

任意方向から外力を受ける地表面上剛構造物の動揺振動

ROCKING VIBRATIONS OF RIGID STRUCTURES ON THE GROUND
SURFACE EXCITED TO ARBITRARY DIRECTIONS

秋 吉 卓*

By Takashi Akiyoshi

1. 緒 言

地表面上にあるかまたは比較的根入れの浅い構造物は、土木・建築構造物のうちでも最も普通に見られるものである。このような構造物の安定はそのほとんどを底面下部を支持する地盤に依存していることはいうまでもないが、特に地震時の振動特性の解明は耐震設計上欠かすことはできない。ところで関東大震災以降より慣用されてきた静力学的耐震設計法では、支持地盤の動特性を考慮しないため、外力のとり方が不合理な場合もあることが指摘されてきた。かくして、近年構造物と周辺地盤との相互作用についての研究が、理論のみならず実験面においても著しい進展を見せていることは周知のとおりである。

さて、地表面上の構造物の動的解析においては、構造物との接触面での、地盤の動的応力分布の解析的表示がいまだに確定していないため、変位が連続、および非接触面では応力が0という混合境界値の問題として取扱わねばならず、その厳密な解析はきわめて困難である。かかる問題は Lamb¹⁾ に端を発するが、その後 Reissner²⁾ らは接触面下の地盤の応力分布を静的なそれで近似し、これを Fourier-Bessel 展開して境界条件を応力で統一して解析を進め、それ以来かかる振動系を取り扱った研究者はほとんど彼の方法を踏襲してきたといっても過言ではない。これらの解析はほとんど例外なく、最終結果に無限積分を含んでいたため、一般的傾向はそのつど複雑な数値積分によるしか方法がなく、地盤と構造物の相互作用を考慮した応答の理論展開をなす上に不都合であることは否定できなかった。田治見³⁾ はその解析結果より、接触面内における静的な点加振の厳密解を拡張した等価な半理論式で表現し、それを矩形断面にまで適用した。さらに最近では、最終結果に無限積分を含まない実

用式も多く提案されるようになってきた⁴⁾。

本研究も同様に、剛な構造物が弾性地盤上に載っている場合を対象にしたものであって、構造物は動揺振動のみを考え、地盤の変位は鉛直成分が卓越するものとし、他の変位成分を無視した。このとき、地表面上の点加振による Green 関数⁵⁾ が、田治見が得た半理論式とほとんど一致することがわかった。本研究では構造物底面下の上下変位の拘束を考慮していないので、この Green 関数を構造物が存在する場合の厳密な点加振解とは見なせないが、結果的には田治見の式と一致し、厳密解と大差ないことが示されており、本研究におけるこの Green 関数を用いた解析は一応妥当なものと思われる。

従来の応答解析においては、入力方向が断面の主軸に沿った場合がほとんどであったので、応答方向も同一方向でよかったが、実際には加振される方向は主軸と一致する場合はむしろまれであろう。また任意の方向に加振されたときは、構造物はその断面が円形でない限り、応答方向は入力方向と一致するとはいえないであろう⁶⁾。このような点について本研究では、構造物の動揺振動に関する応答方向角（最大応答を示す方向角）、振動アドミッタンス、回転ばね剛性および構造物の応答角変位などについて、理論および実験を通して検討考察を加えたものである。

2. 動揺振動の方向性とアドミッタンス

(1) 点加振による半無限弾性体の応答

変位に関して上下方向の成分 w のみを考慮するとき、等方均質な弾性体内のつり合い方程式は周知のように、

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - f_z(t) \quad \dots (1)$$

と書き表わせる。ここで、 λ, μ を Lamé の定数とする

* 正会員 工博 熊本大学助教授 工学部土木工学教室

と、

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \dots\dots\dots (2)$$

である。したがって、式 (2) を式 (1) に持込めば次式を得る。

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - f_z(t) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $f_z(t)$ を地盤内 (x', y', z') 点における点加振力として

$$f_z(t) = P e^{i\omega t} \cdot \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \dots\dots\dots (4)$$

なる定常調和加振力を仮定する。一方、応答 w の定常解を

$$w = w_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots (5)$$

とすると、式 (3) より次式を得る。

$$V_L^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + V_T^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \omega^2 w_0 = -\frac{P}{\rho} \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $V_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ：縦波の伝播速度、 $V_T = \sqrt{\mu/\rho}$ ：横波の伝播速度である。そこで、

$$k_T = \frac{\omega}{V_T} \text{ (波数)}, \quad z = \frac{V_L}{V_T} z'' \dots\dots\dots (7)$$

なる置き換えを行なうと、式 (6) は次式のようになる。

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z''^2} + k_T^2 w_0 = -\frac{P}{\mu} \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z''-z') \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) は波動方程式であって、その解 $w_0(x, y, z''|x', y', z')$ は明らかに、加振力の大きさ P/μ の Green 関数のことである。ここで境界条件を考慮せずに無限媒体を対象とするときの解を $w_0'(x, y, z''|x', y', z')$ とすると、式 (8) は 3重 Fourier 変換を用いて解くことができるが、これの解は無縁遠に逸散する波動を表わすものでなくてはならないので、 $r \rightarrow \infty$ で $\partial w_0'/\partial r \rightarrow -ik_T \cdot w_0'$ という形をとるはずである。これらの計算の過程を省略して結果⁷⁾のみを記すと、以下のようになる。

$$w_0'(x, y, z''|x', y', z') = \frac{P}{4\pi\mu} \frac{e^{-ik_T R}}{R} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z''-z')^2 \dots\dots\dots (10)$$

ところで、この $w_0'(x, y, z''|x', y', z')$ は無限領域のものであるから、図-1のように半無限媒体の Green 関数を $w_0(x, y, z''|x', y', z')$ とすると、境界面 ($z=0$) において応力が 0 であるという条件を考慮すると、鏡像原理により次式のように求められる。

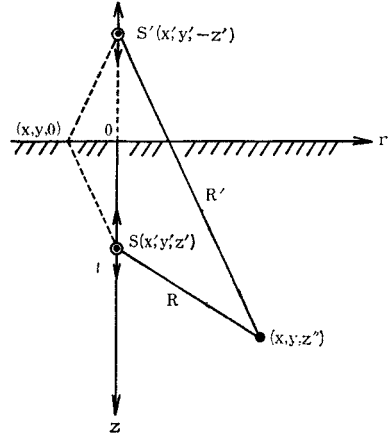


図-1 実点源・虚点源の模式図

$$w_0'(x, y, z''|x', y', z') = \frac{P e^{-ik_T R}}{4\pi\mu R} + \frac{P e^{-ik_T R'}}{4\pi\mu R'} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} k_T &= \frac{\omega}{V_T} \text{ (波数)} \\ R^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z''-z')^2 \\ R'^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z''+z')^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

したがって、加振点が地表面上 (原点) にあるとき、他の地表面上の鉛直変位 $w(r, 0)$ は、式 (5), (11) および (12) において、 $x'=y'=z'=0, z''=0$ として、次式のように得られる。

$$w(r, 0) = \frac{P e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \frac{e^{-ik_T r}}{r} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

ところで先述のように、田治見が導いた半理論式⁸⁾は

$$w = \frac{(1-\nu) P e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \frac{e^{-\kappa_1 r}}{r} \dots\dots\dots (14)$$

である。ただし、 ν ：Poisson 比、 μ ：せん断弾性係数、および $\kappa_1 = 1.33 \omega/V_T$ である。したがって式 (13) と田治見が導いた式 (14) とを比べると、後者は全体の係数が $1-\nu$ 倍、振動数が 1.33 倍になって評価されていることがわかる。しかしながら、これらの相違は以後の解析上にそれほど重大な差異を与えるものではなく、またわずかな修正により両式は完全に一致するので、両者はほぼ等しいと見なして大過なかるう。

(2) 地盤の動揺振動アドミッタンス

図-2 の上図のように、構造物が強制回転力 M をその底面中心の O 点のまわりに受けるとき、地盤との接触底面の各点が点振動源になっていると考えることができる。このとき、構造物の回転角 θ は底面内各点の振動源によって生ずる地盤内応力波の伝播の影響を総合した

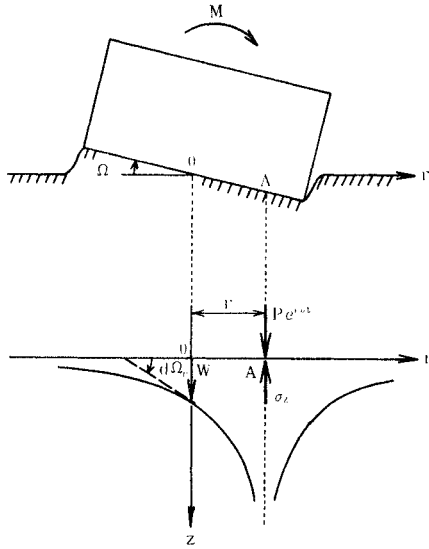


図-2 動揺回転角

ものであるとみなせる。この回転角 Ω を定義する方法には、構造物端点の変位の平均法⁹⁾などがあるが、本研究では各点源によって断面中心点Oに生ずる地盤傾斜角 $d\Omega_r$ の、断面全体における総和で表わす田治見の方法¹⁰⁾ によった。

ところで、図-2 の O 点の地盤傾斜角 $d\Omega_r$ は先に得た地表面点加振による場合の式 (13) より

$$d\Omega_r = \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{P e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \frac{1+ik_{TR}}{r^2} \cdot e^{-ik_{TR}r} \dots (15)$$

で与えられるが、この $d\Omega_r$ の評価を行なうためには、点荷重 $P e^{i\omega t}$ の接触面内における分布、したがってそれに対応する地盤内応力 σ_z の分布を知らなければならないことになる。

そこで本研究においても、1. で述べたように、Reissner 以来のほとんどの研究者が構造物と地盤との接触面における地盤の動的応力分布を静的な応力分布で代表させてきた方法にしたがって、鉛直応力 σ_z の分布を三角形分布ならびに Boussinesq 分布の2種類について仮

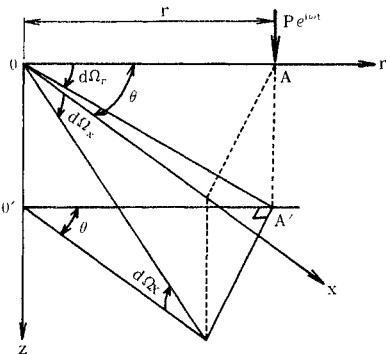


図-3 $d\Omega_r$ と $d\Omega_x$ との関係

定した。

ところで図-3を参照すると、地表面上の \overline{OA} 方向より水平に θ だけ振った方向 (x 方向) における地盤傾斜角 $d\Omega_x$ は、次のような関係式を満たしていることは明らかである。

$$\tan(d\Omega_x) = \cos\theta \cdot \tan(d\Omega_r) \dots (16)$$

しかるに、微小な弾性振動においては、回転角 $d\Omega_r$ 、 $d\Omega_x$ はともに小さな量であると思なされるので、式 (15) および式 (16) より近似的に次式が成り立つとしてよからう。

$$d\Omega_x = \cos\theta \cdot d\Omega_r = -\frac{P e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot (1+ik_{TR}) e^{-ik_{TR}r} \dots (17)$$

さて一般の構造物の断面では、強制回転力の方向が任意であるとき、構造物の動揺振動の方向が入力方向と一致することはまれであろう。たとえば図-4のような楕円断面においては、外力が x 軸に対して角 θ_0 の方向に作用したとき、地盤反力のつり合いから、必ずしも応答の方向と入力方向とは一致しない。すなわち、構造物は新たな方向 (x 軸とのなす角 θ_0^*) につり合い位置を見出すことになる。このつり合いの位置というのは、図-4 の断面中心点Oにおける回転角が0になる方向が回転角 (ϕ 軸) と一致し、それと直角方向 (ψ 軸) が新しい応答の方向である、ということで説明されよう。

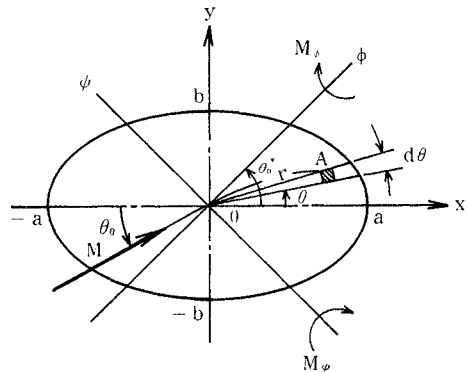


図-4 入力方向角 θ_0 と応答方向角 θ_0^* (楕円断面)

そこで図-4のように、強制外力モーメント M の作用方向を $\theta = \theta_0$ 、応答の方向を $\theta = \theta_0^*$ とすると、 ϕ 軸まわりおよび ψ 軸まわりの分モーメント、 M_ϕ および M_ψ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_\psi &= M \cos(\theta_0^* - \theta_0) \\ M_\phi &= M \sin(\theta_0^* - \theta_0) \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

したがって、式 (18) の分モーメント M_ϕ による場合には、接触面内の A 点载荷による O 点下に生ずる ϕ 軸、 ψ 軸まわりの回転角をそれぞれ $d\Omega_{\phi\phi}$ および $d\Omega_{\psi\psi}$

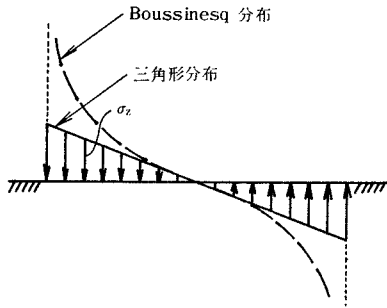


図-5 接触圧 σ_z の分布

とすると、これらは式 (17) を利用して次のように得られる。

$$d\Omega_{\phi\phi} = \frac{\sigma_z \cdot r dr d\theta \cdot e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot \frac{1+ik_T r}{r^2} \cdot \sin(\theta_0^* - \theta) \cdot e^{-ik_T r} \dots\dots\dots(19)$$

$$d\Omega_{\phi\phi} = \frac{\sigma_z \cdot r dr d\theta \cdot e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot \frac{1+ik_T r}{r^2} \cdot \cos(\theta_0^* - \theta) \cdot e^{-ik_T r} \dots\dots\dots(20)$$

ところで、式 (19)、(20) を評価するためには、接触圧 (鉛直応力) σ_z の分布を知らねばならないが、この概略を示したのが 図-5 である。ここでは σ_z を三角形分布と仮定するとき、 ϕ 軸まわりの分モーメント M_ϕ による応力分布 σ_z は、 ϕ 軸まわりの断面 2 次モーメントを I_ϕ とすると、次式で与えられる。

$$\sigma_z = \frac{M_\phi}{I_\phi} r \sin(\theta_0^* - \theta_0), \theta_0^* - \pi \leq \theta \leq \theta_0^* \dots\dots\dots(21)$$

ただし、 $I_\phi = \pi ab \left(\frac{a^4}{4} \sin^2 \theta_0^* + \frac{b^2}{4} \cos^2 \theta_0^* \right)$

したがって、この式 (21) の σ_z を式 (19)、(20) に持込んで、全断面について積分したものを、おのおの $\Omega_{\phi\phi}$ および $\Omega_{\phi\phi}$ とすると

$$\begin{aligned} \Omega_{\phi\phi} &= 2 \int_{\theta_0^* - \pi}^{\theta_0^*} \int_0^R \frac{M_\phi}{I_\phi} r \sin(\theta_0^* - \zeta) \cdot \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \frac{(1+ik_T r)}{r^2} \sin(\theta_0^* - \zeta) e^{-ik_T r} r dr d\zeta \\ &= \frac{aM_\phi}{\pi\mu I_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin^2(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) d\zeta \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

となる。同様にして次式を得る。

$$\Omega_{\phi\phi} = -\frac{aM_\phi}{\pi\mu I_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \cdot \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) d\zeta \dots\dots\dots(23)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} P(k_T R_s) &= \frac{k_T R_s}{k_T a} \left[\frac{2 \sin k_T R_s}{k_T R_s} - \cos k_T R_s \right. \\ &\quad \left. - i \left\{ \frac{2(1 - \cos k_T R_s)}{k_T R_s} - \sin k_T R_s \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} k_T R_s &= \frac{k_T a}{\sqrt{1+k_b^2 \sin^2 \zeta}}, \quad k_b = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \\ (a \geq b > 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

一方、図-4 における ϕ 軸まわりの回転においては、断面 2 次モーメントを I_ϕ とすると、鉛直応力 σ_z の分布は次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{M_\phi}{I_\phi} \cdot r \cos(\theta_0^* - \theta) \\ \theta_0^* - \frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \theta_0^* + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

ただし、 $I_\phi = \pi ab \left(\frac{a^2}{4} \cos^2 \theta_0^* + \frac{b^2}{4} \sin^2 \theta_0^* \right)$

この σ_z による、 ϕ 軸まわりと ϕ 軸まわりの全回転角をおのおの、 $\Omega_{\phi\phi}$ および $\Omega_{\phi\phi}$ とすると、同様にして次式が得られる。

$$\Omega_{\phi\phi} = \frac{aM_\phi}{\pi\mu I_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin^2(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) d\zeta \dots\dots\dots(26)$$

$$\Omega_{\phi\phi} = \frac{aM_\phi}{\pi\mu I_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \cdot \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) d\zeta \dots\dots\dots(27)$$

ここに、

$$k_T R_c = \frac{k_T a}{\sqrt{1+k_b^2 \cos^2 \zeta}} \dots\dots\dots(28)$$

かくして、分モーメント M_ϕ , M_ϕ による ϕ 軸・ ϕ 軸まわりの全回転角をおのおの、 $\Omega_{\phi\phi}$ および $\Omega_{\phi\phi}$ とすると、次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \Omega_{\phi\phi} &= \Omega_{\phi\phi} - \Omega_{\phi\phi} = \frac{aM_\phi e^{i\omega t}}{\pi\mu} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \\ &\quad \cdot \left[\frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \sin(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) \right] d\zeta \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\phi\phi} &= \Omega_{\phi\phi} - \Omega_{\phi\phi} = \frac{aM_\phi e^{i\omega t}}{\pi\mu} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \\ &\quad \cdot \left[\frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \sin(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) \right] d\zeta \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

先述のように回転軸を与える方向は、式 (29) の ϕ 軸まわりの回転角 $\Omega_\phi = 0$ を満足する方向であり、このときの根である θ_0^* が応答の方向を示すものである。

ところで、 $\Omega_\phi = 0$ をそのまま解いて得られる応答方向角 θ_0^* は、振動中は逸散減衰効果のため上記の $P(k_T R)$ が複素数なので、同様に複素数になる。しかるに通常の地盤と構造物の関係においては、 $a/V_T \ll 1(\text{sec})$ であるから、外力の円振動数 ω を地震動の卓越振動数 ω_k くら

にとる場合は、 $kra = a\omega/V_T \leq 1$ 程度の場合を想定すればよいものと思われる。このような振動数領域では、回転角 Ω_ϕ における減衰効果（虚数部）の占める割合はそれほど大きくなく、その実部 $\text{Re}[\Omega_\phi]$ で支配されると考えても差しつかえないであろう。このようにして、式 (29) より次式を満たす θ_0^* が求める応答の方向を与えることになる。

$$\int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \left[\frac{R_s}{a} \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \cdot \left\{ \frac{2 \sin k_T R_s}{k_T R_s} - \cos k_T R_s \right\} - \frac{R_c}{a} \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \cos(\zeta - \theta_0^*) \cdot \left\{ \frac{2 \sin k_T R_c}{k_T R_c} - \cos k_T R_c \right\} \right] d\zeta = 0 \dots\dots (31)$$

この式 (31) を満たす応答の方向角 θ_0^* (ϕ 軸まわり) における、地盤の振動アドミッタンス A_R 、あるいはその逆数である回転ばね剛性 K_R は、式 (30) より次式のような解析的表示となる。

$$A_R = \frac{1}{K_R} = \frac{\Omega_\phi}{M e^{i\omega t}} = \frac{a}{2\mu I_0} \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \cdot \left[\frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi^*} \sin(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) + \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi^*} \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) \right] d\zeta \dots\dots (32)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \frac{\pi a^2}{4}, \quad I_\phi^* = \left(\frac{b}{a}\right)^3 (1 + k_b^2 \cos^2 \theta_0^*) \\ I_\phi^* &= \left(\frac{b}{a}\right)^3 (1 + k_b^2 \sin^2 \theta_0^*) \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

さらに式 (32) の静的な場合は $\omega \rightarrow 0$ とし、このときの A_R, K_R をおのおの λ_R, k_R と記すと、

$$\lambda_R = \frac{1}{k_R} = \frac{a}{2\mu I_0} \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \cdot \left[\frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi^*} \sin(\zeta - \theta_0) + \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi^*} \cos(\zeta - \theta_0^*) \right] d\zeta \dots\dots (34)$$

次に 図-6 のような矩形断面の場合について考える。この場合も前記の楕円断面の場合と同様に、接触面での応力 σ_z の分布は三角形分布であると仮定する。したがって、応答方向角 θ_0^* が定めれば、振動アドミッタンスおよび回転ばね剛性は楕円断面の場合と同様に、式 (32), (34) と形式的には同じものを用いて計算される。しかしながら、矩形の場合では、 ϕ 軸および ψ 軸まわりの断面 2 次モーメント I_ϕ および I_ψ は

$$\left. \begin{aligned} I_\phi &= \frac{4}{3} ab(a^2 \sin^2 \theta_0^* + b^2 \cos^2 \theta_0^*) \\ I_\psi &= \frac{4}{3} ab(a^2 \cos^2 \theta_0^* + b^2 \sin^2 \theta_0^*) \end{aligned} \right\} \dots\dots (35)$$

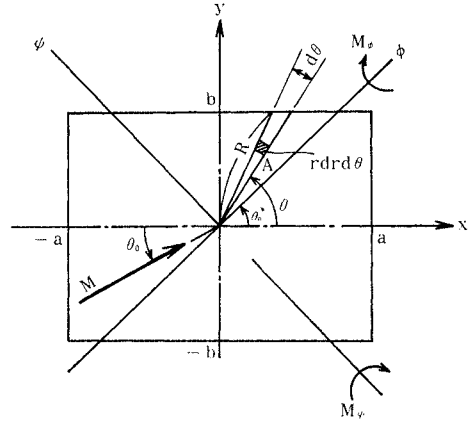


図-6 入力方向角 θ_0 と応答方向角 θ_0^* (矩形断面)

を用いねばならない。このとき矩形断面の周辺上では隅角部が存在するので、応答方向角 θ_0^* については、 $0 \leq \theta_0^* \leq \tan^{-1}(b/a)$, $\tan^{-1}(b/a) \leq \theta_0^* \leq \tan^{-1}(a/b)$ および $\tan^{-1}(a/b) \leq \theta_0^* \leq \pi/2$ の 3 つの場合に分けて計算せねばならない。さらにまた、 σ_z を Boussinesq 分布と仮定するときは、田治見¹¹⁾と同様の方法により、上記の諸量を導きうるが、ここではそれらを省略する。

(3) 任意方向強制力を受ける構造物の動揺振動

以上のようにして、入射方向 θ_0 に対する応答方向 θ_0^* が定められるとともに、この応答方向における動揺振動に関するアドミッタンス A_R が得られたので、構造物の $\theta = \theta_0^*$ 方向の運動は容易に記述される。すなわち、図-4 あるいは 図-6 を参照すれば、強制回転力 M に対する ϕ 軸まわりの動揺振動に関して

$$J \frac{d^2 \Omega_\phi}{dt^2} + \frac{\Omega_\phi}{A_R} = M_\phi \dots\dots (36)$$

のように書き表わされる。ここに、 M_ϕ は強制回転力 M の $\theta = \theta_0^*$ 方向成分、すなわち回転軸まわりの分モーメントであって、式 (18) で与えられるものであるから、

$$M_\phi = M \cos(\theta_0^* - \theta_0) \cdot e^{i\omega t} \dots\dots (37)$$

とおける。したがって、式 (36) の定常解 Ω_ϕ は以下のように、容易に得られる。

$$\Omega_\phi = \frac{M \cos(\theta_0^* - \theta_0) \cdot e^{i\omega t}}{\frac{1}{A_R} - J_\phi \omega^2} \dots\dots (38)$$

ただし、 J_ϕ は構造物底面の回転軸まわりの慣性モーメントである。ところで、振動数 $\omega > 0$ では常に逸散減衰効果が存在するため、式 (24) における $P(k_T R)$ は一般に複素数であり、振動アドミッタンス A_R も同様に複素数となる。したがって、式 (38) の分母は加振振動数 ω に対して 0 とはなり得ず、回転角 Ω_ϕ は有限振幅値にとどまることを示している。

(4) 数値計算結果とその考察

数値計算においては、外乱の作用方向角およびその応答方向角、振動アドミタンスおよび構造物の応答回転角について、無次元振動数を媒介にして検討を加える。

図-7 および 図-8 は、外乱の作用方向角 θ_0 と応答方向角 θ_0^* との関係を無次元振動数 $k_{\tau}a=1$ の場合について図示したものであり、前者が楕円断面の、後者が矩形断面の場合である。また図中実線で示したものが、接触圧を三角形分布と仮定した場合で、点線が Boussinesq 分布を仮定した場合である。ここで入力方向角 θ_0 と応答方向角 θ_0^* は 図-4 および 図-6 からわかるように、断面の長軸方向とのなす角であるが、三角形分布の場合では楕円・矩形断面とも入力方向角 θ_0 がほぼ 22.5°

より大きな角になると、応答方向角 θ_0^* は急速に大きくなり、かつまた偏平な断面の場合ほど応答の方向が短軸方向に傾きがちであることがよく示されている。ところで、Boussinesq 分布を仮定した場合には、断面が楕円と矩形の場合では応答方向角 θ_0^* に著しい差異があることがわかる。すなわち楕円断面の場合では、入力方向角 θ_0 と応答方向角 θ_0^* とのくい違いはそれほど著しくないが、矩形断面の場合は両者の差は大きく、むしろこの場合は接触圧を三角形分布と仮定した場合の傾向と類似しているといえよう。これは仮定の接触圧分布による縁圧力が、互いに大幅に異なることによるのであろう。

図-9, 10 は応答方向角 θ_0^* の入力振動数に対する安定性を調べたものである。これらは三角形分布に対する楕円・矩形断面の場合であり、先述のように、振動数が $k_{\tau}a \leq 2$ 程度で見ると、応答方向角 θ_0^* は振動数にほとんど依存しなく、ほぼ一定値を示し、断面が偏平なほど短軸方向への接近が早まる傾向は 図-7, 8 のそれと対応していることがわかる。このことは加振方向さえ

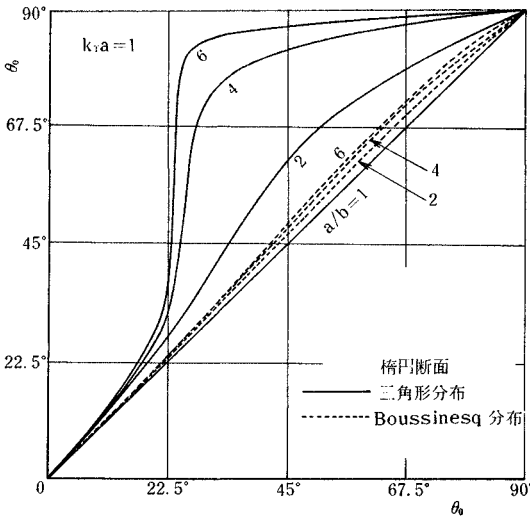


図-7 入力方向角 θ_0 と応答方向角 θ_0^* との関係

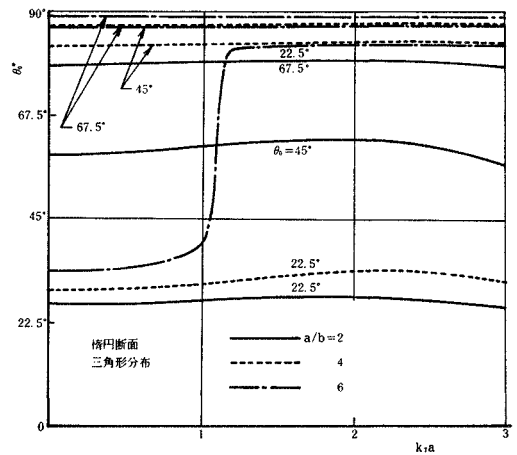


図-9 応答方向角の振動数特性

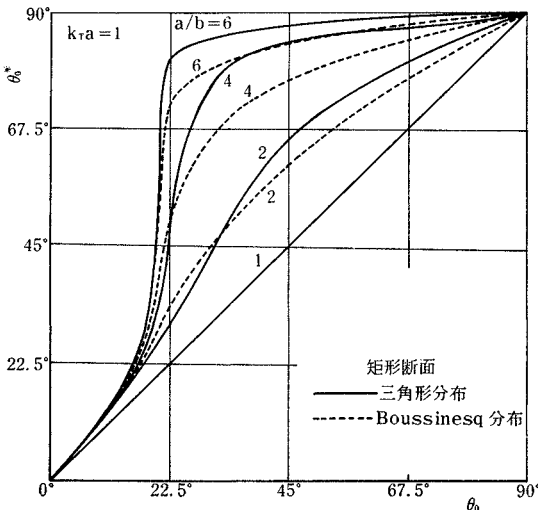


図-8 入力方向角 θ_0 と応答方向角 θ_0^* との関係

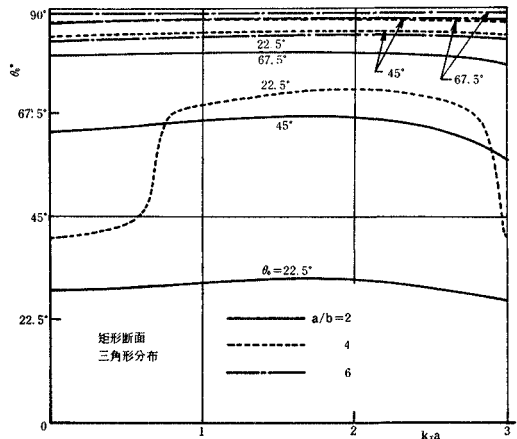


図-10 応答方向角の振動数特性

一定であれば構造物の応答方向は、地震動のように複雑なスペクトル構造の入力に対しても安定した方向を示すものといえよう。さらにこの振動数に対する安定性は入力方向が短軸方向に近づくにつれて高まることが知られる。

ところでこれより以後の図では、地盤のアドミッタンス A_R を無次元表示するため、 A_R を半径 a の円断面の場合の静的アドミッタンス $\lambda_0(\omega \rightarrow 0)$ でもって除して、

$$A_R/\lambda_0 = r_1 - ir_2 \quad (r_1, r_2 : \text{実数}, i : \text{虚数単位})$$

としたものについて図示した。

さて 図-11 (a), (b) はそれぞれ三角形分布の場合の楕円・矩形断面における振動アドミッタンス A_R の実部・虚部を示したものである。楕円断面の場合のアドミッタンス A_R の実部 r_1 は、入力方向角が $0 \leq \theta_0 \leq 22.5^\circ$ ではほぼ一定な傾向を示すが、扁平な断面ほどこの $\theta_0 > 22.5^\circ$ において、急激に増大し以後の増加は緩やかになる。一方、虚部 r_2 は応答方向角 θ_0^* が急変する近傍では若干の変動が見られるが、概してその変動は小さく、実部 r_1 に比べてその値自身も小さいことがわかる。したがって、アドミッタンス A_R の大勢は実部 r_1 によって左右されることになり、長短径比 a/b が大すなわち扁平な断面の場合ほど、構造物を揺れやすくする傾向があり、入力方向が 22.5° より大きいときは特にその傾向が著しいことがわかる。図-11 (b) の矩形断面の場合においては、図-8 に対応して応答方向角 θ_0^* が楕円断面の場合より、入力方向角 θ_0 の小さい範囲で急変するため、それに応じてアドミッタンス A_R の実部 r_1 も追従しているようである。実部 r_1 および虚部 r_2 は楕円断面の場合とほぼ同様の傾向を示しているが、断面の長短径比 a/b が同一の場合は実部 r_1 は一般に楕円断面

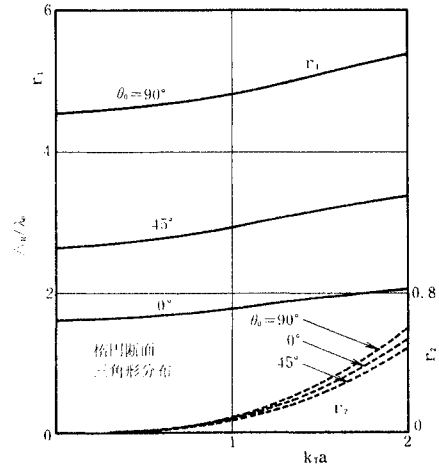
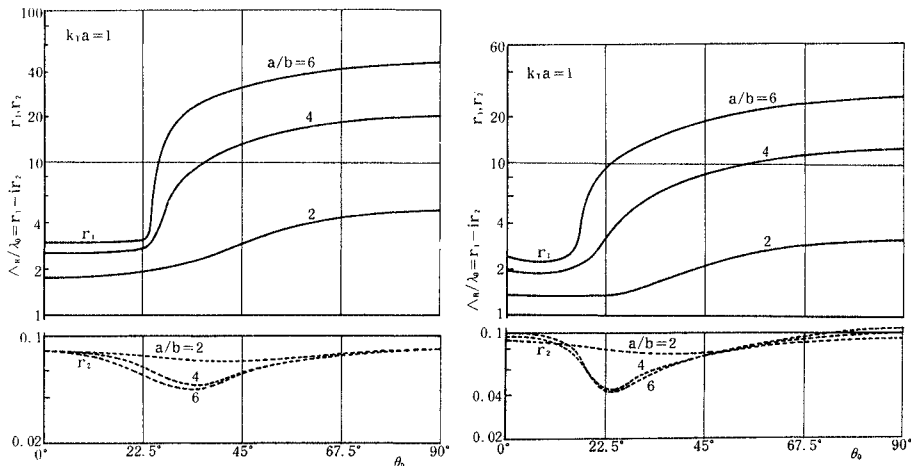


図-12 アドミッタンスの振動数特性

より小さく、したがってそれだけ地盤の抵抗が強まることを示している。

図-12 は接触圧を三角形分布と仮定したときの $a/b = 2$ の楕円断面の場合について、振動アドミッタンス A_R に対する振動数の影響を図示したものである。同図より実部 r_1 は振動数 kTA とともに若干増加するが、このような $kTA \leq 2$ の範囲ではその変動は顕著ではない。一方、虚部 r_2 はその値は実部 r_1 に比べて小さく、入力方向角 θ_0 の相違による r_2 の差は小さいが、 kTA の増大とともに加速度的に増大することを示している。このようにアドミッタンス A_R は、その実部 r_1 に大きく依存しており、したがって短軸方向に近い入力を受けるときは A_R は増大し、応答を増大させる働きをする。

次に構造物の断面変化とアドミッタンスとの関係を示したのが、図-13 である。長軸方向 ($\theta_0 = 0^\circ$) に加振される限り、アドミッタンス A_R の実部 r_1 は断面の扁平



(a) 楕円断面 (三角形分布)

(b) 矩形断面 (三角形分布)

図-11 入力方向角 θ_0 とアドミッタンス A_R との関係

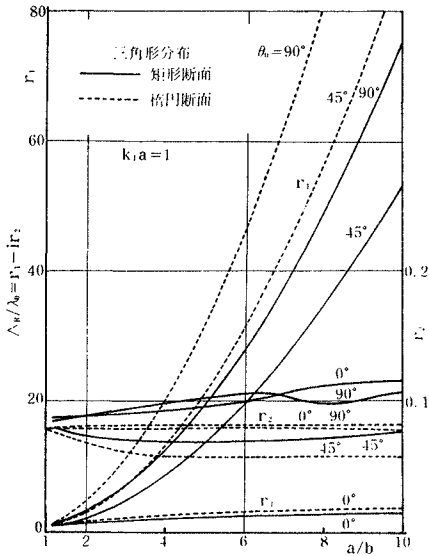


図-13 断面変化に対する振動アドミッタンス

さにほとんど依存せず、かつ楕円・矩形断面の両者による差は小さいが、加振方向が短軸方向へ近づくにつれて、実部 r_1 は断面の偏平さとともに急速に増大し、構造物が揺れやすくなることを示しており、この傾向は矩形断面より楕円断面のほうが著しい。この矩形・楕円断面における差は、主として回転軸まわりの断面2次モーメントの大小に起因するものであろう。一方、虚部 r_2 の値自身は小さいが、逆に楕円断面のほうが矩形のそれよりも若干大きく、長短径比 a/b の大小や加振方向にはあまり影響を受けずに、ほぼ一定値となるようである。したがって、実部 r_1 の傾向と比較すると、偏平な断面ほど虚数部 r_2 の影響は小さく評価されるといえる。

以上の結果および基準円振動数 ω_0 として、 $\omega_0 = \sqrt{k_0/J_0}$ ($k_0 = \pi \mu a^3/2$: 式(34)より半径 a の円断面に対する静的回転ばね剛性、 J_0 : 円断面基礎の慣性モーメント)を用いて、式(38)の応答角変位 θ_ϕ を計算したのが 図-14、15 である。これらは、いずれも接触圧として三角形分布を仮定したときの応答角変位に関する計算例であって、前者は楕円断面 ($a/b=2$) について、後者は矩形断面 ($a/b=2$) について図示している。これらの図より、応答角変位は地盤のアドミッタンスあるいは回転ばね剛性の特性をよく反映しており、長軸方向に加振されるほど、共振点の位置は高振動数側へ移行し、かつその共振振幅は減衰効果と剛性効果の増加のため減少してくることをよく示している。このように、地表面上の構造物においては長・短径の異なる断面の構造物は、短軸方向に揺れやすい傾向があり、かつその場合の応答変位はきわめて大きくなる可能性があるため、実地震動の卓越振動数との兼ね合いで、設計上に十分の対策を講じなければ

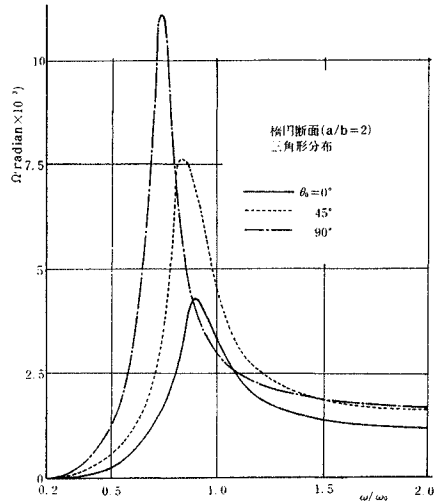


図-14 回転角の理論共振曲線

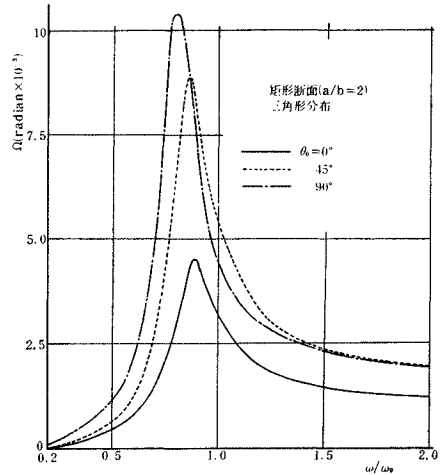


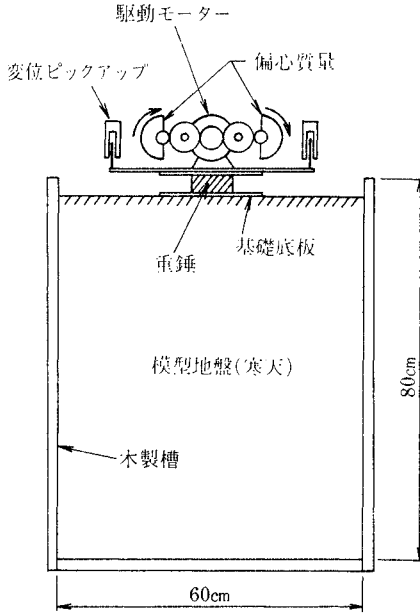
図-15 回転角の理論共振曲線

ならないものといえよう。

3. 模型剛構造物の動揺振動実験

理論の妥当性を確かめるために、以下のような実験を行ない考察を行なった。すなわち、図-16のように 50 cm×60 cm×80 cm の木製槽中に模型地盤を作成し、その表面中央に試作した小型の回転動発生装置を載せ、回転数および入力方向を変化させることにより実験を行なった。

また1つの無次元量 ω (振動数)× L (長さ)/ V (伝播速度) に対して、各原型と模型との比を $\omega_p/\omega_m=1$ 、 $L_p/L_m=100$ および原型地盤の横波伝播速度 $V_p=400$ m/sec を想定すると、模型地盤では $V_m=4$ m/sec となる。したがって、原型と模型地盤の密度および Poisson 比が



図一16 模型地盤上振動実験の概略図

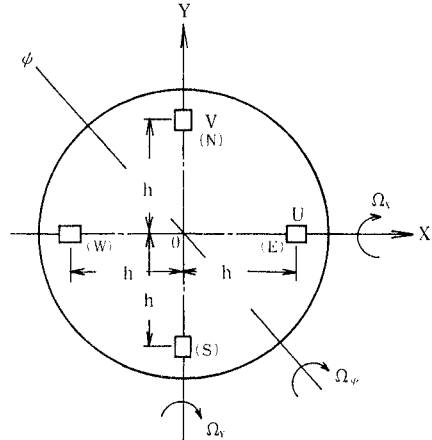
大差ないとすると、両者の弾性係数比は $E_p/E_m \cong 10^4$ となる。そこで模型地盤の材料として、伝播速度をある程度自由に变化しうる市販の寒天を用い、その静的荷重試験を行なった結果、ほぼ線形材料と見なして差しつかえないことがわかった。種々の濃度による平均的な弾性係数は表一1の値となったが、オーダー的には上記の E_p/E_m の比を概略満足するといえよう。

表一1 寒天の弾性係数

| 寒天濃度 (%) | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
|---------------------------|-----|-----|-----|
| E (gr/cm ²) | 230 | 400 | 520 |

さらにまた、起振器としては、市販の超小型モータで図一16の略図のように水平に対向する偏心質量部に互いに位相が180°異なる上下動を発生せしめ、したがってこの起振器は中心まわりに偶力すなわち回転動を発生するものを試作した。このとき基礎底板は、断面積一定のものを数種、アルミニウム材(長径(辺)5~10cm)を用いて作成し、図一17のように回転動を測定するため、断面主軸上に計4個の非接触型変位ピックアップを設置し、これの上下変位を電気的に測定した。

なお寒天地盤は大きさが有限であるから、固有振動が発生するが、計算によればその最小固有振動数は約2.6 Hzである。したがって、後出の図一20, 23のように、基礎—地盤系の共振が5~10 Hzであることから、地盤共振の影響を受けるようであるが、加振源が地盤の拡がりに対して比較的小さく(基礎底板長径(辺)/木製槽幅 $\cong 1/5$ 以下)、かつ実験は極力微小振幅にとどめたので、



図一17 変位ピックアップ配置図

地盤共振による影響は無視しうるほど小さかった。

ところで実験においては、図一17におけるように、断面の主軸上の端点の上下変位を測定したので、X, Y軸まわりの回転角 Ω_x, Ω_y が容易に得られる。したがって、 ϕ 軸まわりの回転角 Ω_ϕ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &= \tan^{-1} \sqrt{\tan^2 \Omega_x + \tan^2 \Omega_y} \\ &\cong \tan^{-1} \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

したがって、応答方向角 θ_0^* は次式で算出すればよい。

$$\theta_0^* = \frac{\tan \Omega_y}{\tan \Omega_x} \cong \frac{\Omega_y}{\Omega_x} \dots \dots \dots (40)$$

図一18 (a), (b) は、楕円断面の場合における応答方向角 θ_0^* が、加振振動数によっていかに影響を受けるかを図示したものであるが、記録紙上より肉眼で直接に読み取った値はかなりのばらつきを示しており、これをデータ群として整理するため、一定方向の入力に対する応答値ごとに、最小2乗法を用いて1次直線を当てはめてみたのが、図中の点直線であり、またこの点直線まわりのデータのばらつきを示す指標として推差(確率誤差) f をも合わせ図示した。図一18 (a), (b) は互いに模型地盤の濃度および断面の長短径比 a/b の値が異なる場合についての内容であるが、構造物底面反力の不釣り合いをもたらすのが主として断面2次モーメントであることからして、応答方向角 θ_0^* は寒天濃度よりむしろ断面の長短径比 a/b の違いによって生ずる結果であると考えられる。両図において、入力方向が長軸方向に近いときは、応答方向角 θ_0^* は振動数の増加とともに減少する傾向がある。

一方それが短軸方向に近づくと、 $a/b=1.5$ では逆に増大するが、 $a/b=2$ ではいくぶん緩やかにはなるが依然減少の傾向は変わらない。したがって、理論上での振動数に対して θ_0^* がほぼ一定である傾向とは若干異なるようである。さらにまた、最確値(点直線)まわりの

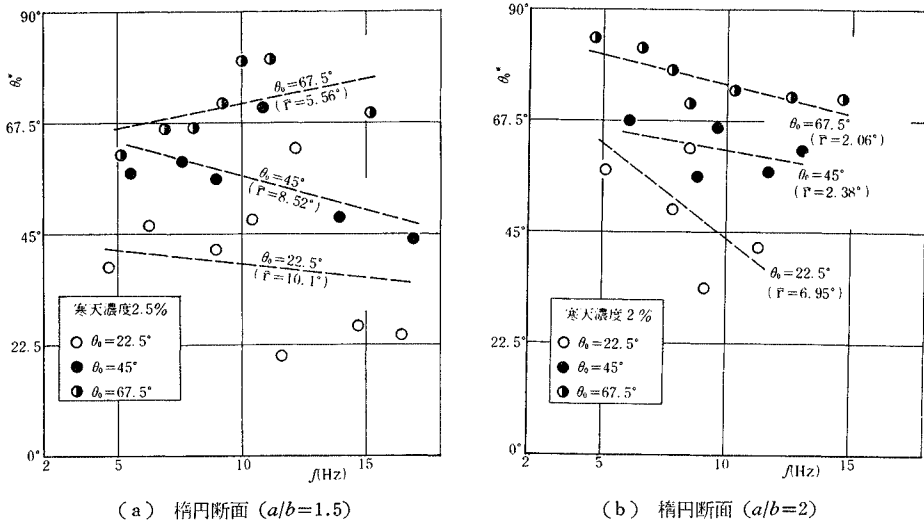


図-18 応答方向角の振動数特性

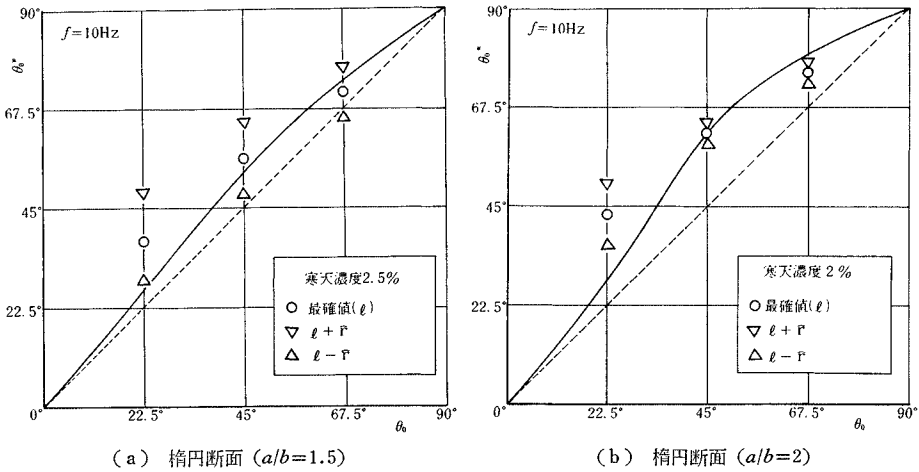


図-19 入力方向角と応答方向角との関係

データのばらつき具合を示す推差 r は、入力方向が短軸方向に近づくほど小さくなるのがわかるが、このことは実験においても短軸方向に揺れやすく、それだけ安定した応答方向であることを示しているといえよう。

ところで、入力方向角 θ_0 と応答方向角 θ_0^* について整理したのが、図-19の(a),(b)であって、理論曲線と比較するために一定振動数 $f=10$ Hz の場合を示している。図中には、先述の最小2乗法で得られる直線上の点(最確値)およびそれに推差 r を加減した値を示しているが、 θ_0 が小さいときは $a/b=1.5$ および2の場合ともに、 r の値は大きくなり、それだけ測定の精度が悪くなることを示している。その点では $a/b=2$ における $\theta_0 > 45^\circ$ では r が非常に小さくなり精度のよい測定であることになるが、この傾向は図-18の(a),(b)のそれと同様の理由により説明されよう。また、図中の理論

曲線である実直線と測定値との対応を見ると、一般に実験で測定される θ_0^* のほうが理論上のそれよりも若干大きくなるようであるが、 $\theta_0 > 45^\circ$ すなわち入力方向がより短軸方向に接近してくると、両者の傾向はほぼ対応しているのに比して、 $\theta_0 = 22.5^\circ$ においては実験値のほうが相当大きいようである。このことは、推差 r の大きさからしても、その応答方向と運動が不安定であることによるものと推察されるが、これは外力の作用方向が断面の曲率の大なる方向に近いときは、地盤の支持力がその点に集中するために、動的な安定状態が長く保たれないことによるのであろう。さて小型起振器により励起された模型構造物は、入力方向により、また振動数により異なった応答を示したのが、図-20の周波数応答曲線である。この図の連続曲線は実験測定値を滑らかに結んだ実験曲線であって、図-14の理論周波数

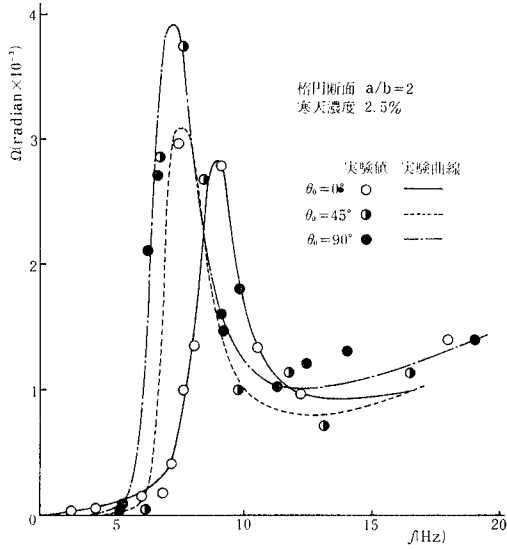
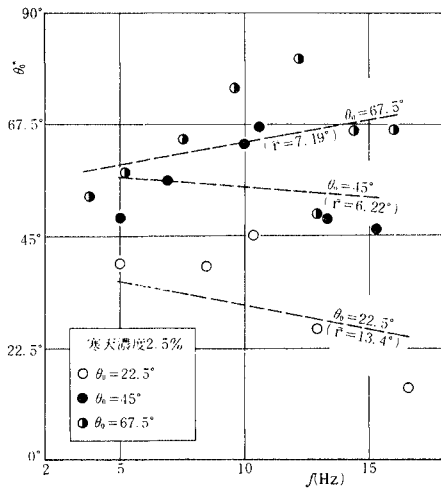


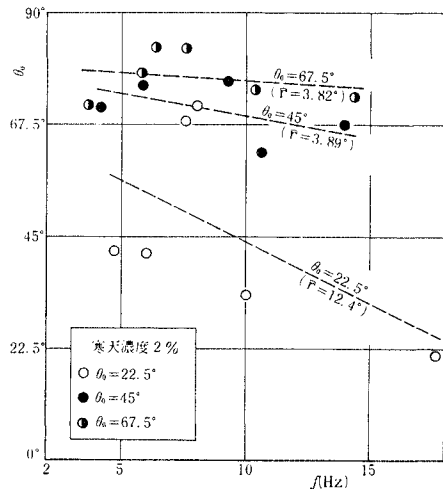
図-20 回転角の実験共振曲線

応答曲線と対応するわけである。実験においても、入力
が長軸方向に近いときは共振点の位置が高振動数側へ移
行し、その振幅を減じる傾向はかなりよく類似している
といえよう。

次に、矩形断面構造物の応答方向角 θ_0^* の周波数依存
性を示したのが 図-21 (a) および (b) である。図の
(a), (b) はそれぞれ長軸・短軸の比 $a/b=1.5$ および 2
の場合について示したものであるが、楕円断面の場合と
同様に応答方向角 θ_0^* は、入力方向が長軸方向に近いと
きは振動数の増加とともに減少する傾向があり、入力方
向 θ_0 が短軸に接近すると、振動数に対して $a/b=1.5$ で
は増大ぎみであり、 $a/b=2$ のようにやや扁平な断面で
はその減少の割合は小さくなる。また最確値を示す直線
のまわりのデータ分散度を示す推差 \hat{r} は、扁平な断面
ほど小さくなり、応答方向角は安定してくることを示し
ている。

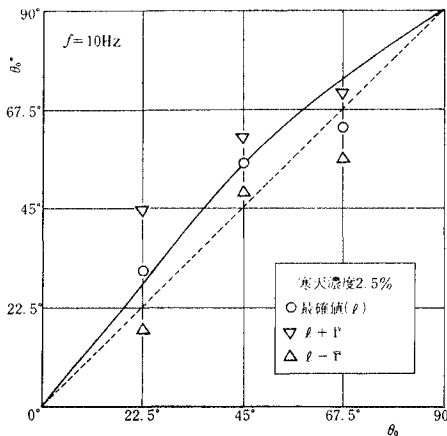


(a) 矩形断面 ($a/b=1.5$)

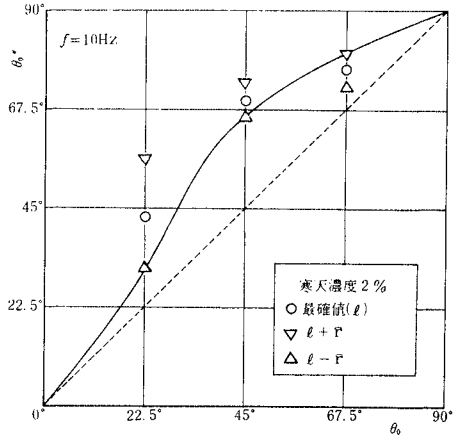


(b) 矩形断面 ($a/b=2$)

図-21 応答方向角の振動数特性



(a) 矩形断面 ($a/b=1.5$)



(b) 矩形断面 ($a/b=2$)

図-22 入力方向角と応答方向角との関係

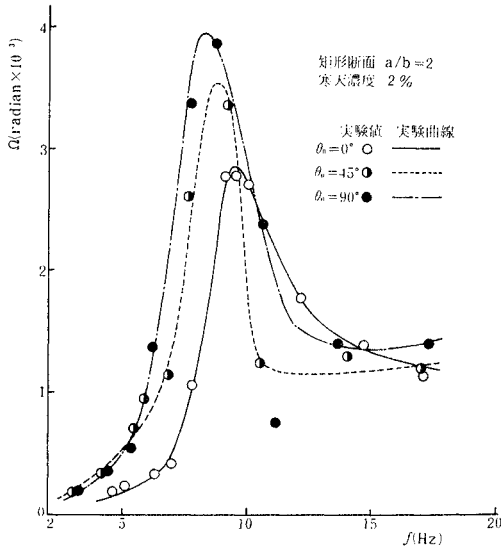


図-23 回転角の実験共振曲線

図-22 (a), (b) は、同様に一定振動数 $f=10$ Hz における、応答方向角の最確値と推差を図示し、理論曲線と対比したものである。同図 (a) における $a/b=1.5$ の場合は、最確値 $\theta_0=67.5^\circ$ の場合以外では理論曲線とほとんど一致していることがわかる。 $\theta_0=67.5^\circ$ において $\theta_0^* < \theta_0$ となるのは、楕円断面の場合と異なり、矩形断面の隅角部においては地盤に大きな応力集中が起こるために、振動中になんらかの不安定現象に至ったものとも推定される。一方、(b) の $a/b=2$ の矩形断面においては、入力方向が $\theta_0 > 45^\circ$ の領域では推差 \hat{r} は相当小さくなり、応答方向角 θ_0^* の安定した動揺振動が生じているといえよう。ところが、 $\theta_0=22.5^\circ$ の方向に入力するときは \hat{r} はかなり大きくなり、振動は不安定となって測定値はばらつきが激しくなるが、外力の作用方向が矩形断面の隅角部に向っているときはどうしても隅角部直下の地盤が構造物を大きく支えることになるので、不安定な現象が生じやすいものと解されよう。図-23 は任意方向に加振されたときの矩形断面構造物の回転角 ϕ の周波数応答曲線であるが、やはり外力の作用方向が長軸方向に近いときは、共振点は高振動数側へ移動し、共振振幅は減少するようであり、理論共振曲線の図-15の傾向とよく対応している。

4. 結 言

地表面上の構造物が、その断面内の任意方向へ加振された場合、地盤と構造物の相互作用の結果より生ずる構造物の動的挙動を理論・実験の両面より追求したが、これらによる成果を要約すると以下ようになる。

(1) 地表面上にある構造物の底部接触面における動的鉛直変位は、水平変位を考慮しない半無限弾性体の Green 関数で近似しうる。

(2) 接触面から放射される波動の逸散によって減衰効果が生じ、構造物の理論応答回転角は有限値にとどまる。

(3) 外力が構造物断面に一定の角度で作用するとき、その断面が偏平なほど短軸方向に揺れやすいことが、理論および実験の両面から確かめられた。

(4) 模型地盤での室内実験によると、偏平な断面の場合は外力の作用の方向が短軸に近いほど応答方向角は安定した値を示すが、断面の曲率の大なる付近あるいは隅角部に近いときは、応答方向角は不安定になって、その測定精度はきわめて悪くなる。

(5) 応答方向角は、理論上は外力の振動数にほとんど依存することなく一定であるが、模型地盤上での実験によると振動数とともにやや減少する傾向にある。

(6) 動揺振動の回転角の周波数応答曲線の傾向は、理論と実験とにおいて比較的よく対応しており、楕円・矩形断面においては外力が短軸方向に作用するときの共振点は低振動数側へ移行して応答は増大し、長軸方向に作用する場合の共振点は高振動数側へ移り、その共振振幅は減少する。

なお本研究においては、実地盤上での動揺振動実験も行なったが、その結果については割愛した。また地震等の外力を受けるときは、水平および動揺振動が連成するが、同様の手法で解析しうることはいうまでもない¹²⁾。さらに、本文中の応答方向角 θ_0^* については、入力を基礎の主軸方向に分解して、それぞれの方向の回転角を求め、以後は本実験の整理におけると同様にこれらの回転角を合成して回転主軸を求める、という実用的な方法も考えられるが、これとの比較は行なわなかった。

最後に本研究は、著者が京都大学工学部に在職中の昭和 45~46 年頃に同大学の後藤尚男教授の指導を受けて行なったものであり、ここに深く感謝の意を表する次第である。また実験等においては、阪神高速道路公団 古池正宏氏（当時大学院修士課程学生）らの協力を得たことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Lamb, H. : On the Propagation of the Tremors on the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions of Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 203, 1904, pp. 1~42.
- 2) Reissner, E. : Stationäre, axialsymmetrische durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraums, Ingenieur-Archiv, Vol. VII, 1936.12, pp. 381~396.
- 3) 田治見 宏 : 耐震理論に関する基礎的研究, 東京大学生産技術研究所報告, 第 8 巻, 第 9 号, 1959, pp. 170~215.

- 4) たとえば, Lysmer, J. and F.E. Richart: Dynamic Response of Footings to Vertical Loading, Proc. of ASCE, SM 1, 1966.1, pp. 65~90
- 5) 秋吉 卓: 地表面上の剛構造物の回転振動における方向性について, 土木学会第 25 回年次学術講演会講演集, I, 1970.11, pp. 603~606.
- 6) 後藤尚男・秋吉 卓・ほか 3 名: 剛基礎体の動揺振動の方向性に関する基礎的研究, 昭和 46 年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, 1971. 5, pp. I-32-1~I-32-2.
- 7) 野邑雄吉: 技術者のための特殊関数とその応用, 日刊工業新聞社, 1962, pp. 305~373.
- 8) 前出 3)
- 9) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有: 弾性層上の長方形基礎の Ground Compliance, 日本地震工学シンポジウム(1966) 講演集, 1966.10, pp. 255~260.
- 10) 前出 3)
- 11) 前出 3)
- 12) 三池亮次・秋吉 卓・滝川 清: 地表面上構造物の動的ばね剛性, 昭和 46 年度土木学会西部支部研究発表会論文概要集, 1972.2, pp. 29~30.

(1973.4.10・受付)
