

## 曲げねじれ剛性をもった曲線桁橋の 剛性マトリックス法による解析\*

STIFFNESS MATRIX ANALYSIS OF HORIZONTALLY CURVED  
GIRDER BRIDGES WITH BENDING TORSIONAL RIGIDITY

渡 辺 昇\*\*・稼 農 知 徳\*\*\*・藤 井 裕 司\*\*\*\*

By Noboru Watanabe, Tomonori Kano and Yuji Fujii

### 1. ま え が き

構造工学の分野において、薄肉断面を有する構造物が、その力学的な利点から、数多く使用されている。また構造物が、環境に適した自然な線形に組み込まれるためには、構造要素として曲線材が要求される。そのために曲線材を含む薄肉材の曲げねじれ解析が必要となる。

応力法による薄肉材の曲げねじれ解析は、H. Wagner<sup>1)</sup>により薄肉材の曲げねじれ理論が発表されて以来、数多くの研究者により展開され、直線材に関しては、F. W. Bornscheuer<sup>2)</sup>, V. Z. Vlasov<sup>3)</sup>, R. Heilig<sup>4)</sup> などにいたりほぼ体系づけられ、また、曲線材についても、文献 5)~11) などにおいてほぼ完成されている。

一方、変形法においては、曲げねじれ剛性を考慮した解析が非常に少なく、直線材に関しては、文献 12)~15) に示されているものくらいで、曲線材に関しては、わずかに G. Becker<sup>16)</sup> が、Reduction-Verfahren によって、変断面連続曲線桁を解析しているのみである。

大型電子計算機の発達した現在、変形法が、応力法に比較して、特に高次不静定構造物の解析には、有力な方法であると一般に認められている。

そこで、本論文では、今までにまだ誘導されていない変断面曲りばりを含む骨組構造物を解析するために必要な曲げねじれ剛性をも考慮した円弧曲線材の剛性マトリックスを誘導し、従来から求められている曲げねじれ剛性を考慮した直線材の剛性マトリックスとこの剛性マトリックスを併用することによって、任意変断面曲りばりを含む骨組構造物の解析が可能となった。

この剛性マトリックスの応用例として、実際に架設さ

れている 3 径間連続曲線格子桁の橋である天狗橋の数値計算を行ない、参考のために従来の応力法による結果を示した。なお応力法においては、横桁の剛性として曲げ剛性、ねじれ剛性、曲げねじれ剛性のすべての剛性を考慮することはむずかしく、曲げ剛性のみが考慮されているのに対し、本論文の方法では、横桁の剛性として曲げ剛性、ねじれ剛性、および曲げねじれ剛性のすべてが考慮されている。

また、変断面の場合には、断面変化点においてせん断中心軸が一致していると、そのまま使用可能となる。

### 2. 記 号

本論文に用いた記号は、次のとおりである。

$J_x, J_y$ :  $x$  軸および  $y$  軸に関する断面二次モーメント  
(曲げ抵抗)

$J_T$ : せん断中心軸に関するねじれ抵抗

$J_w$ : せん断中心軸に関する曲げねじれ抵抗

$R_s$ : 曲率半径

$u_x$ : せん断中心軸の垂直変位

$u_x'$ : せん断中心軸のたわみ角

$\theta_z$ : せん断中心軸のねじれ角

$\theta_w$ : せん断中心軸のねじれ率

$Q_x$ :  $x$  軸方向のせん断力

$M_y$ :  $y$  軸まわりの曲げモーメント

$M_z$ : せん断中心のまわりの合ねじれモーメント

$M_w$ : せん断中心に関する曲げねじれモーメント

### 3. 曲線桁の曲げねじれ解析

Fig. 1 のような一般的な  $x$  軸対称断面に面外荷重が作用し、曲率面内の作用荷重がない場合の、曲率面外への変形の弾性方程式は、文献 8) で導かれている。 $x$  軸対称断面を有する曲線材において、厳密には曲率の影響

\* 土木学会第 27 回年次学術講演会 I-29 にて一部発表

\*\* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科

\*\*\*\* 正会員 本州四国連絡橋公団

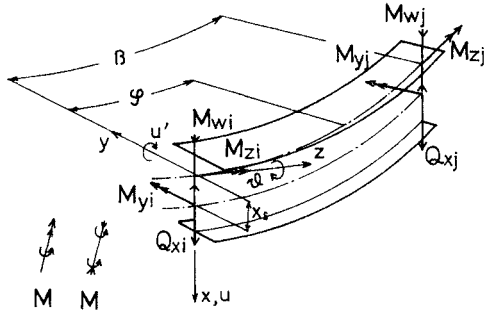


Fig. 1 A thin walled curved beam

により、せん断中心軸と重心軸は、水平曲率面内方向に一致したのではなく、わずかにずれたものである。しかし実用的な精度では、文献 18) に示されるように、ずれが微小であるために、その影響は無視される。そこでせん断中心軸の変形で表わした弾性方程式は、式 (1) とする。

$$\left. \begin{aligned} & \left( EJ_y + \frac{EJ_w}{R_s^2} \right) \frac{d^4 u_x}{d\varphi^4} - GJ_T \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} \\ & - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \vartheta_z}{d\varphi^4} + (GJ_T + EJ_y) \frac{d^2 R_s \vartheta_z}{d\varphi^2} \\ & = R_s^4 q_z - R_s^3 \frac{dm_y}{d\varphi}, \\ & - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 u_x}{d\varphi^4} + (GJ_T + EJ_y) \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} \\ & + \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \vartheta_z}{d\varphi^4} - GJ_T \frac{d^2 R_s \vartheta_z}{d\varphi^2} \\ & + EJ_y R_s \vartheta_z = R_s^3 m_z. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $J_y = J_y - \frac{J_x y^2}{J_x}$ .

式 (1) は高階連立微分方程式であるので、消去法により  $u_x$  を消去し、また剛性マトリックス法においては、節点間に中間荷重が作用しないものと考えたために、式 (1) の右辺の荷重項が消え、式 (2)、式 (3) の同次方程式が得られた。

$$\frac{d^5 \vartheta_z}{d\varphi^5} + (2 - \lambda^2) \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (1 - 2\lambda^2) \frac{d^3 \vartheta_z}{d\varphi^3} - \lambda^2 \vartheta_z = 0, \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} = - \frac{R_s}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \gamma} \left\{ \frac{d^3 \vartheta_z}{d\varphi^3} + (1 - \lambda^2) \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} + (1 + \lambda^2 \gamma) \vartheta_z \right\}. \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{wi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_T}{R_s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EJ_y}{R_s} (2 - \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_T}{R_s} \eta \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R_s^2} & 0 \\ 0 & -\frac{EJ_w}{R_s^2} (1 + \lambda^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EJ_w}{R_s^2} \eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

さらに、ねじれ中心軸のねじれ率は、式 (4) とする。

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left( \frac{d \vartheta_z}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{du_x}{d\varphi} \right), \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\lambda^2 = \frac{GJ_T}{EJ_w} R_s^2$ ,  $\gamma = \frac{EJ_y}{GJ_T}$ ,  $\eta = \frac{2\lambda^2 \gamma}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \gamma}$ .

式 (2) の一般解は、式 (5) とする。

$$\vartheta_z = C_1 \sinh \lambda \varphi + C_2 \cosh \lambda \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \varphi \cos \varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi. \dots\dots (5)$$

式 (5) を式 (3) に代入することによって式 (6)、式 (7) および式 (8) が求まる。

$$u_x = -R_s \left\{ C_1 \frac{1}{\lambda^2} \sinh \lambda \varphi + C_2 \frac{1}{\lambda^2} \cosh \lambda \varphi - C_3 \cos \varphi - C_4 (\varphi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - C_5 \sin \varphi - C_6 (\varphi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \right\} + C_7 \varphi + C_8, \dots (6)$$

$$\frac{du_x}{R_s d\varphi} = - \left[ C_1 \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda \varphi + C_2 \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda \varphi + C_3 \sin \varphi - C_4 \{ (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - \eta \cos \varphi \} - C_5 \cos \varphi - C_6 \{ (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) - \eta \sin \varphi \} \right] + \frac{C_7}{R_s}, \dots (7)$$

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left[ C_1 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \cosh \lambda \varphi + C_2 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \sinh \lambda \varphi + C_4 \eta \cos \varphi + C_6 \eta \sin \varphi - \frac{C_7}{R_s} \right], \dots\dots\dots (8)$$

断面力と変形の関係式は、断面形状が  $x$  軸に対して対称断面をもつものとする、式 (9) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{EJ_y}{R_s} \frac{d \kappa_y}{d\varphi} - \frac{GJ_T}{R_s} \theta_w + \frac{EJ_w}{K_s^3} \frac{d^2 \theta_w}{d\varphi^2}, \\ M_y &= -EJ_y \kappa_y, \\ M_z &= GJ_T \theta_w - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^2 \theta_w}{d\varphi^2}, \\ M_w &= -\frac{EJ_w}{R_s} \frac{d \theta_w}{d\varphi}, \end{aligned} \right\} \text{ここで } \begin{aligned} \kappa_y &= \frac{1}{R_s^2} \left( \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} + R_s \vartheta_z \right), \\ \theta_w &= \frac{1}{R_s} \left( \frac{d \vartheta_z}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{du_x}{d\varphi} \right), \\ J_{x,y} &= 0. \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

式 (9) に式 (5)、(6)、(7)、(8) の変形を代入し材端  $i, j$  でそれぞれ  $\varphi=0, \varphi=\beta$  とすると材端の断面力が、積分定数  $C_1 \sim C_8$  で表わされる。これをマトリックス表示すると式 (10) とする。

$$\begin{pmatrix} Q_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R_s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EJ_y}{R_s^2}(2-\eta)\sin\beta & 0 & \frac{EJ_y}{R_s^2}(2-\eta)\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R_s}\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\eta\cos\beta & 0 & \frac{GJ_T}{R_s}\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\eta\sin\beta & -\frac{GJ_T}{R_s^2} & 0 \\ \frac{EJ_w}{R_s^2}(1+\lambda^2) & \frac{EJ_w}{R_s^2}(1+\lambda^2) & 0 & -\frac{EJ_w}{R_s^2}\eta\sin\beta & 0 & \frac{EJ_w}{R_s^2}\eta\cos\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix}$$

$\cdot \cosh \lambda\beta$                        $\cdot \sinh \lambda\beta$

$$\{P\} = [G] \cdot \{C\} \dots\dots\dots (10)$$

出発点となった微分方程式の誘導にあたっては、微小区間における両端の断面力の方向は、逆向きとなっているが<sup>2</sup>、剛性マトリックス法において両端の断面力は、同じ方向とするために、式(9)から式(10)の誘導の際には、符号に注意する必要がある。

#### 4. 円弧曲線桁の剛性マトリックス

##### (1) 部材座標系の剛性マトリックス

Fig. 2 に示すように、部材  $ij$  において、 $i$  点における法線、接線および  $\bar{x}$  軸に対して正の方向余弦を示す向きの陪法線よりなる部材座標系を  $D_{ij} = \{x, y, z\}$  と定義する。

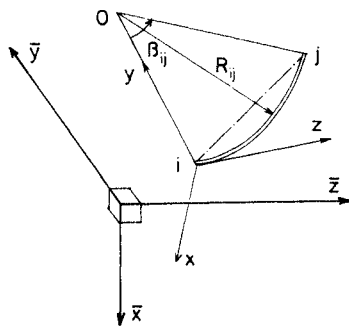


Fig. 2 Local system and Reference system

式(5), (6), (7), (8) で表わされた変形の式には、 $C_1 \sim C_8$  までの8個の積分定数が含まれている。剛性マトリックス法において、断面力は、材端の変形と断面定数によって表わされるために、式(11)の境界条件によって積分定数が決定される。

$$\left. \begin{array}{l} \varphi=0 \text{ で} \\ u_x = u_{xi}, \quad \frac{du_x}{R_s d\varphi} = u_{xi}', \quad \vartheta_z = \vartheta_{zi} \\ \theta_w = \theta_{wi} \\ \varphi=\beta \text{ で} \\ u_x = u_{xj}, \quad \frac{du_x}{R_s d\varphi} = u_{xj}', \quad \vartheta_z = \vartheta_{zj} \\ \theta_w = \theta_{wj} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 & D_8 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 & T_8 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{xi}' \\ \vartheta_{zi} \\ \theta_{wi} \\ u_{xj} \\ u_{xj}' \\ \vartheta_{zj} \\ \theta_{zj} \end{pmatrix}$$

$$\{C\} = [B] \cdot \{u\} \dots\dots\dots (12)$$

係数マトリックス  $[B]$  の要素は、次のようになる。

$$A_1 = R_s [(1+\lambda^2)(\beta + \sin\beta)(1 - \cosh\lambda\beta)/\lambda + \eta\{\sin\lambda\beta(1 - \cos\beta) - \lambda\sin\beta(1 - \cosh\lambda\beta)\}]$$

$$A_2 = -R_s [(1+\lambda^2)(\beta + \sin\beta)\sinh\lambda\beta/\lambda - \eta\{(1 - \cos\beta)(1 + \cosh\lambda\beta) + \lambda\sin\beta\sinh\lambda\beta\}]$$

$$A_3 = R_s \eta [(1+\lambda^2)\sin\beta(1 - \cosh\lambda\beta)\{-\beta\sin\beta + 2(1 - \cos\beta)\}/\lambda - \eta(\sinh\lambda\beta\cos\beta - \lambda\cosh\lambda\beta\sin\beta)\{-\beta\sin\beta + 2(1 - \cos\beta)\} + (\sin\beta - \beta)(1+\lambda^2)\{\beta\sin\beta/\lambda - (1 - \cosh\lambda\beta)(1 - \cos\beta)/\lambda - \sinh\lambda\beta\sin\beta/\lambda^2\}]$$

$$A_4 = -R_s \eta [(1+\lambda^2)\sin\beta\sinh\lambda\beta/\lambda + \eta(\cosh\lambda\beta\cos\beta - \lambda\sinh\lambda\beta\sin\beta - 1)\{-\beta\sin\beta + 2(1 - \cos\beta)\} - (\sin\beta - \beta) \times (1+\lambda^2)\{\sinh\lambda\beta(1 - \cos\beta)/\lambda - \cosh\lambda\beta\sin\beta/\lambda^2 + \sin\beta/\lambda^2\}]$$

$A_5 = A_2 \cdot A_3 - A_4 \cdot A_1$  とおくと、

$$B_1 = \eta\sin\beta(\sin\beta - \beta)A_1/A_5$$

$$B_2 = -R_s \eta\sin\beta A_3/A_5$$

$$B_3 = R_s \eta [(1 - \cos\beta)A_3 - \{\sin\beta(\sin\beta - \beta) - \eta\beta\sin\beta + 2\eta(1 - \cos\beta)\}A_1]/A_5$$

$$B_4 = R_s^2 [\{\beta + (1 - \eta)\sin\beta\}A_3 + \eta\{\beta^2\sin\beta - (\sin\beta + \beta)(1 - \cos\beta)\}A_1]/A_5$$

$$B_5 = -\eta\sin\beta(\sin\beta - \beta)A_1/A_5$$

$$B_6 = R_s \eta \sin\beta [A_3 + \eta\{\beta\sin\beta - 2(1 - \cos\beta)\}A_1]/A_5$$

$$B_7 = R_s \eta [(1 - \cos\beta)A_3 - \{\eta\beta\sin\beta\cos\beta - 2\eta\cos\beta(1 - \cos\beta) - \sin\beta(\sin\beta - \beta)\}A_1]/A_5$$

$$B_8 = R_s^2 [-\{\beta + (1 - \eta)\sin\beta\}A_3 - \eta\{\beta\sin^2\beta$$

$$\begin{aligned}
 & -\sin \beta(1-\cos \beta)-\eta \beta \sin ^2 \beta \\
 & +2 \eta \sin \beta(1-\cos \beta)-\beta(1-\cos \beta)\} A_1] / A_5, \\
 D_1 & =-A_2 \cdot B_1 / A_1, \\
 D_2 & =-(R_s \eta \sin \beta+A_2 \cdot B_2) / A_1, \\
 D_3 & =\{R_s \eta(1-\cos \beta)-A_2 \cdot B_3\} / A_1, \\
 D_4 & =\left[R_s^2\{\beta+(1-\eta) \sin \beta\}-A_2 \cdot B_4\right] / A_1, \\
 D_5 & =-A_2 \cdot B_5 / A_1, \\
 D_6 & =(R_s \eta \sin \beta-A_2 \cdot B_6) / A_1, \\
 D_7 & =\left[R_s \eta(1-\cos \beta)-A_2 \cdot B_7\right] / A_1, \\
 D_8 & =-\left[R_s^2\{\beta+(1-\eta) \sin \beta\}+A_2 \cdot B_8\right] / A_1, \\
 A_6 & =-\left[(1+\lambda^2) \sin \beta(1-\cosh \lambda \beta) / \lambda\right. \\
 & \quad \left.-\eta(\sinh \lambda \beta \cos \beta-\lambda \cosh \lambda \beta \sin \beta)\right] / \\
 & \quad \quad \quad \{\eta(\sin \beta-\beta)\} \\
 A_7 & =\left[(1+\lambda^2) \sin \beta \sinh \lambda \beta / \lambda+\eta(\cosh \lambda \beta \cos \beta\right. \\
 & \quad \left.-\lambda \sinh \lambda \beta \sin \beta-1)\right] / \{\eta(\sin \beta-\beta)\}
 \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 S_1 & =A_6 \cdot D_1+A_7 \cdot B_1, \\
 S_2 & =A_6 \cdot D_2+A_7 \cdot B_2, \\
 S_3 & =A_6 \cdot D_3+A_7 \cdot B_3+1 /(\sin \beta-\beta), \\
 S_4 & =A_6 \cdot D_4+A_7 \cdot B_4+R_s \sin \beta / \{\eta(\sin \beta-\beta)\}, \\
 S_5 & =A_6 \cdot D_5+A_7 \cdot B_5, \\
 S_6 & =A_6 \cdot D_6+A_7 \cdot B_6+\sin \beta /(\sin \beta-\beta), \\
 S_7 & =A_6 \cdot D_7+A_7 \cdot B_7-\cos \beta /(\sin \beta-\beta), \\
 S_8 & =A_6 \cdot D_8+A_7 \cdot B_8-R_s(1-\eta) \sin \beta / \{\eta(\sin \beta- \\
 & \quad \beta)\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_8 & =(1-\cos \beta) / \sin \beta, \\
 A_9 & =(1+\lambda^2)(1+\cosh \lambda \beta) /(\lambda \eta \sin \beta), \\
 A_{10} & =-(1+\lambda^2) \sinh \lambda \beta /(\lambda \eta \sin \beta),
 \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 F_k & =A_8 \cdot S_k+A_9 \cdot D_k+A_{10} \cdot B_k, \\
 & \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), \\
 F_4 & =A_8 \cdot S_4+A_9 \cdot D_4+A_{10} \cdot B_4-R_s /(\eta \sin \beta), \\
 F_8 & =A_8 \cdot S_8+A_9 \cdot D_8+A_{10} \cdot B_8+R_s /(\eta \sin \beta), \\
 A_{11} & =\sin ^2 \beta, \\
 A_{12} & =(\sin \beta \cos \beta-\beta), \\
 A_{13} & =(\lambda \cosh \lambda \beta \sin \beta-\sinh \lambda \beta \cos \beta), \\
 A_{14} & =(\lambda \sinh \lambda \beta \sin \beta-\cosh \lambda \beta \cos \beta)
 \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 T_k & =A_{11} \cdot F_k+A_{12} \cdot S_k+A_{13} \cdot D_k+A_{14} \cdot B_k, \\
 & \quad (k=1, 2, 3, 4, 5), \\
 T_6 & =A_{11} \cdot F_6+A_{12} \cdot S_6+A_{13} \cdot D_6+A_{14} \cdot B_6-\sin \beta, \\
 T_7 & =A_{11} \cdot F_7+A_{12} \cdot S_7+A_{13} \cdot D_7+A_{14} \cdot B_7+\cos \beta, \\
 T_8 & =A_{11} \cdot F_8+A_{12} \cdot S_8+A_{13} \cdot D_8+A_{14} \cdot B_8-R_s \sin \beta, \\
 H_k & =-\cot \beta T_k-\beta F_k-\beta \cot \beta S_k, \\
 & \quad -(\sinh \lambda \beta / \sin \beta) D_k-(\cosh \lambda \beta / \sin \beta) B_k, \\
 & \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8), \\
 H_7 & =-\cot \beta T_7-\beta F_7-\beta \cot \beta S_7,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(\sinh \lambda \beta / \sin \beta) D_7-(\cosh \lambda \beta / \sin \beta) B_7 \\
 & +1 / \sin \beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{15} & =-R_s\{\beta \cos \beta+(1-\eta) \sin \beta\}, \\
 A_{16} & =R_s\{\beta \sin \beta-(1-\eta) \cos \beta\}
 \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 P_k & =-R_s \cos \beta H_k+R_s \sin \beta T_k+A_{15} F_k \\
 & +A_{16} S_k+(R_s \cosh \lambda \beta / \lambda) D_k \\
 & +(R_s \sinh \lambda \beta / \lambda) B_k, \\
 & \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 7, 8),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_6 & =-R_s \cos \beta H_6+R_s \sin \beta T_6+A_{15} F_6 \\
 & +A_{16} S_6+(R_s \cosh \lambda \beta / \lambda) D_6 \\
 & +(R_s \sinh \lambda \beta / \lambda) B_6+R_s,
 \end{aligned}$$

$$A_{17}=-R_s(\beta \sin \beta+\eta \cos \beta),$$

$$A_{18}=-R_s(\beta \cos \beta-\eta \sin \beta),$$

$$A_{19}=R_s \sinh \lambda \beta / \lambda^2,$$

$$A_{20}=R_s \cosh \lambda \beta / \lambda^2$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 Q_k & =-\beta P_k-R_s \sin \beta H_k-R_s \cos \beta T_k \\
 & +A_{17} F_k+A_{18} S_k+A_{19} D_k+A_{20} B_k, \\
 & \quad (k=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_5 & =-\beta P_5-R_s \sin \beta H_5-R_s \cos \beta T_5 \\
 & +A_{17} F_5+A_{18} S_5+A_{19} D_5+A_{20} B_5+1.
 \end{aligned}$$

式 (10) に式 (12) を代入すると

$$[\mathbf{P}]=[\mathbf{G}] \cdot[\mathbf{B}] \cdot\{\mathbf{u}\} \cdots \cdots \cdots(13)$$

ここで  $[\mathbf{K}]=[\mathbf{G}] \cdot[\mathbf{B}]$  とすると

$$\begin{pmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{wi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ & & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ & & & & & & K_{77} & K_{78} \\ & & & & & & & K_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{xi}' \\ \vartheta_{zi} \\ \theta_{wi} \\ u_{xj} \\ u_{xj}' \\ \vartheta_{zj} \\ \theta_{wj} \end{pmatrix}$$

簡単に表示して

$$[\mathbf{P}]=[\mathbf{K}] \cdot\{\mathbf{u}\} \cdots \cdots \cdots(14)$$

この  $[\mathbf{G}]$  マトリックスと  $[\mathbf{B}]$  マトリックスの積により求まる  $[\mathbf{K}]$  マトリックスが、求める円弧曲線材の剛性マトリックスである。

## (2) 絶対座標系表示による剛性マトリックス

Fig. 2 における部材座標系  $D_{ij}(x, y, z)$  から絶対座標系  $\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  への変換は、

$$\bar{\mathbf{D}}=\mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{D}_{ij} \cdots \cdots \cdots(15)$$

座標変換行列は、一般的に転置行列が逆行列に等しいために絶対座標系  $\bar{\mathbf{D}}$  によって表示された剛性マトリックス  $[\bar{\mathbf{K}}]$  は、

$$[\bar{\mathbf{K}}]=[\mathbf{R}][\mathbf{K}][\mathbf{R}]^* \quad * ; \text{配置記号} \cdots \cdots(17)$$

ここで、座標変換行列  $[R]$  において、曲げねじれモーメントに対応する節点変位の変位  $\theta_w$  成分は、変換しないものとし、そのまま加え合わせることにしている。

5. 数値計算例

Fig. 3 のような 3 径間連続円弧曲線格子桁橋についての数値計算例を示す。この計算にあたり、横桁については、直線材の曲げねじれ剛性を考慮した剛性マトリ

ックスが必要となるが、それは、曲線材の剛性マトリックスを誘導したのと全く同じ方法から求まる。その結果を式 (18) に示す。Table 1 に形状寸法および断面諸定数を示す。また Fig. 3 において端支点は、曲げに対し単純支持、ねじれに対し回転不能で曲げねじれモーメントは 0 であり、中間支点は、曲げに対し連続支持、ねじれに対し回転不能で曲げねじれモーメントは 0 でないものである。

$$\begin{pmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{wi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12 EJ_y}{l^3} & \frac{6 EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12 EJ_y}{l^3} & \frac{6 EJ_y}{l^2} & 0 & 0 \\ & \frac{4 EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{6 EJ_y}{l^2} & \frac{2 EJ_y}{l} & 0 & 0 \\ & & \frac{EJ_w \lambda^3}{D} \sinh \lambda & \frac{EJ_w \lambda^2}{D} (\cosh \lambda - 1) & 0 & 0 & -\frac{EJ_w \lambda^3}{D} \sinh \lambda & \frac{EJ_w \lambda^2}{D} (\cosh \lambda - 1) \\ & & \frac{EJ_w \lambda}{D} (\lambda \cosh \lambda - \sinh \lambda) & 0 & 0 & -\frac{EJ_w \lambda^2}{D} (\cosh \lambda - 1) & -\frac{EJ_w \lambda}{D} (\lambda - \sinh \lambda) & 0 \\ & & & & \frac{12 EJ_y}{l^3} & -\frac{6 EJ_y}{l^2} & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{4 EJ_y}{l} & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{EJ_w \lambda^3}{D} \sinh \lambda & -\frac{EJ_w \lambda^2}{D} (\cosh \lambda - 1) \\ & & & & & & & \frac{EJ_w \lambda}{D} (\lambda \cosh \lambda - \sinh \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{xi}' \\ \vartheta_{zi} \\ \theta_{wi} \\ u_{xj} \\ u_{xj}' \\ \vartheta_{zj} \\ \theta_{wj} \end{pmatrix}$$

ここで、 $D = \lambda \sinh \lambda - 2(\cosh \lambda - 1)$ ,  $\lambda^2 = \frac{GJ_T}{EJ_w} l^2$ . (18)

Table 1  
形状寸法と断面定数

|      |                              | 第 1 径間                   | 第 2 径間                   | 第 3 径間                   |
|------|------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 主桁-a | 断面二次モーメント [cm <sup>4</sup> ] | 1.567 × 10 <sup>6</sup>  | 1.567 × 10 <sup>6</sup>  | 1.567 × 10 <sup>6</sup>  |
|      | ねじれ抵抗 [cm <sup>4</sup> ]     | 4.030 × 10 <sup>2</sup>  | 4.030 × 10 <sup>2</sup>  | 4.030 × 10 <sup>2</sup>  |
|      | 曲げねじれ抵抗 [cm <sup>6</sup> ]   | 1.457 × 10 <sup>8</sup>  | 1.457 × 10 <sup>8</sup>  | 1.457 × 10 <sup>8</sup>  |
|      | 半径 [cm]                      | 2.469 × 10 <sup>4</sup>  | 2.469 × 10 <sup>4</sup>  | 2.469 × 10 <sup>4</sup>  |
|      | 中心角 [度]                      | 5.8585                   | 6.879                    | 5.8585                   |
| 主桁-b | 断面二次モーメント [cm <sup>4</sup> ] | 1.830 × 10 <sup>6</sup>  | 1.830 × 10 <sup>6</sup>  | 1.830 × 10 <sup>6</sup>  |
|      | ねじれ抵抗 [cm <sup>4</sup> ]     | 4.250 × 10 <sup>2</sup>  | 4.250 × 10 <sup>2</sup>  | 4.250 × 10 <sup>2</sup>  |
|      | 曲げねじれ抵抗 [cm <sup>6</sup> ]   | 1.884 × 10 <sup>8</sup>  | 1.884 × 10 <sup>8</sup>  | 1.884 × 10 <sup>8</sup>  |
|      | 半径 [cm]                      | 2.500 × 10 <sup>4</sup>  | 2.500 × 10 <sup>4</sup>  | 2.500 × 10 <sup>4</sup>  |
|      | 中心角 [度]                      | 5.8585                   | 6.879                    | 5.8585                   |
| 主桁-c | 断面二次モーメント [cm <sup>4</sup> ] | 2.120 × 10 <sup>6</sup>  | 2.120 × 10 <sup>6</sup>  | 2.120 × 10 <sup>6</sup>  |
|      | ねじれ抵抗 [cm <sup>4</sup> ]     | 4.460 × 10 <sup>2</sup>  | 4.460 × 10 <sup>2</sup>  | 4.460 × 10 <sup>2</sup>  |
|      | 曲げねじれ抵抗 [cm <sup>6</sup> ]   | 2.410 × 10 <sup>8</sup>  | 2.410 × 10 <sup>8</sup>  | 2.410 × 10 <sup>8</sup>  |
|      | 半径 [cm]                      | 2.531 × 10 <sup>4</sup>  | 2.531 × 10 <sup>4</sup>  | 2.531 × 10 <sup>4</sup>  |
|      | 中心角 [度]                      | 5.8585                   | 6.879                    | 5.8585                   |
| 横桁   | 断面二次モーメント [cm <sup>4</sup> ] | 0.588 × 10 <sup>6</sup>  | 0.588 × 10 <sup>6</sup>  | 0.588 × 10 <sup>6</sup>  |
|      | ねじれ抵抗 [cm <sup>4</sup> ]     | 0.675 × 10 <sup>2</sup>  | 0.675 × 10 <sup>2</sup>  | 0.675 × 10 <sup>2</sup>  |
|      | 曲げねじれ抵抗 [cm <sup>6</sup> ]   | 0.2308 × 10 <sup>8</sup> | 0.2308 × 10 <sup>8</sup> | 0.2308 × 10 <sup>8</sup> |
|      | 半径 [cm]                      | —                        | —                        | —                        |
|      | 中心角 [度]                      | —                        | —                        | —                        |

Fig. 4, 5, 6 は、主桁 b の中央点に垂直荷重  $P=1$  が作用した場合の曲げモーメント図、全ねじれモーメント図、曲げねじれモーメント図である。

Fig. 7, 8, 9 は、主桁 c の中央点にねじれモーメン

ト  $T=1$  が作用した場合の曲げモーメント図、ねじれモーメント図、曲げねじれモーメント図である。

Fig. 10, 11, 12, 13 は、垂直荷重  $P=1$  が移動する場合の影響線であり、Fig. 10 は、主桁 c の中央点に着

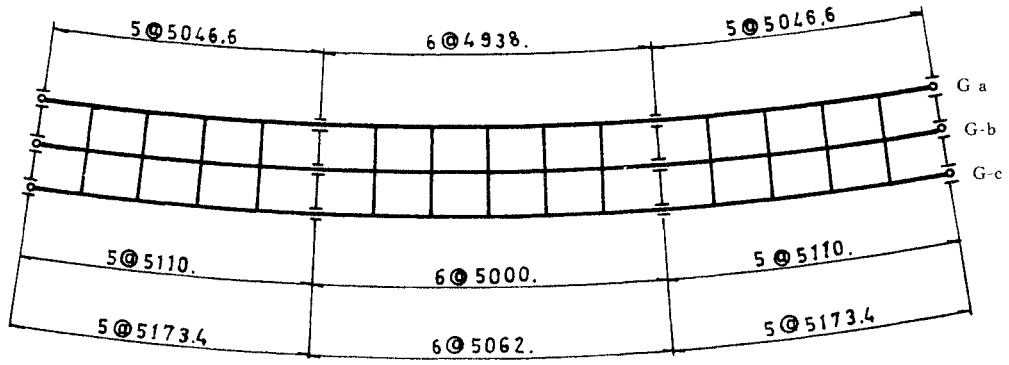


Fig. 3

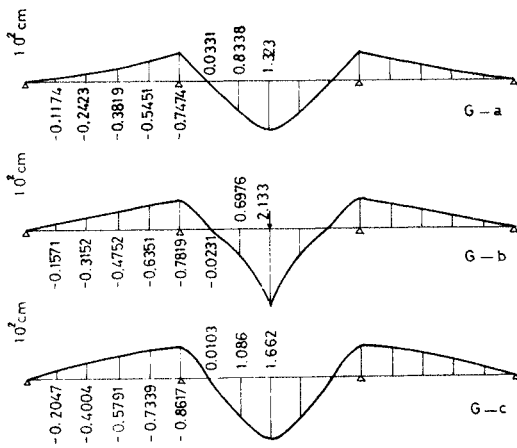


Fig. 4 Bending Moment ( $P=1$ )

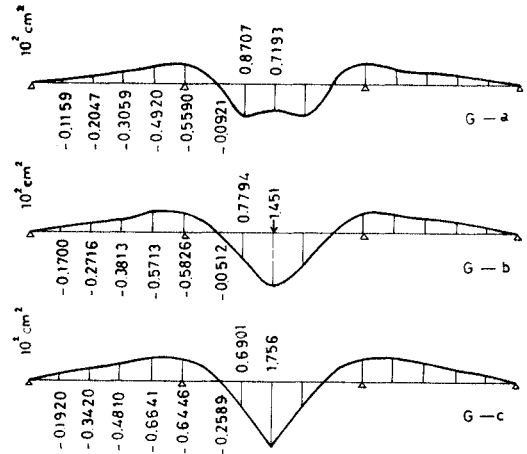


Fig. 6 Warping Moment ( $P=1$ )

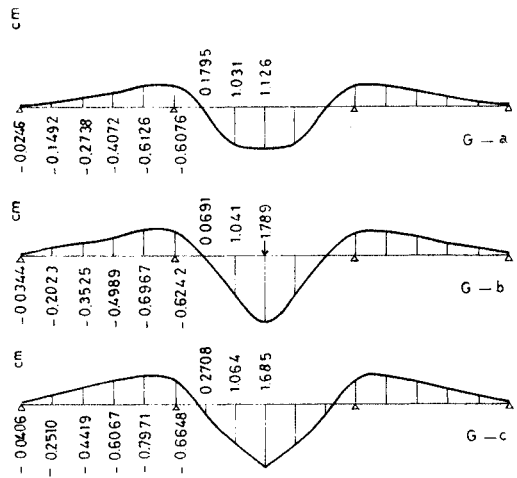


Fig. 5 Torsional Moment ( $P=1$ )

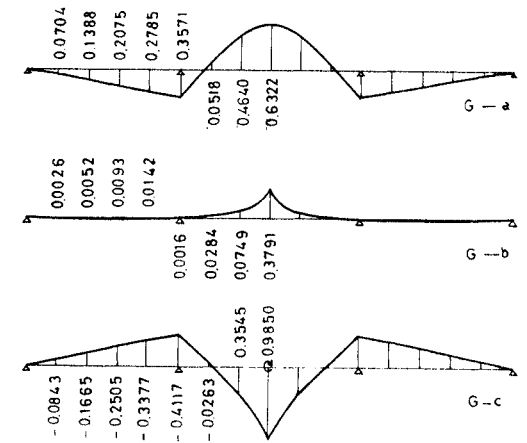


Fig. 7 Bending Moment ( $T=1$ )

目した垂直変位影響線, Fig. 11 は, 主桁 b の中央点に着目した曲げモーメント影響線, Fig. 12 は, 主桁 a の中央点に着目した全ねじれモーメント影響線, Fig. 13 は, 主桁 c の中央点に着目した曲げねじれモーメント影響線となっている。ここで参考のために, あらかじめ応

力法で計算されている垂直荷重が作用した場合(ただし, 横桁の曲げねじれ剛性のみ無視)の曲げモーメントと曲げねじれモーメントの値を破線で示したが, Fig. 13 の曲げねじれモーメント影響線で差が生じたのみで, ほかではほとんど一致したために線の差異としてはあられ

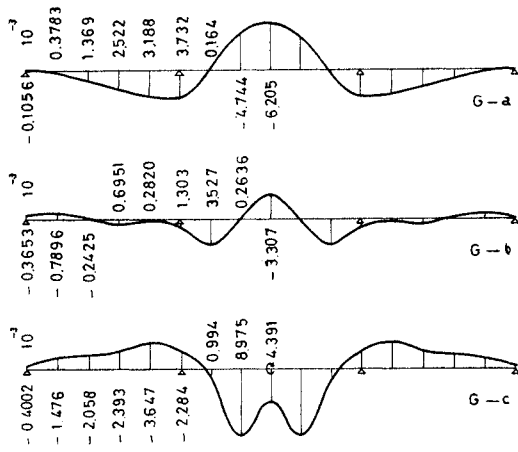


Fig. 8 Torsional Moment ( $T=1$ )

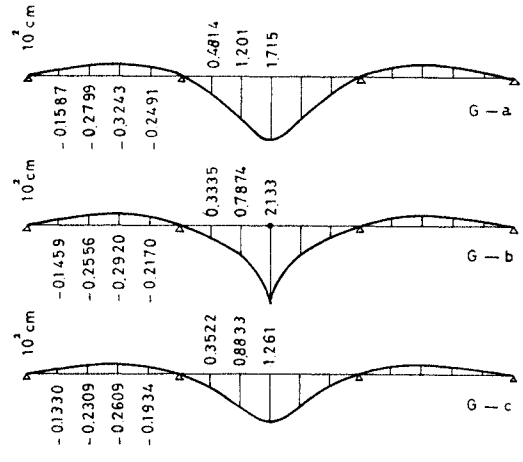


Fig. 11 Bending Moment Inf. Line ( $P=1$ )

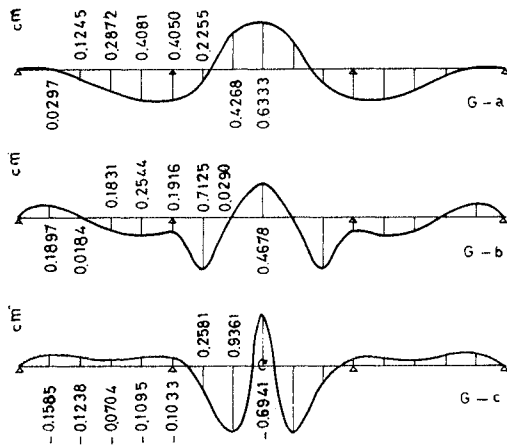


Fig. 9 Warping Moment ( $T=1$ )

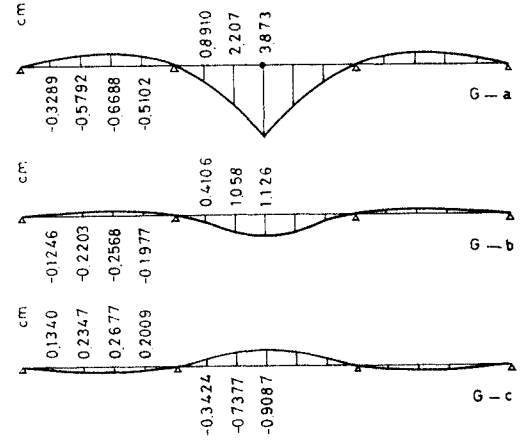


Fig. 12 Torsional Moment Inf. Line ( $P=1$ )

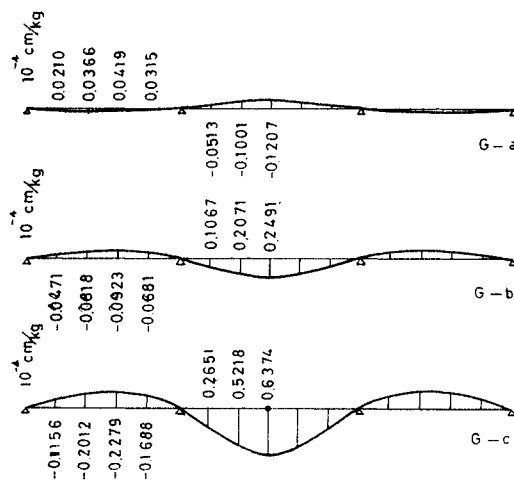


Fig. 10 Deflection Inf. Line ( $P=1$ )

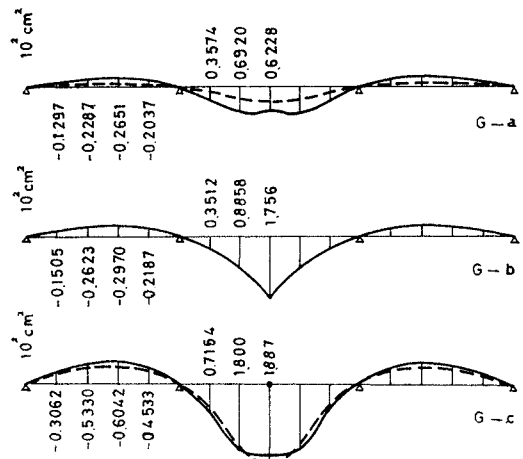


Fig. 13 Warping Moment Inf. Line ( $P=1$ )

ていない。

## 6. あとがき

本論文において誘導した剛性マトリックスを利用することによって、一般的な一軸対称断面からなる円弧曲線部材を含む変断面骨組構造物の変形法による解析が可能となった。

連続曲線桁の数値計算については、すでに応力法によって解かれたもの<sup>19)</sup>があるが、当然本論文の変形法による計算結果に一致した。また、単純曲線格子桁および3径間連続曲線格子桁の数値計算については、すでに横桁のねじれ剛性および曲げねじれ剛性を無視して応力法によって解かれたもの<sup>20), 21)</sup>があるが、これに対し、本論文の変形法(横桁のねじれ剛性および曲げねじれ剛性を考慮)による計算結果とを比較したところ、曲げモーメントに関するものはほぼ差異はなかったが、曲げねじれモーメントに関するものは、かなりの差異があることがわかった。

面外変形と面内変形が分離されるような断面の場合には、本論文で用いた方法と同様な方法によって、面内変形に対する剛性マトリックスを誘導し、本論文で誘導した面外変形に対する剛性マトリックスに加えることによって円弧曲線材を含む立体骨組構造物の解析が可能となる。

最後に、本論文の計算には、北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。

## 参 考 文 献

- 1) Wagner, H. : Luftfahrt-Forschung, Band 11, S. 119, 1939.
- 2) Bornscheuer, F.W. : Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, Heft 1, S. 1, und Heft 3, S. 52, 1952.
- 3) Vlasov, V.Z. : たとえば、薄肉弾性ばりの理論(奥村敏恵外共訳), 1967.
- 4) Heilig, R. : Der Schubverformungseinfluss auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil, Stahlbau, Heft 4, S. 97, 1961, und Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform, Stahlbau, Heft 11, S. 333, 1961.
- 5) 小西一郎・小松定夫 : 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文集, 第 87 号, pp. 35, 1962.
- 6) 倉西 茂 : 一般薄肉断面の曲りばりの解析, 土木学会論文集, 第 108 号, pp. 7, 1964.
- 7) 島田静雄 : 曲線格子橋の理論, 東大橋梁研究室報告, 第 95 号, 1961.
- 8) 深沢泰晴 : 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論, 土木学会論文集, 第 110 号, pp. 30, 1964.
- 9) Wansleben, F. : Die Berechnung drehfester gekrümmter Stahlbrücken, Stahlbau, Heft 4, S. 53, 1952.
- 10) Kreisel, M. : Zur Berechnung drehfester konstant gekrümmten Träger mit beliebiger räumlicher Belastung, Stahlbau, Heft 12, S. 364, 1962.
- 11) Dabrowski, R. : Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil, Stahlbau, Heft 12, S. 364, 1964., und Wölbkrafttorsion von gekrümmten Kastenträgern mit nichtverformbarem Profil, Stahlbau, Heft 5, S. 135, 1965.
- 12) Klöppel, K. und H. Frieman : Erweiterung des Formänderungsgrößen-Verfahrens auf die Theorie der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, Heft 12, S. 365, 1966.
- 13) Krajcinovic, D. : A consistent discrete elements technique for thinwalled assemblages, Int. J. Solids. Structures, Vol. 5, pp. 639~662, 1969.
- 14) 鷹羽信勝・成岡昌夫 : 変形法による任意形状の薄肉断面格子桁の解析, 土木学会論文報告集, 第 178 号, pp. 1~9, 1970.
- 15) Argyris, J.H. und D. Radaj : Steifigkeitsmatrizen dünnwandiger Stäbe und Stabsysteme, Ingenieur-Archiv, Band 40, S. 198~210, 1971.
- 16) Becker, G. : Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, Heft 11, S. 334, 1965.
- 17) 稼農知徳 : 連続曲線格子橋の理論解析と実験的研究, 北海道大学工学部研究報告, 第 57 号, pp. 17~50, 1970.
- 18) 薄木征三 : フーリエ級数による連続曲線桁の解析, 土木学会北海道支部研究発表会論文集, 第 24 号, pp. 65~73, 1968.
- 19) 渡辺 昇 : 曲線げたの理論と計算, 技報堂, 1967.
- 20) 稼農知徳 : 曲線格子橋の研究, 北海道大学工学部博士論文, 1970.
- 21) 稼農知徳 : 天狗橋上部構造の解析, 未発表.

(1973.1.22・受付)