次の運動方程式が成立する。

- ① 横断面の重心の橋軸に直角な水平の運動方程式
- ② 横断面の重心の橋軸に直角な鉛直の運動方程式
- ③ 横断面の鉛直せん断の運動方程式
- ④ 横断面の水平せん断の運動方程式
- ⑤ 補剛トラスおよびアーチ部の節点の橋軸方向の運動方程式

(1) 運動方程式

自由振動によって i 番目の横断面に次の変位および変形が生じた場合を想定する。

U_i : 横断面の重心の橋軸に直角な水平変位

W_i : 横断面の重心の橋軸に直角な鉛直変位

θ_i : 横断面の鉛直せん断変形

Γ_i : 横断面の水平せん断変形

V_{4i+m} : 補剛トラスの四隅の節点の橋軸方向変位 ($m=1, 2, 3, 4$)

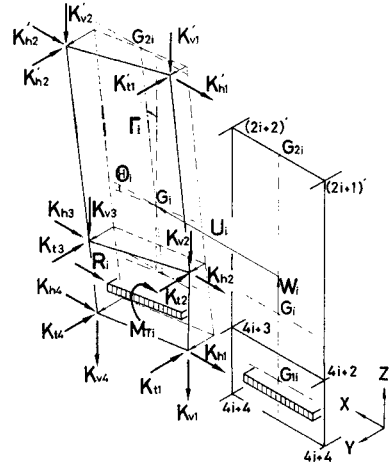


図-5

V_{2i+m} : アーチ部の節点の橋軸方向変位 ($m=1, 2$)

ここで、 $i=0, 1, 2, \dots, n$ である。

すると、図-5 に示す復元力および復元モーメントが生ずる。図中、 K_{vm}, K_{hm} および K_{tm} ($m=1, 2, 3, 4$) は補剛トラスの節点 $4i+m$ に作用する鉛直、水平および橋軸方向の復元力で、この節点に結合されている補剛トラスの各部材および横構部材の部材応力により生ずる。また、 K_{vm}', K_{hm}' および K_{tm}' ($m=1, 2$) はアーチ節点 $(2i+m)'$ に作用する鉛直、水平および橋軸方向の復元力で、この節点に結合されているアーチ材および上横構部材の部材応力により生ずる。さらに、 R_i および M_{Ti} はそれぞれ床板による水平方向の復元力およびねじりによる復元モーメントである。

i 番目の横断面の自由振動の水平および鉛直の運動方程式は次式で表わされる。

$$\mathfrak{M}_i \frac{d^2 U_i}{dt^2} = -(K_{h1} + K_{h2} + K_{h3} + K_{h4} + K_{h1}' + K_{h2}') - R_i \dots \dots \dots (1)$$

$$\mathfrak{M}_i \frac{d^2 W_i}{dt^2} = -(K_{v1} + K_{v2} + K_{v3} + K_{v4} + K_{v1}' + K_{v2}') \dots \dots \dots (2)$$

式中、 \mathfrak{M}_i は横断面の全質量である。

横断面の重心を通る橋軸まわりの鉛直せん断の運動方程式は図-6 を参照すると、次式で表わされる。

$$\mathfrak{I}_i^p \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} = -b(K_{v1} + K_{v2} - K_{v3} - K_{v4} + K_{v1}' - K_{v2}') + e_{li}(K_{h1} + K_{h4}) - e_{ui}(K_{h2} + K_{h3}) + 2k_i h_{2i}^2 (\Gamma_i' - \theta_i) + 2e_{ui} k_i h_{2i} (\Gamma_i' - \theta_i) - M_{Ti} + R_i e_{si} \dots \dots \dots (3)$$

式中、 \mathfrak{I}_i^p は補剛トラスの重心 G_{li} に関する補剛トラスの質量慣性モーメントと、アーチ部水部材の重心 G_{2i}

まわりの水平材の質量慣性モーメントとの和である。

式(3)の右辺の第1項は横断面の6つの節点に作用する鉛直方向の復元力の横断面の重心 G_i まわりの復元モーメントで、第2項および第3項は補剛トラスの四隅の節点に作用する水平方向の復元力

の補剛トラスの重心 G_{ii} まわりのモーメント、すなわち、補剛トラスの回転に対する復元モーメントである。第4項は垂直材の曲げ変形によって上の水平材および補剛トラスに加えられるモーメントの和であり、第5項は同じく垂直材の曲げ変形によって補剛トラスに作用する水平せん断力の重心 G_{ii} まわりの復元モーメントである。式中、 Γ' はつり材の部材回転角、 $(\Gamma' - \theta)$ は接線回転角で、第4および5項は次のように整理される。ただし、式中、 $k_i = 12EI/h_{2i}^3$ である。

$$2k_i h_{2i}^2 (\Gamma'_i - \theta_i) + 2e_{ui} k_i h_{2i} (\Gamma'_i - \theta_i) = 2k_i (h_{2i} + e_{ui})^2 (\Gamma_i - \theta_i)$$

最後の第6および7項は床板より補剛トラスに加えられる復元モーメントである。

横断面の重心を通る橋軸まわりの水平せん断の運動方程式は図-6を参照すると、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i^h \frac{d^2 \Gamma_i}{dt^2} &= e_{1i} (K_{h1} + K_{h2} + K_{h3} + K_{h4}) \\ &\quad - e_{2i} (K_{h1}' + K_{h2}') + e_{1i} R_i \\ &\quad - 2k_i (h_{2i} + e_{ui}) h_{2i} (\Gamma'_i - \theta_i) \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

式中、 \mathfrak{R}_i^h は上の水平材および補剛トラスの重心 G_i まわりの質量慣性モーメントで、上の水平材の質量を \mathfrak{R}_{1i} 、補剛トラスの質量を \mathfrak{R}_{2i} とするとき、次式で表わされる。

$$\mathfrak{R}_i^h = \mathfrak{R}_{1i} e_{1i}^2 + \mathfrak{R}_{2i} e_{2i}^2$$

式(4)の右辺の第1項は補剛トラスに作用する水平方向の復元力が補剛トラスの重心 G_{ii} に作用するとしたとき、これらの復元力の重心 G_i まわりの復元モーメントで、第2項は上の水平材に作用する水平方向の復元力の重心 G_i まわりの復元モーメントである。第3項は第1項と同様、床板による水平方向の復元力が補剛トラスの重心 G_{ii} に作用するとしたときのこれによる重心 G_i まわりの復元モーメントである。最後の第4項は垂直材の曲げ変形によって生ずるせん断力 $2k_i h_{2i} (\Gamma'_i - \theta_i)$ が上の水平材および補剛トラスの重心に作用するとしたと

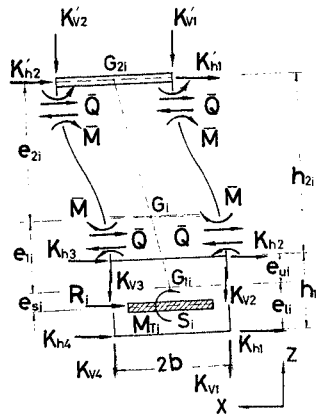


図-6

きのこれら水平方向の復元力の重心 G_i まわりの復元モーメントである。第4項は次のように整理される。

$$2k_i (h_{2i} + e_{ui}) h_{2i} (\Gamma'_i - \theta_i) = 2k_i (h_{2i} + e_{ui})^2 (\Gamma_i - \theta_i)$$

横断面の6つの節点の橋軸方向の運動方程式は次式となる。アーチ節点では節点質量を $m_{2i+m'}$ ($m=1, 2$) とすると、

$$m_{2i+m'} \frac{d^2 V_{2i+m'}}{dt^2} = -K_{tm'} \dots \dots \dots (5)$$

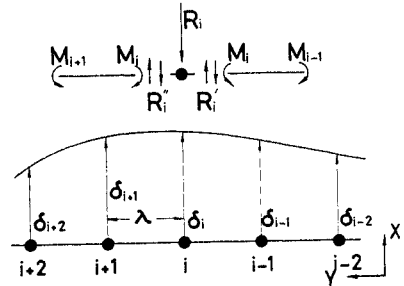


図-7

補剛トラスの節点では節点質量を m_{4i+m} ($m=1, 2, 3, 4$) とすると、

$$m_{4i+m} \frac{d^2 V_{4i+m}}{dt^2} = -K_{tm} \dots \dots \dots (6)$$

(2) 復元力および復元モーメント

i 番目の横断面に既述の変位および変形が生ずるとき、横断面の6つの節点および床板の重心には次に示す変位が生ずる。補剛トラスの節点変位は次のとおりである(図-3参照)。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{4i+m} &= U_i - e_{1i} \Gamma_i + e_{v,4i+m} \theta_i \\ \bar{v}_{4i+m} &= V_{4i+m} \\ \bar{w}_{4i+m} &= W_i - e_{h,4i+m} \theta_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

$(m=1, 2, 3, 4)$

アーチの節点変位は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{2i+m'} &= U_i + e_{2i} \Gamma_i \\ \bar{v}_{2i+m'} &= V_{2i+m'} \\ \bar{w}_{2i+m'} &= W_i - e_{h,2i+m'} \theta_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$(m=1, 2)$

床板の重心の水平変位 (δ_i) および回転変位 (θ_i) は次の値となる(図-3参照)。

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= U_i + e_{1i} \Gamma_i - e_{s1} \theta_i \\ \theta_i &= \theta_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 e_{1i} , e_{2i} , $e_{v,4i+m}$, $e_{h,4i+m}$, $e_{h',2i+m}$ および e_{s1} は補剛トラスの節点 $4i+m$ ($m=1, 2, 3, 4$) の座標を $(x_{4i+m}, y_{4i+m}, z_{4i+m})$ 、アーチの節点 $(2i+m)'$ ($m=1, 2$) の座標を $(x_{2i+m'}, y_{2i+m'}, z_{2i+m'})$ 、上の水平材の重心 G_{2i} の座標を $(x_{G_{2i}}, y_{G_{2i}}, z_{G_{2i}})$ 、補剛トラスの重心 G_{1i} の座標を $(x_{G_{1i}}, y_{G_{1i}}, z_{G_{1i}})$ 、全横断面の重心 G_i の

座標を (x_{Gi}, y_{Gi}, z_{Gi}) , さらに, 床板の重心 S_i の座標を (x_{si}, y_{si}, z_{si}) とするとき, それぞれ次の値で求められる。

$$\left. \begin{aligned} e_{vi} &= z_{Gi} - z_{G1i}, & e_{2i} &= z_{G2i} - z_{Gi} \\ e_{v, Ai+m} &= z_{Ai+m} - z_{G1i}, & e_{h, Ai+m} &= x_{Ai+m} - x_{G1i} \\ e_{h, 2i+m'} &= x_{2i+m'} - x_{G2i}, & e_{si} &= z_{G1i} - z_{si} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

今, 隣接する $i-1, i$ および $i+1$ 番目の横断面のそれぞれの中で, アーチ部において任意節点 $j' = \{2(i-1) + n\}'$, $k' = (2i+m)'$, $l' = \{2(i+1) + n\}'$ ($m, n=1, 2$) をとり, 補剛トラス部において, 任意節点 $j = 4(i-1) + n$, $k = 4i+m$, $l = 4(i+1) + n$ ($m, n=1, 2, 3, 4$) をとる。これらの任意節点の中で, たとえば, アーチ部において, k' と j' を結ぶ部材の k' における部材応力を N_{kj}' とし, 補剛トラス部において, k と j を結ぶ部材の k 点における部材応力を N_{kj} とするとき, それぞれ部材応力は次式で表わされる。

$$N_{kj}' = K_{kj}' \{ (U_{i-1} - U_i) \lambda_{kj}' + (V_j - V_k) \mu_{kj}' + (W_{i-1} - W_i) \nu_{kj}' + (e_{2i-1} \Gamma_{i-1} - e_{2i} \Gamma_i) \lambda_{kj}' - (e_{hj}' \theta_{i-1} - e_{hk} \theta_i) \nu_{kj}' \} \dots\dots\dots(11)$$

$$N_{kj} = K_{kj} \{ (U_{i-1} - U_i) \lambda_{kj} + (V_j - V_k) \mu_{kj} + (W_{i-1} - W_i) \nu_{kj} - (e_{i-1} \Gamma_{i-1} - e_i \Gamma_i) \lambda_{kj} + (e_{vj} \theta_{i-1} - e_{vk} \theta_i) \lambda_{kj} - (e_{hj} \theta_{i-1} - e_{hk} \theta_i) \nu_{kj} \} \dots\dots\dots(12)$$

上式中, K_{kj}' および K_{kj} はそれぞれ次の値をもつ。

$$K_{kj}' = \frac{EA_{kj}'}{l_{kj}'}, \quad K_{kj} = \frac{EA_{kj}}{l_{kj}}$$

ここで, E はヤング係数, A_{kj}' および A_{kj} はそれぞれアーチ部材 $k'j'$ および補剛トラス部材 kj の断面積, l_{kj}' および l_{kj} はそれぞれ上記アーチ部材および補剛トラス部材の材長である。また, $\lambda_{kj}', \dots, \lambda_{kj}, \dots$, は上記のアーチ部材および補剛トラス部材の方向余弦である。

アーチ節点 $k' = (2i+m)'$ に作用する復元力 K_{hm}' , K_{vm}' および K_{tm}' は, 節点 k' と j' を結ぶ部材および k' と l' を結ぶ部材の節点 k' における部材応力をそれぞれ N_{kj}' , N_{kl}' とすると, 次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} K_{hm}' &= - \sum_{n=1}^2 (N_{kj}' \lambda_{kj}' + N_{kl}' \lambda_{kl}') \\ K_{vm}' &= - \sum_{n=1}^2 (N_{kj}' \nu_{kj}' + N_{kl}' \nu_{kl}') \\ K_{tm}' &= - \sum_{n=1}^2 (N_{kj}' \mu_{kj}' + N_{kl}' \mu_{kl}') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

一方, 補剛トラスの節点 $k = 4i+m$ ($m=1, 2, 3, 4$) に作用する復元力 K_{hm} , K_{vm} および K_{tm} は, 節点 k と j を結ぶ部材および節点 k と l を結ぶ部材の節点 k における部材応力をそれぞれ N_{kj} , N_{kl} とすると, 次式で

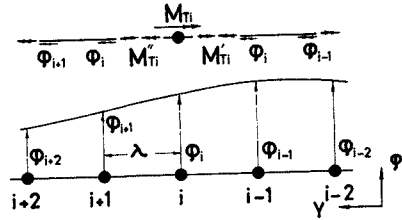


図-8

表わされる。

$$\left. \begin{aligned} K_{hm} &= - \sum_{n=1}^4 (N_{kj} \lambda_{kj} + N_{kl} \lambda_{kl}) \\ K_{vm} &= - \sum_{n=1}^4 (N_{kj} \nu_{kj} + N_{kl} \nu_{kl}) \\ K_{tm} &= - \sum_{n=1}^4 (N_{kj} \mu_{kj} + N_{kl} \mu_{kl}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

床板による復元力および復元モーメントは次のように求められる。 $i-2, i-1, i, i+1$ および $i+2$ 番目の横断面の床板に, それぞれ $\delta_{i-2}, \delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}$ および δ_{i+2} の水平変位と $\varphi_{i-2}, \varphi_{i-1}, \varphi_i, \varphi_{i+1}$ および φ_{i+2} の回転変位が生ずると (図-7 参照)

$$R_i = -R_i' + R_i'' = -\frac{1}{\lambda} (M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) \dots\dots\dots(15)$$

ここで, M_i は床板の橋軸直角鉛直軸まわりの曲げ剛性を EI_s とすると,

$$M_i = -\frac{EI_s}{\lambda^2} (\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1}) \dots\dots\dots(16)$$

したがって, R_i は式 (15), (16) および (9) の第1式より次式となる。

$$R_i = \frac{EI_s}{\lambda^3} (U_{i-2} - 4U_{i-1} + 6U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2} - e_{i-2} \Gamma_{i-2} + 4e_{i-1} \Gamma_{i-1} - 6e_i \Gamma_i + 4e_{i+1} \Gamma_{i+1} - e_{i+2} \Gamma_{i+2} - e_{si-2} \theta_{i-2} + 4e_{si-1} \theta_{i-1} - 6e_{si} \theta_i + 4e_{si+1} \theta_{i+1} - e_{si+2} \theta_{i+2}) \dots\dots\dots(17)$$

床板のねじり抵抗による復元モーメント M_{Ti} は 図-8 を参照すると, 次式で与えられる。

$$M_{Ti} = M_{Ti}' - M_{Ti}'' \dots\dots\dots(18)$$

ここで, M_{Ti}' および M_{Ti}'' は床板のねじり剛性を GJ_s とすると,

$$M_{Ti}' = \frac{GJ_s}{\lambda} (\varphi_i - \varphi_{i-1}), \quad M_{Ti}'' = \frac{GJ_s}{\lambda} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \dots\dots\dots(19)$$

したがって, M_{Ti} は式 (18), (19) および (9) の第2式より次式となる。

$$M_{Ti} = -\frac{GJ_s}{\lambda} (\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) \dots\dots\dots(20)$$

(3) 一横断面の運動方程式

復元力 (13), (14), (17) および (20) を運動方程式

(1), (2), (3), (4), (5) および (6) に代入し, 横断面の重心および節点の変位を次に示す周期関数で表わし整理すると, 一横断面の合計 10 個の運動方程式は式 (22) のように行列表示される。

$$\left. \begin{aligned} U_i &= u_i e^{i\omega t}, & W_i &= w_i e^{i\omega t}, & \theta_i &= \theta_i e^{i\omega t} \\ \Gamma_i &= \gamma_i e^{i\omega t}, & V_k &= v_k e^{i\omega t}, & V_k' &= v_k' e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

指数中, $i = \sqrt{-1}$, ω は円振動数である。

$${}_1D_i X_{i-2} + (A_i + {}_2D_i) X_{i-1} + (B_{i+3} D_i - \omega^2 W_i) X_i + (C_{i+4} D_i) X_{i+1} + {}_5D_i X_{i+2} = 0 \dots \dots \dots (22)$$

ここで, X_i は i 番目の横断面の変位ベクトルで式 (23) で表わされる。

$$X_i = [u_i, w_i, \theta_i, \gamma_i, v_{2i+1}, v_{2i+2}, v_{4i+3}, v_{4i+4}, v_{2i+1}', v_{2i+2}']^T \dots \dots \dots (23)$$

A_i, B_i および C_i はトラス部材の剛性に関する 10×10 の正方行列で, W_i は注目横断面の質量分布を表わす対角行列である。また, ${}_1D_i, {}_2D_i, {}_3D_i, {}_4D_i$ および ${}_5D_i$ は床板の剛性に関する 10×10 の正方行列である。

式 (22) が一横断面の運動方程式である。これを各横断面に適用することにより得られる一連の運動方程式より振動数方程式が求められ, 行列の固有値問題として固有周期および固有ベクトルが求められる。

4. 近似解析法

すべての横断面に運動方程式をたてる前述の方法では多格間をもつランガートラスの場合, 容易に立体解析できない。この場合, 次のような近似的取扱いにより解析することができる。

- ① 2 パネルごとの横断面に橋の質量を集中させる。
- ② 質量をもつ横断面に運動方程式をたて, 質量をも

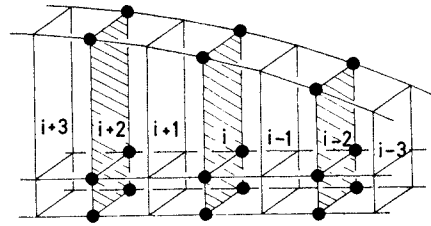


図-9

たない横断面には静的つりあい式をたてる (図-9 参照)。

③ 鉄筋コンクリート床板は質量をもつ横断面の位置のみ支持される。

i 番目の横断面の運動方程式は次式で表わされる。

$${}_1D_i X_{i-4} + {}_2D_i X_{i-2} + A_i X_{i-1} + (B_{i+3} D_i - \omega^2 W_i) X_i + C_i X_{i+1} + {}_4D_i X_{i+2} + {}_5D_i X_{i+4} = 0 \dots \dots \dots (24)$$

$i-1$ および $i+1$ 番目の横断面のつりあい式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} A_{i-1} X_{i-2} + B_{i-1} X_{i-1} + C_{i-1} X_i &= 0 \\ A_{i+1} X_i + B_{i+1} X_{i+1} + C_{i+1} X_{i+2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

式 (25) により式 (24) の X_{i-1} および X_{i+1} を消却することにより運動方程式は次式となる。

$${}_1D_i X_{i-4} - (A_i B_{i-1}^{-1} A_{i-1} - {}_2D_i) X_{i-2} + (B_i - A_i B_{i-1}^{-1} C_{i-1} - C_i B_{i+1}^{-1} A_{i+1} + {}_3D_i - \omega^2 W_i) X_i - (C_i B_{i+1}^{-1} C_{i+1} - {}_4D_i) X_{i+2} + {}_5D_i X_{i+5} = 0 \dots \dots \dots (26)$$

ここで, A, B, C および W は式 (22) 中のそれぞれと同じ意味をもち, ${}_1D_i, {}_2D_i, {}_3D_i, {}_4D_i$ および ${}_5D_i$ は 2 パネルごとの横断面で支持された床板の剛性に関する

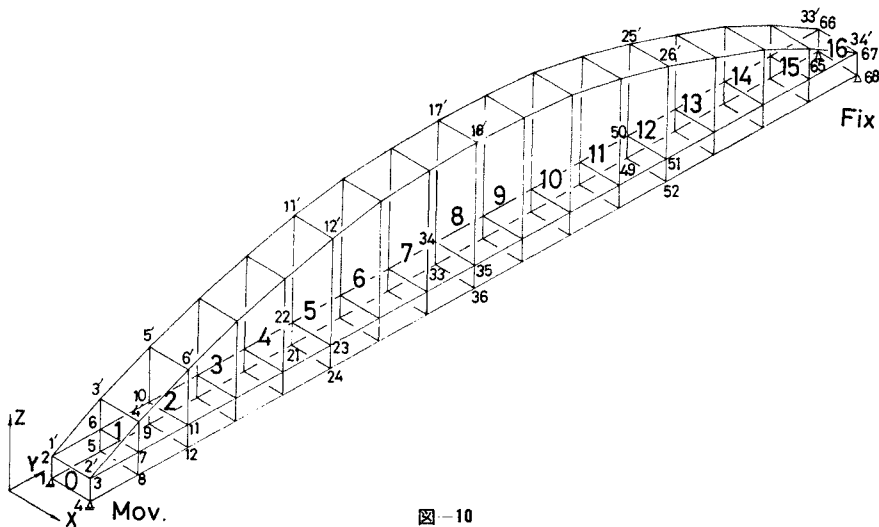


図-10

る行列である。

式 (26) が 2 パネルごとの横断面に質量を集中させる近似解析法の一横断面の運動方程式である。

5. 適用例

大矢野橋（天草連絡道路 2 号橋）に上記の近似解析法を適用し、実測結果との比較検討を行なった。以下にその結果を示す。実測結果は「工事報告 天草五橋⁹⁾」より引用したもので振動実験は九州大学工学部 吉村虎蔵教授および熊本大学工学部 平井一男教授により実施され、補剛トラスの上節点に加速度計を設置し起振機により鉛直加振時、水平加振時および橋軸方向加振時の固有周期およびモードが実測されている。

本橋の構造詳細は前記の「工事報告 天草五橋」を参照することとし、以下には解析上必要とされる数値のみを示す。図-10 に支承条件、横断面および節点番号を示す。床板の橋軸に直角な鉛直軸まわりの曲げ剛性 EI_s およびねじり剛性 GJ_s は次のとおりである。

$$EI_s = 0.509394 \times 10^{15} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2,$$

$$GJ_s = 0.154881 \times 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$$

また、橋脚については、本解析ではこの影響を無視した。

運動方程式をたてるべき注目の横断面の節点質量、横断面質量および横断面の質量慣性モーメントは表-1 のとおりである。本橋は橋軸に対して対称であり、さらに、スパン中央に対して左右対称であるから、節点質量については片側トラスの左側半分の値を、横断面の質量および質量慣性モーメントについてはスパン中央から左側半分の値を表に示してある。

補剛トラスの節点 1 を座標の原点としたときの注目の横断面での補剛トラスの重心 G_{1i} 、ランガートラスの重心 G_i およびアーチ部の重心 G_{2i} の高さ (z 座標) を示すと、表-2 のとおりである。ただし、本橋の中央より左側半分の横断面について示してある。

境界条件として、橋脚上の第 0 および第 16 番目の横断面で、水平変位、鉛直変位およびせん断変形は生じない。すなわち、 $U=W=\theta=\Gamma=0$ 、また、橋軸方向変位については第 16 番目の横断面の下節点固定であるため、 $V_{65}=V_{66}=0$ である。

運動方程式は 76 個からなり固有値および固有ベクトルの算出は Jacobi 法に基づいた。

表-1 質量および質量慣性モーメント

m_0	m_2	146.548 4	m_4	143.992 2	m_6	144.031 8	m_8	144.677 1	
m_1	13.187 2	m_9	22.576 8	m_{17}	22.866 5	m_{25}	23.422 2	m_{33}	23.485 0
m_2	28.516 1	m_{10}	41.159 5	m_{18}	39.849 7	m_{26}	39.997 3	m_{34}	40.021 8
m_3	m_5	9.537 9	m_7	8.871 8	m_{15}	8.780 0	m_{17}	8.831 7	
Ω_0^v	Ω_2^v	1.872 01	Ω_4^v	1.824 25	Ω_6^v	1.838 72	Ω_8^v	1.844 97	
Ω_0^h	Ω_2^h	2.036 67	Ω_4^h	5.033 87	Ω_6^h	7.562 61	Ω_8^h		

単位：質量 $\text{kg} \cdot \text{sec}/\text{cm}$ 質量慣性モーメント $\times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{cm}$

表-2 重心の高さ (cm)

i	G_{1i}	G_i	G_{2i}
2	264.8	408.9	1 372.5
4	261.5	483.1	2 060.0
6	258.6	527.8	2 472.5
8	258.4	545.5	2 610.0

表-3 ランガートラスの水平および回転振動の固有周期と振動変位

変位	周期	1.259	0.698	0.526	0.422	0.337	0.296	0.278	0.199	0.196	0.174
u_1	0.4190	-0.3674	-0.7942	-0.8987	0.5131	1.0000	0.8373	-0.0743	-0.6443	0.9721	
u_2	0.7458	-0.8627	-0.9402	-0.7600	0.9783	0.5565	0.8475	-0.9231	0.3689	0.6339	
u_3	0.9512	-1.0000	-0.5845	-0.3418	0.7177	-0.4519	0.5015	0.1308	1.0000	-0.4033	
u_4	1.0000	-0.9239	0.0958	-0.1685	-0.0691	-0.9711	0.0316	0.9621	0.0362	-0.9183	
u_5	0.8858	-0.8283	0.7405	-0.4714	-0.8198	-0.4581	-0.5168	0.0047	-0.9429	-0.3774	
u_6	0.6408	-0.5960	1.0000	-0.9153	-1.0000	0.4867	-0.9913	-1.0000	-0.3771	0.6804	
u_7	0.3235	-0.1369	0.7673	-1.0000	-0.4767	0.8643	-1.0000	-0.0356	0.5588	1.0000	
θ_1	0.1992	0.0442	-1.6080	1.3319	-0.1382	4.0114	-1.6981	-1.9981	-6.4188	-0.5689	
θ_2	0.4046	2.5896	-2.3349	6.5934	0.1149	3.7765	-4.6880	-5.5023	-1.8024	-1.8596	
θ_3	0.5652	6.1913	-1.5956	12.2367	0.1666	-0.1862	-4.1913	1.4002	4.8358	0.2049	
θ_4	0.6084	7.9399	0.3334	14.1919	0.1487	-2.2795	0.4406	7.4373	-0.2783	2.3305	
θ_5	0.5047	6.4601	2.1391	10.8869	0.1529	0.7642	4.3836	1.0161	-4.9208	-0.0483	
θ_6	0.3012	2.8853	2.5893	4.9820	0.2196	4.7287	3.8469	-5.2767	2.1950	-1.8103	
θ_7	0.0751	0.3915	1.5714	0.5789	0.4096	4.2516	0.9322	-1.3502	6.5111	-0.4464	
γ_1	0.1594	7.3496	-1.6296	-3.1606	-3.5200	2.4814	1.7643	11.8932	-0.8377	-0.3596	
γ_2	0.1050	8.2556	-0.9188	-1.8202	-2.4191	0.6066	0.7435	3.1897	0.9209	-0.4097	
γ_3	0.0957	9.2030	-0.4812	-1.1862	-1.3010	-0.3860	0.2911	-2.4284	1.0260	0.0341	
γ_4	0.0903	9.5866	-0.0536	-1.1011	-0.0247	-0.7684	0.0856	-4.4715	0.0426	0.2758	
γ_5	0.0809	9.2630	0.3639	-1.5641	1.2539	-0.5100	-0.2096	-2.5145	-0.9637	-0.0137	
γ_6	0.0696	8.3860	0.7696	-2.5205	2.3819	0.3073	-0.9060	3.0980	-0.9504	-0.4350	
γ_7	0.0749	7.6216	1.4045	-4.2220	3.5181	1.8857	-2.3485	11.9198	0.6000	-0.2668	

表中の θ および γ の単位は、 $\times 10^{-3}$ radian である。

(1) 水平および回転振動

解析結果中、鉛直振動以外の振動について固有周期および横断面の重心 G_i の橋軸直角水平変位 (U) ならびにせん断変形 (θ, Γ) を固有周期の大きい順に 10 次まで表-3 に示した。これらの振動では鉛直変位は微小であったので省略し、表-3 には示していない。振動モードを立体的に描くと 図-11 のとおりである。

以上の解析結果と実測結果を比較するため補剛トラスの上節点 (図-2 における節点 $4i+2$) の橋軸直角水平、鉛直および橋軸方向変位ならびにアーチの橋軸直角水平変位を 図-12 (a) に示し、実測変位を同図 (b) に示した。さらに、同図 (c) には補剛トラスを単純トラスとして解析した場合 (横断面の重心の振動変位を 表-4 に示す) の上節点変位を示し、ランガートラスと補剛トラスの固有周期および振動モードの比較を容易にした。上記の周期をまとめると表-5 のとおりである。

本橋は大矢野島側に高さ 29.16 m (基礎を含む、底部の幅は 12 m) と永浦島側に 22.78 m (基礎を含む、底部の幅は 12 m) の橋脚をもっているが、橋脚の剛性が大きいためか、実測値にはこれらの影響はほとんど現われていない。また、ランガートラスは水平方向の力に対してアーチ作用をもたない以上、水平逆対称振動の実測周期 0.529 sec より大きい周期をもつ対称振動が存在することが予想されるが、解析結果の 1 次および 2 次に相当する比較的長周期のものが実測されていない。したがって、これらについては解析結果と実測結果を比較することができないが、3 次、4 次および 5 次については実測されており、解析結果と実測結果は比較的よく一致している。

ランガートラスと補剛トラスのみの水平および回転振動を比較して見ると、単純トラスとしての補剛トラスの

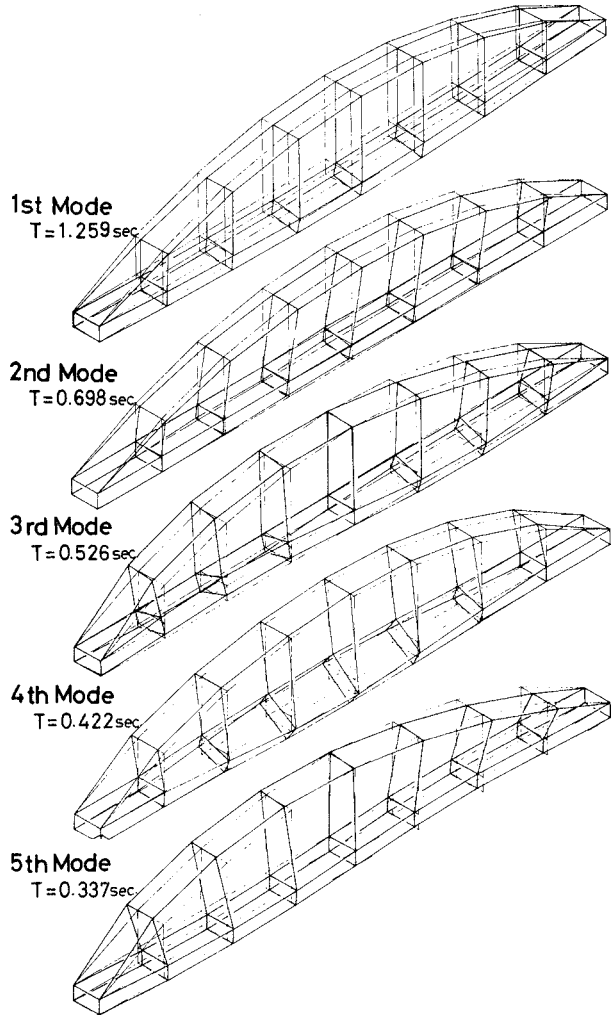


図-11 (1)

表-4 補剛トラスの水平および回転振動の固有周期と振動変位

周期	2.187	0.975	0.595	0.326	0.299	0.199	0.177
変位							
u_1	0.3943	0.4145	-0.6725	0.7886	0.7212	-0.8864	0.9575
u_2	0.7188	0.7563	-0.9220	1.0000	0.4280	0.0998	0.7053
u_3	0.9273	0.9629	-0.6122	0.6305	-0.5065	1.0000	-0.4059
u_4	1.0000	1.0000	0.0701	-0.1154	-0.9024	0.1061	-1.0000
u_5	0.9201	0.8731	0.7352	-0.7791	-0.1828	-0.8890	-0.3572
u_6	0.7072	0.6143	1.0000	-0.9802	0.8651	-0.1957	0.7700
u_7	0.3839	0.2926	0.6993	-0.6307	1.0000	0.7040	0.9772
θ_1	1.4340	-0.5823	-2.9851	-0.5664	5.3564	-8.2380	-0.6345
θ_2	2.6969	-1.1773	-4.4553	-1.2402	4.6835	-0.7375	-1.1044
θ_3	3.5655	-1.6268	-3.3074	-1.2248	-1.8910	8.3402	0.3284
θ_4	3.8725	-1.7921	-0.0976	-0.1558	-6.1187	-0.2378	1.4684
θ_5	3.5678	-1.6395	3.1276	1.1856	-2.3495	-8.4502	0.0155
θ_6	2.6979	-1.2198	4.3137	1.6716	4.1094	10.1899	-1.0879
θ_7	1.4277	-0.6839	2.8817	1.1194	4.9540	8.3083	-0.5158

表中、 θ の単位は表-3 の θ と同じである。

表-5 水平および回転振動の固有周期

次数	ランガートラス橋		補剛トラス
	立体解析	実測値	立体解析
1	1.259		2.187
2	0.698		0.975
3	0.526	0.529	0.595
4	0.422	0.367	
5	0.337	0.323	0.326
6	0.291		0.299
7	0.278		
8	0.199		
9	0.196		0.199
10	0.174		0.177

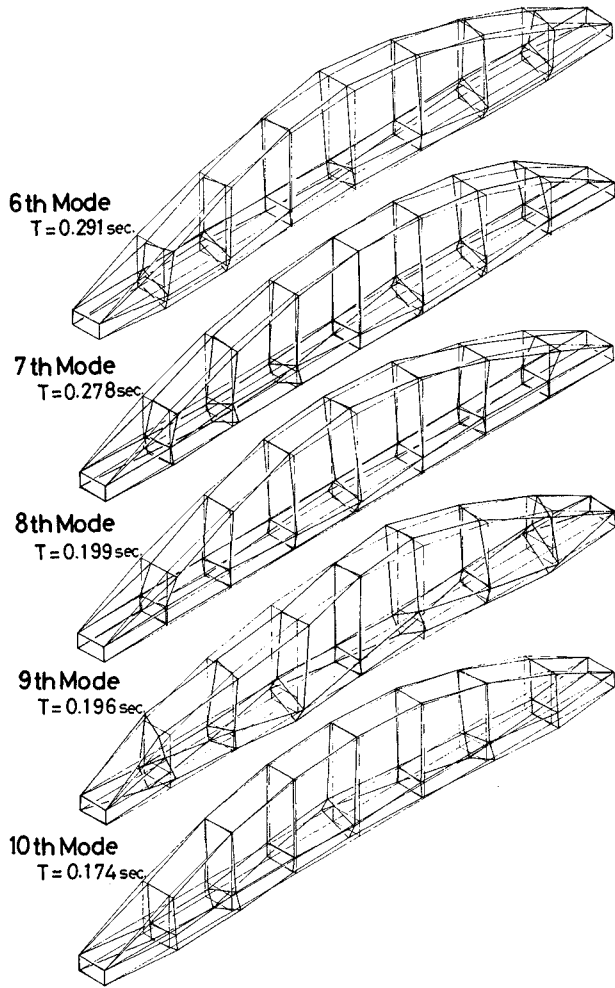


図-11 (2)

表-6 ランガートラスの鉛直振動の固有周期と振動変位

周期 変位	1.298	0.849	0.561	0.373	0.295	0.234
w_1	0.6723	0.0229	0.9556	0.9610	0.7508	0.8496
w_2	0.9711	0.3626	1.0000	0.2440	-0.4982	-0.5548
w_3	0.6947	0.8086	0.0490	-0.8347	-0.8597	-0.1715
w_4	-0.0114	1.0000	-0.6668	-0.1673	0.5666	0.9399
w_5	-0.7199	0.7636	-0.2005	1.0000	0.3255	-0.5200
w_6	-1.0000	0.3086	0.7985	0.4456	-1.0000	-0.2090
w_7	-0.6965	-0.0040	0.9706	-0.6390	-0.4681	1.0000

水平および回転振動は確実にランガートラスの振動中に現われており、計算結果中、単純トラスとしての1, 2, 3, 4, 5, 6, および7次振動はそれぞれランガートラスの1, 2, 3, 5, 6, 9 および10次振動に相当している。ただし、ランガートラスの1次および2次振動のように対称な回転振動変位が生ずるモードに対してはアーチ部による回転拘束のため補剛トラスのそれより短周期となっており、特に、4次振動はランガー特有のもので、実測周期0.367 secに対応する。したがって、高次振動に

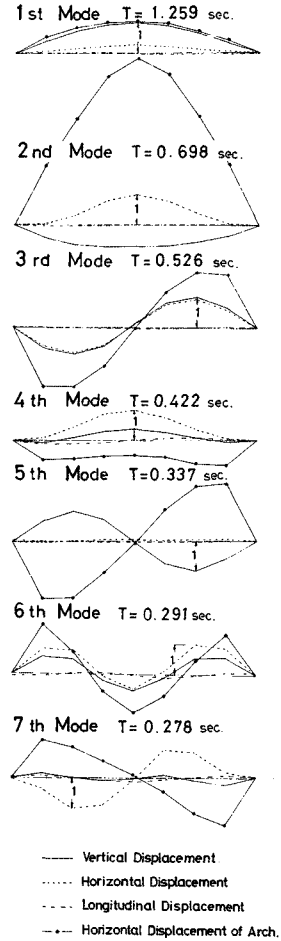


図-12 (a) ランガートラス
水平振動時の変位

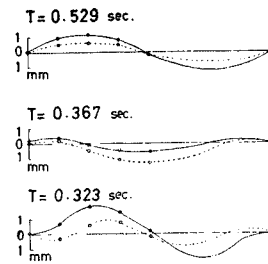


図-12 (b) ランガートラス
水平振動時の実測変位

なるほどアーチの回転拘束が小さくなり両者の差が小さくなっている。

以上の結果よりランガートラスの水平および回転振動を単純トラスとしての補剛トラスのそれでは表わすことはできないといえる。

(2) 鉛直振動

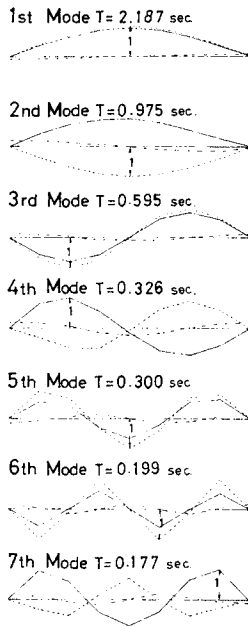
解析結果中、鉛直振動の固有周期および横断面の重心 G_i の鉛直変位を固有周期の大きい順に 6 次まで表—6 に示した。特に、鉛直振動時には橋軸直角水平変位およびせん断変形はほとんど生じないので表—6 に示していない。また 図—12 と同様にランガートラスの補剛トラス上節点（節点 $4i+2$ ）の振動変位を 図—13 (a) に、同じ実測変位を同図 (b) に示した。ただし、 図—13 (a) の中のかっこ内の数値はランガートラスと同じ質量をもった補剛トラスを単純トラスとして解析した場合の固有周期である。上記の結果の固有周期を実測値とともにまとめると表—7 のとおりである。

表中の平面解析の結果は九州大学工学部 吉村虎蔵教授および熊本大学工学部 平井一男教授により計算されたもので、解析で使用されている質量は実験時の質量である（未舗装で型枠はそのままの状態である）。解析理論は吉村・平井理論によるもので、これらの値は文献 9) より引用した。

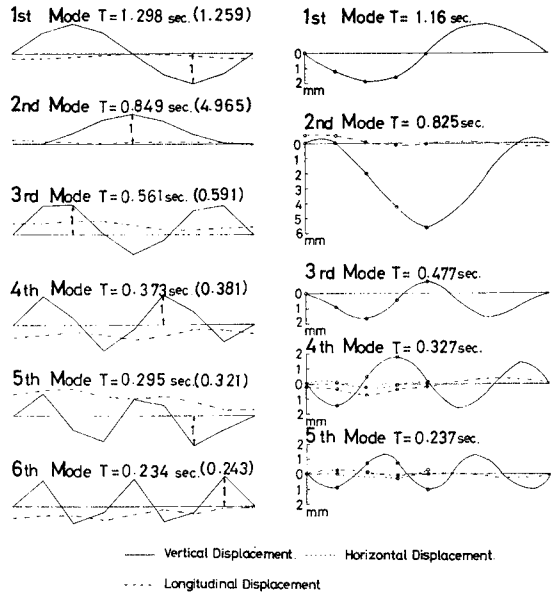
解析結果と実測結果を比較すると、橋軸方向変位の鉛直変位に対する割合は実測値のほうが解析結果より小さいが、鉛直変位については比較的よく一致していることがわかる。

鉛直振動については周知のようにアーチ効果のある対称 1 次振動を除いた他の振動は補剛トラス（ランガートラスと同じ質量をもった）の振動とよく一致している。また、表—7 より明らかのように立体解析結果と平面解析結果の差は小さく平面解析してよいといえる。

解析結果の 5 次振動は実測されていないが、これは 図—13 (a) より明らかのように橋軸方向変位が大きく橋軸方向振動に相当するものである。橋軸方向の振動については、本解析では床板の伸縮剛性および橋脚の橋軸方向の剛性を考慮していないため実測結果と比較することはできない。



図—12 (c) 補剛トラス 水平振動時の変位



図—13 (a) ランガートラス鉛直振動時の変位 図—13 (b) ランガートラス鉛直振動時の実測変位

表—7 鉛直振動の固有周期

次数	ランガートラス橋			補剛トラス
	立体解析	平面解析	実測値	立体解析
1	1.298	1.37	1.16	1.259
2	0.849	1.05	0.825	4.965
3	0.561	0.591	0.477	0.591
4	0.373	0.404	0.327	0.381
5	0.295			0.321
6	0.234	0.228	0.237	0.243

由振動の立体的解析法を明らかにした。本解析では補剛トラス部は横断面の形状変化のないトラスと仮定し、補剛トラスより上部の横断面は容易にせん断変形すると仮定してランガートラスをモデル化した。

短径間のランガートラスには運動方程式 (22) を、中径間以上のものには運動方程式 (26) を適用することにより立体的振動特性を求めることができる。ただし、床板の影響が大きい短径間のランガートラスの解析には運動方程式 (26) を用いないほうがよい。これは式 (26) の誘導に当って床板を注目の横断面でのみ支持された「はり」と見なしており、したがって、床板の剛性を小さく見積ることとなるためである¹⁰⁾。これらの運動方程式は、ランガートラスと構造が似ていることから上路および下路の別を問わずブレースドリブアーチをもつ橋などの解析にも等しく応用できる。

実測結果をもつ橋への適用例から明らかのように、解析結果と実測結果との完全な一致は見なかったが、本解析法がランガートラス橋の立体的振動特性を把握するのに十分であることがわかった。また、適用例からランガ

6. む す び

ランガートラス橋の立体的振動特性、特に、水平および回転振動に対する振動特性を明らかにする目的から自

ートラス橋の振動について次のことがいえる。

鉛直振動については、従来、明らかにされてきた事項が十分確認された。立体解析と平面解析の結果の差が小さいので平面解析して差し支えない。水平および回転振動については、低次の対称振動ではアーチによる回転拘束の効果が現われランガートラス固有の振動を呈し、高次振動になるにしたがってこの効果が減少している。しかし、ランガートラスの水平および回転振動を単純トラスとしての補剛トラスのそれで表わすことはできない。またこれらの水平および回転振動において横断面の重心の鉛直変位はほとんど生じていないので、これらを見捨てて差し支えない。

本研究の一部は昭和 46 年度の文部省科学研究費（一般研究）の補助を受けた。適用例の数値計算には九州大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を用いた。

謝 辞：本研究中、解析結果と実測結果の比較検討について貴重な助言をいただいた九州大学工学部 吉村虎蔵教授に感謝します。

参 考 文 献

1) たとえば、吉村虎蔵・平井一男：ランガートラスの動的解析，

- 土木学会論文集，No. 101，pp. 1～14，1964-1.
- 2) 会田忠義：トラスげたの自由振動の立体的解析，土木学会論文報告集，No. 163，pp. 1～15，1969-3.
 - 3) 村上 正・会田忠義：横断面の変形を無視したトラス橋の自由振動の立体的解析，九州大学工学集報 第 44 巻第 3 号，pp. 311～319，昭和 46 年 6 月，
 - 4) 村上 正・会田忠義：横断面の変形を考慮したトラス橋の自由振動の立体的解析，九州大学工学集報 第 44 巻第 4 号，pp. 486～492，昭和 46 年 8 月，
 - 5) 村上 正・会田忠義：長径間トラス橋の自由振動について，土木学会第 26 回年次学術講演会講演集 pp. 219～222，昭和 46 年 10 月．
 - 6) 会田忠義：トラス橋の振動解析，日本鋼構造協会誌，Vol. 8，No. 74，pp. 45～53，1972-2.
 - 7) 会田忠義・河内 建：死荷重および有限変形の影響を考慮した長径間トラス橋の自由振動について，山口大学工学部研究報告，第 23 巻，第 1 号，pp. 35～39，昭和 47 年 7 月．
 - 8) 村上 正・会田忠義：ランガートラス橋の立体的自由振動について，土木学会第 27 回年次学術講演会講演概要集，pp. 587～590，昭和 47 年 10 月．
 - 9) 日本道路公団：工事報告 天草五橋，pp. 716～721，昭和 42 年 5 月，
 - 10) 会田忠義・佐伯博三：トラス橋の自由振動に及ぼす床板の影響について，山口大学工学部研究報告，第 24 巻第 1 号 昭和 48 年 7 月．

(1973.2.12・受付)