

被圧地下水層への水の補給についての一考察

AN ANALYSIS OF RADIAL LEAKY FLOW TO CONFINED POROUS MEDIA

本 間 仁*・荻原国宏**

By Masashi Hom-ma and Kunihiro Ogihara

1. はじめに

被圧地下水、自由地下水についての井戸の問題はかなり前より研究されてきているが、その関連性についてはあまり研究されていない¹⁾。現在、多くの飲料水、工業用水は被圧地下水より取水されており、それに伴って地盤沈下のような現象が起こっていることはよく知られている。このような被圧地下水よりの取水が可能なのは、どこからか水の供給がなされなければいけない。その方法としていくつかの仮定がなされているが、ここではそのうちの1つ、上層の被圧地下水、または自由地下水よりの供給がある場合の井戸の問題を解析し、合わせて影響圏の1つの考え方を示した。このような解析の必要性は、地下水の水収支関係の解析においてなされていた貯留係数(地層中に貯留される水の量を示す係数で、被圧地下水よりの水の供給量は、その地層の体積 V 、圧力低下量 ΔP 、貯留係数 S の積で示される)を使った解析において、 S の値が非常に大きな値を使わなければ実測値と合致しないことより、被圧地下水の涵養機構について解明しなければならないことより出発している²⁾。

水収支の現象は非定常な現象であるので、本解析がそのままではまるわけではないが、影響圏の大きさなどを考えてブロック割りの大きさを決めるとか、または逆にブロック割りの大きさと影響圏の大きさより、被圧地下水の扱いだけでなく、自由地下水についても合わせて考慮しなければいけないかについて求めることができる。

なお、著者らはすでにスリットの取水溝についての解析を発表しており、実験により理論と

の検証を進めているが、その実験結果はまとめて別の機会に発表したいと考えている³⁾。

2. 被圧地下水層間の場合

(1) 基礎方程式およびその解

被圧地下水の場合で図-1に示された各層中の井戸に向う流量は、ダルシーの法則によって次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -2\pi rk_1 d_1 \frac{dp_1}{dr} \cdot \frac{1}{w} \\ q_2 &= -2\pi rk_2 d_2 \frac{dp_2}{dr} \cdot \frac{1}{w} \\ q_3 &= k_3 \frac{p_1/w + p_2 + d_3 - p_2/w}{d_3} \cdot 2\pi r \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

連続の式は

$$-\frac{dq_1}{dr} = q_3 = \frac{dq_2}{dr} \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで次のような関係式を使用して無次元化表示することにする。

$$q_1/Q_0 = Q_1, \quad q_2/Q_0 = Q_2, \quad Q_3 = q_3/Q_0 \cdot R, \quad x = r/R, \quad \lambda_1 = k_1 d_1, \quad \lambda_2 = k_2 d_2, \quad \lambda_3 = k_3 d_3, \quad H = d_1 + d_2 + d_3, \quad H_1 = p_1/w H,$$

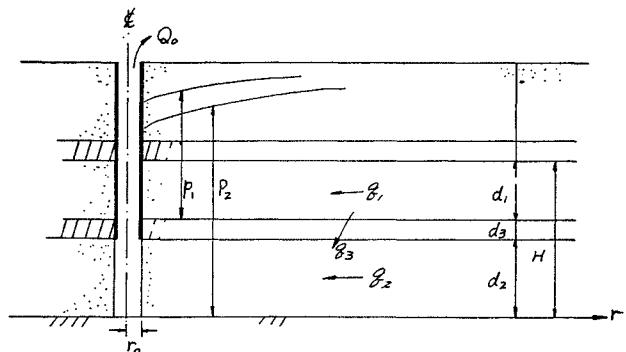


図-1

* 正会員 工博 東洋大学教授 工学部長
** 正会員 工博 東洋大学助教授 工学部 土木工学科

$$H_2 = p_2/wH, \quad \epsilon_1 = d_1/H, \quad \epsilon_2 = d_2/H, \quad \epsilon_3 = d_3/H, \quad \alpha = \lambda_1/\lambda_2,$$

$$C_M = \frac{2\pi H \lambda_2}{Q_0}, \quad \bar{H}_2 = H_2 - \epsilon_2 - \epsilon_3$$

$$N_0 = \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} M \dots\dots\dots(2)$$

$$M = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \cdot \left(\frac{R}{d_3}\right)^2 \dots\dots\dots(3)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -C_M \alpha x \frac{dH_1}{dx} \\ Q_2 &= -C_M x \frac{d\bar{H}_2}{dx} \\ Q_3 &= C_M \cdot M(H_1 - \bar{H}_2)x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$-\frac{dQ_1}{dx} = Q_3 = \frac{dQ_2}{dx} \dots\dots\dots(5)$$

これらの式より H_1 に関する微分方程式を導くと

$$x \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dH_1}{dx} \right) \right\} - \frac{1+\alpha}{\alpha} M x \frac{dH_1}{dx} = C_0 \dots\dots\dots(6)$$

ここで $Y = x \frac{dH_1}{dx}$ とおくと

$$x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dY}{dx} \right) - N_0^2 Y = C_0 \dots\dots\dots(7)$$

この解は

$$Y = AN_0 x I_1(N_0 x) + BN_0 x K_1(N_0 x) + C \dots\dots(8)$$

となり $I_1(N_0 x)$, $K_1(N_0 x)$ はそれぞれ 1 次の変形ベッセル関数であり, A, B, C は積分定数である。

(2) 境界条件を満足する解

無次元化した井戸の半径を $x=x_0$ として, ここでの条件は $x=x_0$ で

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 0, \quad H_1 = H_{10} \\ Q_2 &= -1, \quad H_2 = H_{20} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

である。これを満足する解は次のようになる。

$$H_1 = \frac{H_{20} + \alpha H_{10}}{1 + \alpha} + \frac{1}{C_M(1 + \alpha)} \log \frac{x}{x_0} + [AI_0(N_0 x) - BK_0(N_0 x)] \dots\dots\dots(10)$$

ただし $I_0(N_0 x)$, $K_0(N_0 x)$ はそれぞれ 0 次の変形ベッセル関数である。 A, B は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + \alpha} \left[(H_{10} - \bar{H}_{20}) N_0 x_0 K_1(N_0 x_0) - \frac{K_0(N_0 x_0)}{C_M} \right] \\ B &= -\frac{1}{1 + \alpha} \left[(H_{10} - \bar{H}_{20}) N_0 x_0 I_1(N_0 x_0) + \frac{I_0(N_0 x_0)}{C_M} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

これをもとにして H_2 および Q_1, Q_2, Q_3 を求めると, 次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= \frac{H_{20} + \alpha H_{10}}{1 + \alpha} + \frac{1}{C_M(1 + \alpha)} \log \frac{x}{x_0} - \alpha [AI_0(N_0 x) - BK_0(N_0 x)] \\ Q_1 &= -C_M \alpha N_0 x [AI_1(N_0 x) + BK_1(N_0 x)] - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \\ Q_2 &= C_M \alpha N_0 x [AI_1(N_0 x) + BK_1(N_0 x)] - \frac{1}{1 + \alpha} \\ Q_3 &= C_M \alpha N_0^2 x [AI_0(N_0 x) - BK_0(N_0 x)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

3. 自由地下水層と被圧地下水層の場合

(1) 基礎方程式および解

自由地下水(上層)の場合については(図-2)被圧地下水の場合と同様にして

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -2\pi r k_1 h_1 \frac{dh_1}{dr} \\ q_2 &= -2\pi r k_2 d_2 \frac{dp_2}{dr} \frac{1}{w} \\ q_3 &= k_3 \frac{h_1 + d_2 + d_3 - p_2/w}{d_3} \cdot 2\pi r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

連続の式は

$$-\frac{dq_1}{dr} = q_3 = \frac{dq_2}{dr} \dots\dots\dots(14)$$

この場合も次の各パラメーターによって無次元化する。

$$H_1 = h_1/H, \quad H_2 = p_2/wH, \quad H = d_1 + d_2 + d_3, \quad \lambda_1 = k_1 d_1, \quad \lambda_2 = k_2 d_2, \quad \lambda_3 = k_3 d_3, \quad \alpha = \lambda_1/\lambda_2, \quad \epsilon_1 = d_1/H, \quad \epsilon_2 = d_2/H, \quad \epsilon_3 = d_3/H, \quad C_M = 2\pi H \lambda_2/Q_0, \quad \beta = \lambda_3/\lambda_2, \quad M = \beta(R/d_3)^2, \quad \bar{H}_2 = H_2 - \epsilon_2 - \epsilon_3, \quad Q_1 = q_1/Q_0, \quad Q_2 = q_2/Q_0, \quad Q_3 = q_3 R/Q_0$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -C_M \frac{\alpha}{\epsilon_1} H_1 x \frac{dH_1}{dx} \\ Q_2 &= -C_M x \frac{d\bar{H}_2}{dx} \\ Q_3 &= C_M M(H_1 - \bar{H}_2) \cdot x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

$$-\frac{dQ_1}{dx} = Q_3 = \frac{dQ_2}{dx} \dots\dots\dots(16)$$

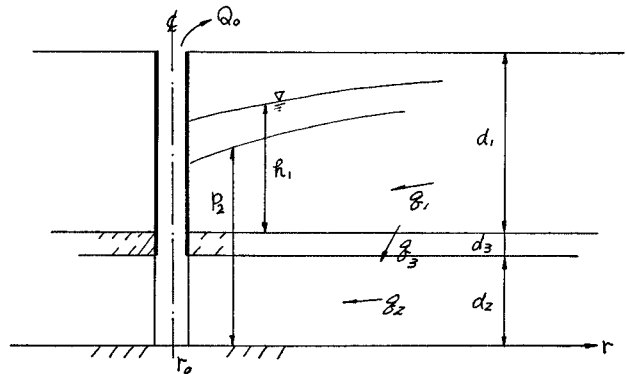


図-2

これらの式より H_1 に関する微分方程式を導くと、

$$\frac{\alpha x}{M \varepsilon_1} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x H_1 \frac{dH_1}{dx} \right) \right] - \frac{\alpha}{\varepsilon_1} H_1 x \frac{dH_1}{dx} - x \frac{dH_1}{dx} = C_0 \dots\dots\dots(17)$$

を得る。さらに $N_0 = \sqrt{M}$ として書きなおすと、次式が得られる。

$$x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x H_1 \frac{dH_1}{dx} \right) \right] - N_0^2 \left[\left(H_1 + \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) x \frac{dH_1}{dx} \right] = C_0 \dots\dots\dots(18)$$

(2) 第1近似解

この方程式は非線形であるので $H_1 \gg \varepsilon_1/\alpha$ として ε_1/α の項を省略する。 $Y = x H_1 \frac{dH_1}{dx}$ とおくと、

$$x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{dY}{dx} \right] - N_0^2 Y = C_0 \dots\dots\dots(19)$$

となり、式(7)と同じ方程式になる。したがって、解は式(8)と同じく、

$$Y = A N_0 x I_1(N_0 x) + B N_0 x K_1(N_0 x) + C \dots\dots(20)$$

を得る。 $I_1(N_0 x)$, $K_1(N_0 x)$ は1次の変形ベッセル関数である。

(3) 境界条件を満たす解

境界条件として、式(9)と同じ条件にとり、式(20)の積分定数を決めると次の解を得る。

$$\frac{H_1^2}{2} = \frac{H_{10}^2}{2} + \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \frac{1}{C_M} \log \frac{x}{x_0} - \frac{\varepsilon_1}{\alpha} (H_{10} - H_{20}) + [A I_0(N_0 x) - B K_0(N_0 x)] \dots\dots\dots(21)$$

ただし、 $I_0(N_0 x)$, $K_0(N_0 x)$ は0次の変形ベッセル関数、 A, B は次式で与えられる定数である。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \left[(H_{10} - \bar{H}_{20}) N_0 x_0 K_1(N_0 x_0) - \frac{1}{C_M} K_0(N_0 x_0) \right] \\ B &= -\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \left[(H_{10} - \bar{H}_{20}) N_0 x_0 I_1(N_0 x_0) + \frac{1}{C_M} I_0(N_0 x_0) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(22)$$

これをもとにして \bar{H}_2, Q_1, Q_2, Q_3 を求めると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= H_{10} - \frac{\alpha}{\varepsilon_1} [A I_0(N_0 x) - B K_0(N_0 x)] \\ Q_1 &= -1 - N_0 x \cdot \frac{\alpha C_M}{\varepsilon_1} [A I_1(N_0 x) + B K_1(N_0 x)] \\ Q_2 &= N_0 x \frac{\alpha C_M}{\varepsilon_1} [A I_1(N_0 x) + B K_1(N_0 x)] \\ Q_3 &= \frac{\alpha C_M}{\varepsilon_1} (N_0^2 x) [A I_0(N_0 x) - B K_0(N_0 x)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

(4) 第2近似解

第1次近似解は、式(18)で $H_1 \gg \varepsilon_0/\alpha$ として ε_0/α の項を省略して求めたが、ここでこの項の影響について求めてみる。

$$H_1 = \bar{H}_1 + \varepsilon_1 f_1 \dots\dots\dots(24)$$

として \bar{H}_1 は式(23)で与えられる解とする。式(24)を(18)に代入して、 ε_1 の0次、1次のオーダーについてまとめると次式を得る。

$$x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \bar{H}_1 \frac{d\bar{H}_1}{dx} \right] - x \cdot M \bar{H}_1 \frac{d\bar{H}_1}{dx} = C_0 \dots\dots\dots(25)$$

$$\left. \begin{aligned} x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{Mx} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d(f_1 \bar{H}_1)}{dx} \right) \right] - x \frac{d}{dx} \left[\bar{H}_1 \left(f_1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right] &= 0 \dots\dots\dots(26) \end{aligned} \right\}$$

ここで式(25)は、第1近似解を得た式(19)と同じであるので、この解は式(21)である。そこで、ここで $x \frac{d(f_1 \bar{H}_1)}{dx} = Y$ とおいて式(26)の解を求めてみる。

$$x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{Mx} \frac{dY}{dx} \right) - Y = \frac{x}{\alpha} \frac{d\bar{H}_1}{dx} \dots\dots\dots(27)$$

この式の一般解は、右辺を0とおいた解に、特異解を加えればよい。右辺を0とおいた解は、変形ベッセル関数として

$$y_1 = N_0 x I_1(N_0 x), y_2 = N_0 x K_1(N_0 x)$$

で与えられることは式(19)の解で求めた。ここで式(27)の特異解を求めればよいことになる。特異解 $F(x)$ は

$$F(x) = -y_1 \int \frac{f_3(x)}{4} y_2 dx + y_2 \int \frac{f_3(x)}{4} y_1 dx,$$

$$4 = y_1 y_2' - y_2 y_1', f_3(x) = \frac{x}{\alpha} \frac{d\bar{H}_1}{dx}$$

で与えられるので、これに y_1, y_2 を代入して、部分積分を繰返すことにより次の解を得る。

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{N_0 x}{\alpha N_0} \left[-\frac{f_3(x)}{N_0 x} - \frac{1}{N_0 x} \left(\frac{f_3'(x)}{N_0 x} \right)' \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N_0 x} \left(\left(\frac{f_3'(x)}{N_0 x} \right)' / N_0 x \right)' \right] \\ &= \frac{1}{\alpha N_0} \left[-x \frac{d\bar{H}_1}{dx} - \frac{1}{N_0} \frac{d^2 \bar{H}_1}{dx^2} - \frac{1}{N_0^2} \left(\frac{\bar{H}_1'}{x} \right)' - \dots\dots \right] \dots\dots\dots(28) \end{aligned} \right\}$$

N_0 の値がかなり大きいことを考慮すれば ($R \gg d_s$) 第2項以下は、初項に比して無視できると考えられるので式(27)の解は

$$\left. \begin{aligned} Y &= A_1 N_0 x I_1(N_0 x) + A_2 N_0 x K_1(N_0 x) \\ &\quad - \frac{x}{\alpha N_0} \frac{d\bar{H}_1}{dx} = x \frac{d(f_1 \bar{H}_1)}{dx} \dots\dots\dots(29) \end{aligned} \right\}$$

である。これで、境界条件式(9)を満たす解を求める

と、

$$f_1 \bar{H}_1 = \frac{\epsilon_1}{\alpha^2} \frac{H_{10} - H_{20}}{H_{10}} \cdot \frac{1}{N_0} \{N_0 x_0 [K_1(N_0 x_0) I_0(N_0 x) + K_0(N_0 x) \cdot I_1(N_0 x_0)] - 1\} + \frac{1}{\alpha N_0} (\bar{H}_{10} - \bar{H}_1) \dots (30)$$

したがって、第1近似解の修正量は

$$\Delta H_1 = \epsilon_1 f_1 = \frac{\epsilon_1^2}{\alpha^2} \frac{H_{10} - H_{20}}{H_{10}} \cdot \frac{1}{N_0 \bar{H}_1} \{N_0 x_0 [K_1(N_0 x_0) I_0(N_0 x) + K_0(N_0 x) \cdot I_1(N_0 x_0)] - 1\} + \frac{\epsilon_1}{\alpha N_0} (\bar{H}_{10} - \bar{H}_1) / \bar{H}_1 \dots (31)$$

$$\Delta Q = \frac{H_{10} - H_{20}}{H_{10}} \frac{C_M \epsilon_1}{\alpha} N_0 x_0 \{K_1(N_0 x_0) I_1(N_0 x) - K_1(N_0 x) \cdot I_1(N_0 x_0)\} - \frac{1}{\alpha N_0} \frac{\bar{Q}_1}{\bar{H}_1} \epsilon_1 \dots (32)$$

\bar{Q}_1 は式 (23) で与えられる Q_1 である。

$$\Delta H_2 = \Delta H_1 - \frac{1}{C_M M} \left[\frac{\bar{Q}_3}{\bar{H}_1} + \frac{\bar{Q}_1}{\bar{H}_1^3 x} \bar{Y} \right] \dots (33)$$

\bar{Q}_3, \bar{Y} は式 (23) および式 (20) の Q_3, Y である。

4. 理論式の解の検討

(1) 被圧地下水, 自由地下水, 各場合の水面的と圧力分布

前節で求めた解 (10), (12), (21), (23), (31)~(33) 式を使って 2~3 case について数値計算してグラフにしたのが 図-3 である。これは $d_1=30$ m, $d_3=2$ m, $d_2=8$ m, $R_0=20$ m, $k_1=0.0001$ m/sec, $k_2=0.0001$ m/sec, $k_3=0.000001$ m/sec で, $H_{10}=0.25$, $H_{20}=0.05$ の場合について, 取水量を $Q=5, 2, 1$ l/sec としたときの水面形 (無次元) をグラフにしたものである。図-3 は自由地下水の場合であるが, 被圧地下水の場合も傾向はほぼ同じである。これは d_1 の層が他層に比してかなり大きいためであるが, 井戸近辺の値は若干異なっている (表-1)。

(2) 上層および下層の流量

水面形と同じ場合について, 流量をグラフにしたのが

図-4 である。これは取水量中に含まれる各層の量が取水量の何%になっているかで示したものであり, たとえば 1 l/sec の取水の場合には, $X=0.4$ (8 m) の地点では 70% の水が上層より補給されたことを示している。被圧地下水の場合も同様な傾向を示すことは表-1 の値よりわかる。

(3) 限界条件に対する検討

a) 漏水が起こらない場合

この場合は中間層の透水係数 $k_3 \rightarrow 0$, と上層の透水係数 $k \rightarrow 0$ を考えに入れると, $\alpha \rightarrow 0, N_0 \rightarrow 0$ の場合に相当する。

被圧地下水の場合は式 (10)~(12) において, 上記の条件を入れてやればよい。ただし, $N_0 \rightarrow 0$ のときの $I_0(N_0 x), I_1(N_0 x), K_0(N_0 x), K_1(N_0 x)$ は

$$\left. \begin{aligned} I_0(N_0 x) &\rightarrow 1, I_1(N_0 x) \rightarrow 0 \\ K_0(N_0 x) &\rightarrow -\log(N_0 x), K_1(N_0 x) \rightarrow 1/N_0 x \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

であることを考えると式 (11) の A, B は

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{1+\alpha} \left[(H_{10} - H_{20}) + \frac{1}{C_M} \log(N_0 x_0) \right] \\ B &= -\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{C_M} \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

となり, したがって式 (10), (12) は,

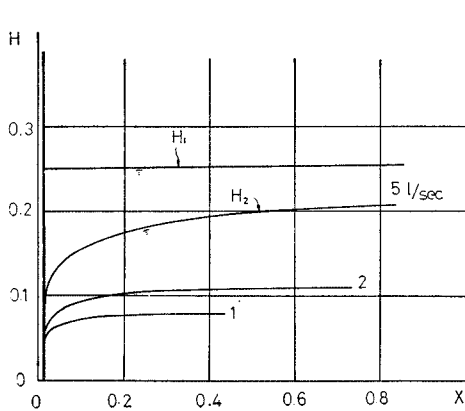


図-3

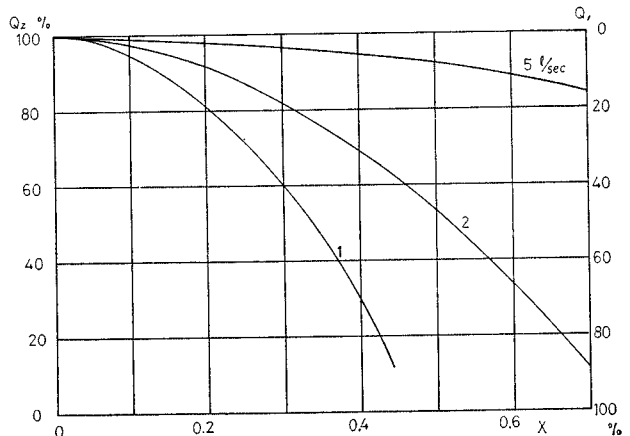


図-4

表-1

```

-----
D1 = 30.000000 K1 = 0.000100 RAMDA1 = 0.003000
-----
D3 = 2.000000 K3 = 0.000001 RAMDA3 = 0.000002
-----
D2 = 8.000000 K1 = 0.000100 RAMDA2 = 0.000800
-----
//////////

R0 = 20.0000 Q0 = 0.0020 H10 = 0.2500
H20 = 0.0500 X0 = 0.0012
    
```

CONFINED RADIAL FLOW

UNCONFINED RADIAL FLOW

X	H1	H2	X	H1	H2
0.05	0.2500	0.0867	0.0500	0.2500	0.0867
0.10	0.2500	0.0935	0.1000	0.2501	0.0935
0.15	0.2501	0.0974	0.1500	0.2502	0.0974
0.20	0.2501	0.1001	0.2000	0.2503	0.1001
0.25	0.2502	0.1021	0.2500	0.2505	0.1021
0.30	0.2502	0.1036	0.3000	0.2507	0.1036
0.35	0.2503	0.1049	0.3500	0.2509	0.1049
0.40	0.2504	0.1058	0.4000	0.2512	0.1058
0.45	0.2505	0.1066	0.4500	0.2515	0.1066
0.50	0.2506	0.1072	0.5000	0.2519	0.1072
0.55	0.2508	0.1077	0.5500	0.2523	0.1077
0.60	0.2509	0.1080	0.6000	0.2527	0.1081
0.65	0.2510	0.1083	0.6500	0.2531	0.1083
0.70	0.2512	0.1084	0.7000	0.2536	0.1084

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_{10} \\ H_2 &= \bar{H}_{20} + \frac{1}{C_M} \log \frac{x}{x_0} \\ Q_1 &= 0, Q_3 = 0, \\ Q_2 &= -1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

となる。また自由地下水の場合も同様にして式 (22) より

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\epsilon_1}{\alpha} \left[(H_{10} - \bar{H}_{20}) + \frac{1}{C_M} \log(N_0 x_0) \right] \\ B &= -\frac{\epsilon_1}{\alpha} \frac{1}{C_M} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

となり、したがって式 (21), (23) は

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_{10} \\ H_2 &= \bar{H}_{20} + \frac{1}{C_M} \log \frac{x}{x_0} \\ Q_1 &= 0, Q_3 = 0 \\ Q_2 &= -10 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

を得る。これらは $C_M = 2\pi H \cdot d_2 k_2 / Q_0$ であることを考えると、被圧地下水の井戸の式に一致する¹⁾。

b) 限界取水量

限界取水量は $(H_{10} - \bar{H}_{20})$ と Q_0 の関係を決定するもので、 $Q_3 \geq 0$ となる条件より決められる。 x の広い範囲にわたって、この条件が成り立つことを考慮しなければいけないとすると、

$$AI_0(N_0 x) - BK_0(N_0 x) \geq 0 \dots\dots\dots(39)$$

が x のかなりの範囲にわたって成立する必要がある。

$I_0(N_0 x), K_0(N_0 x)$ で $N_0 x$ がかなり大きいとして漸近展開の初項で近似させると

$$\left. \begin{aligned} I_0(N_0 x) &= \frac{e^{N_0 x}}{\sqrt{2\pi(N_0 x)}} \\ K_0(N_0 x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\pi(N_0 x)}} e^{-N_0 x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

となり $x \rightarrow \infty$ を考えると、式 (39) に (11), (22) の A, B の値と (40) を考慮すると、結局

$$(H_{10} - \bar{H}_{20}) C_M N_0 x_0 \frac{K_1(N_0 x_0)}{K_0(N_0 x_0)} \geq 1 \dots\dots\dots(41)$$

の条件を得る。この式より $N_0 x_0$ と $(H_{10} - \bar{H}_{20}) \cdot C_M$ の関係をグラフにしたのが 図-5 である。 N_0 の値は被圧地下水と自由地下水の場合で異なっており、

被圧地下水の場合は

$$\begin{aligned} N_0 &= \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} M = \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \left(\frac{R}{d_3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \times \left(\frac{R}{d_3}\right) \end{aligned}$$

自由地下水の場合は

$$N_0 = \sqrt{M} = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \cdot \frac{R}{d_3}$$

となり、井戸の半径を R_0 で与えると

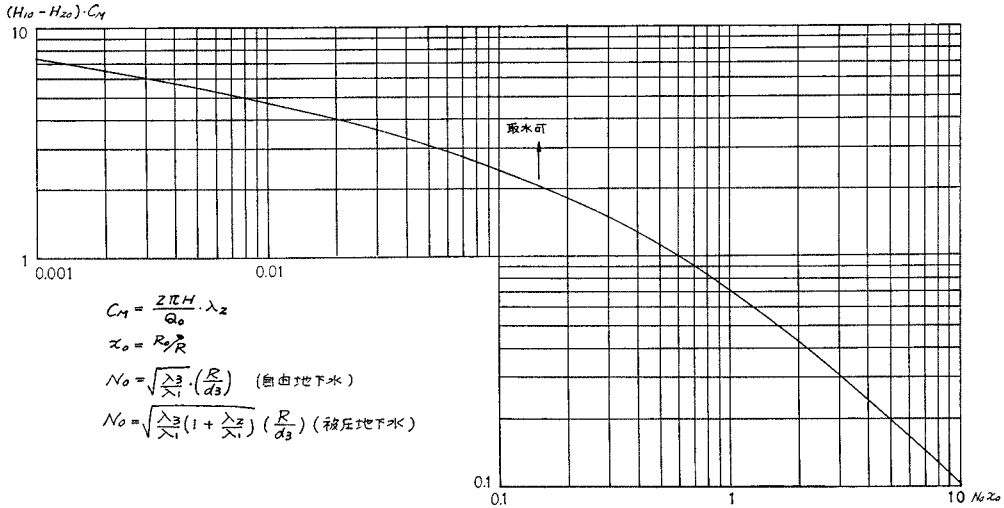


図-5

$$\left. \begin{aligned}
 N_0 x_0 &= \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} \cdot \frac{R_0}{d_3} \text{ (被圧地下水)} \\
 N_0 x_0 &= \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \cdot \frac{R_0}{d_3} \text{ (自由地下水)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

で与えられる。

e) 取水量の $P\%$ が上層より補給される地点 x これは $Q_1 = P$ となるとき x を式 (12), (23) より求めることになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{被圧地下水} \\
 P/\alpha - \frac{1}{1+\alpha} &= C_M N_0 x [AI_1(N_0 x) + BK_1(N_0 x)] \\
 \text{自由地下水} \\
 P-1 &= N_0 x \frac{\alpha C_M}{\epsilon_1} [AI_1(N_0 x) + BK_1(N_0 x)]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

となる。

P を何%の点が影響圏とするかは工学的な判断になるが、上層からの水が取水量に100%含まれるまでの地点で影響圏を決めるとすれば式 (43) で $P=1$ とすればよいことになる。図-6 に示したグラフは式 (43) を書きなおして式 (44) の形にして、

自由地下水

$$\begin{aligned}
 P-1 &= C_0 (N_0 x_0)^2 \left(\frac{x}{x_0}\right) [K_1(x_0 N_0) \cdot I_1(N_0 x) \\
 &\quad - I_1(N_0 x_0) \cdot K_1(N_0 x)] - (N_0 x_0) \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \\
 &\quad \cdot [K_0(N_0 x_0) I_1(N_0 x) + I_0(N_0 x_0) \cdot K_1(N_0 x)] \\
 &\quad \dots\dots\dots(44)
 \end{aligned}$$

被圧地下水

$$P \frac{1+\alpha}{\alpha} - 1 = \text{式 (44) の右辺と同じ}$$

図-6 は取水する水がすべて上層からの水の場合を示すので、 $P=1$ となるとき $(x/x_0) - (N_0 x_0)$ の関係を C_0 をパラメーターにして示したものである。

ただし、 $C_0 = C_M (H_{10} - \bar{H}_{20})$ であり、 (x/x_0) は井戸径の何倍の地点であるかを示すものである。このグラフより影響圏を決定できる。その具体例は次節で示すことにする。

d) まとめ

図-5 を使うと、地層、井戸の条件より $N_0 x_0$ の値が決まるので、その値に相当する、 $(H_{10} - H_{20}) C_M = (H_{10} - H_{20}) \frac{2\pi H}{Q_0} \lambda_2$ の値が限界値として決まってくる。したがって、取水量 Q_0 は水頭差 $(H_{10} - H_{20})$ に比例することがわかる。また不透水層の透水係数 X 層厚の値 λ_3 が減ると、上層より下層に流れる抵抗が増すので、図-5 中の式からもわかるごとく $N_0 \rightarrow$ 小となると $(H_{10} -$

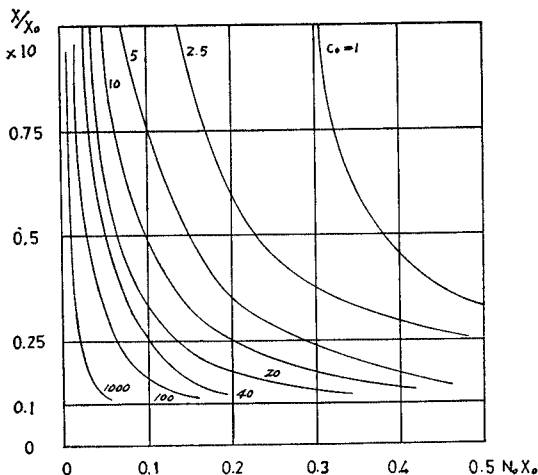


図-6

$H_{20} \cdot C_M \rightarrow$ 大となり、取水量は減ることになる。

このグラフを使って、たとえば $d_1=d_2=20$ m, $d_3=5$ m, $k_1=k_2=0.1$ cm/sec, $k_3=0.001$ cm/sec, $R_0=10$ cm の井戸で $(H_{10}-H_{20})=0.1$ (4.5 m 水頭差) のときの限界取水量を求めると、自由地下水の場合は 76.2 l/sec, 被圧地下水の場合には 80.8 l/sec となる。これ以上取水するとこの解析での流れの仮定と異なり、下層に負圧が発生したり、不飽和の部分が生ずる流れとなる。

次に 図-6 を使うと、下層より取水している量が、100% 上層より補給されるまでの地点 (影響圏) を求めることができる。この図からもわかるごとく、取水量を増せば、 $C_0=(H_{10}-H_{20}) \cdot C_M=(H_{10}-H_{20}) \cdot \frac{2\pi H}{Q_0} \lambda_2$ は減ずることになり、 $N_0 x_0$ の値が一定の場合には x/x_0 は増すことを示している。すなわち、取水量が大きくなると、その影響は遠くまでおぼすことになる。たとえば $d_1=d_2=20$ m, $d_3=1$ m, $r_0=1$ m とし、 $k_1=k_2=0.1$ cm/sec, $k_3=0.001$ cm/sec とするとき、 $(H_{10}-H_{20})=0.1$ (4.1 m 水頭差) で $Q_0=10$ l/sec の取水をしたとすると $C_0=51.2$ となり、 $N_0 x_0=3.16 \times 10^{-2}$ であることを考えると $x/x_0=0.64 \times 10=6.4$, $x=6.4$ m となる。ただし、図-6 は $P=1$ (100%) (自由地下水), $P \times \frac{1+\alpha}{\alpha}=1$ (被圧地下水) の場合であってほかの場合には別のグラフを使う必要がある。

5. おわりに

以上の解析によって得られた結果をまとめると、

1) 被圧地下水層への水の供給の1つの考え方として、それに接する自由地下水層または被圧地下水層よりの補給についての解析が得られた。

2) この結果より、被圧地下水から取水をしても、その水が他層から 100% 補給される地点を求めることができる。この地点を影響圏と考え、地下水の収支計算の場合のブロック割りの大きさを決定することができる。また逆にブロック割りの大きさから、地下水収支の計算で被圧地下水の扱い、自由地下水の扱いをすべきか決定できる。

3) この解析は取水層が飽和地下水であって、負圧の発生しない条件で解いているので、負圧の発生限界より限界取水量を決定できる。

4) この解析では、上層の地下水が粘土層を通して補給されることにしているので、その補給が困難な場合には、粘土層内の水が、しぼり出される現象が起り、地盤沈下の原因となる。

5) さきに述べたように、被圧地下水への水の補給過程の1つの解析であって、ほかにも種々な補給過程があるので、これに引きつづき解析を進めるとともに、模型

実験によってこの結果を確認する準備を進めている。

記号表

d_1 : 上層の厚さ [L]
d_2 : 下層, 取水層の厚さ [L]
d_3 : 粘土層の厚さ [L]
λ_1 : $d_1 k_1$ [L ² /T]
λ_2 : $d_2 k_2$ [L ² /T]
λ_3 : $d_3 k_3$ [L ² /T]
w : 水の単位重量 [F/L ³]
x : r/R 無次元座標 [1]
q_1, q_2 : 上層, 下層中を水平に流れる流量 [L ³ /T]
q_3 : 不透水層を上層より下層に向けて流れる単位幅当たりの流量 [L ² /T]
k_1 : 上層の透水係数 [L/T]
k_2 : 下層の透水係数 [L/T]
k_3 : 粘土層の透水係数 [L/T]
p_1 : 上層の圧力 [F/L ²]
p_2 : 下層の圧力 [F/L ²]
h_1 : 自由地下水の場合の上層の水深 [L]
r : 座標半径 [L]
R : 無次元化するための半径 [L]
r_0 : 井戸半径 [L]
x_0 : 無次元化井戸半径 [1]
Q_1, Q_2, Q_3 : $q_1/Q_0, q_2/Q_0, q_3 R/Q_0$ で無次元流量 [1]
H : $d_1+d_2+d_3$ [L]
H_1 : $p_1/\omega H$ [1]
H_2 : $p_2/\omega H$ [1]
ϵ_1 : d_1/H [L]
ϵ_2 : d_2/H [1]
ϵ_3 : d_3/H [1]
α : λ_1/λ_2 [1]
β : λ_3/λ_2 [1]
C_M : $2\pi H \lambda_2/Q_0$ [1]
C_0 : $C_M \cdot (H_{10}-H_{20})$ [1]
H_{10}, H_{20} : $X=X_0(r=r_0)$ での H_1, H_2 の値
\bar{H}_2 : $H_2 - \epsilon_2 - \epsilon_3$ [1]
M : $\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \cdot \left(\frac{R}{d_3}\right)^2$ [1]
N_0 : $\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} M$ (被圧地下水), \sqrt{M} (自由地下水)
$I_1(), K_1(), I_0(), K_0()$: 1次, 0次の変形ベッセル関数

参考文献

- 1) 土木学会編：水理公式集，昭和47年版，p. 367「定常的な井戸」。
- 2) 新藤静夫：南関東の地下水，土質工学会誌，Vol. 20, No. 5, ほかに同著者による研究報告数編あり。

- 3) 本間 仁・荻原国宏：被圧地下水への水の供給の問題，東洋大学工学部研究報告，昭和48年3月。
- 4) 丸善：理工学のための数学ハンドブック，ベッセル関数。
- 5) 磯田和男・大野 豊監修：Fortranによる数値計算ハンドブック，オーム社。
- 6) Howell N. Tyson, Jr. & Ernest M. Weber：Ground-Water Management for the Nations Future-Computer Simulation of Ground-Water Basin, Proc. A.S.C.E., Vol. 90, No. HY 4.
- 7) 酒井軍治郎：地下水学，朝倉書店。
- 8) 酒井軍治郎：応用地下水学，朝倉書店。
- 9) Jacob, C.E.：On the flow of water in an elastic artesian aquifer, Tr.A.G.U., 1940.
- 10) Jacob, C.E.：Radial flow in a leaky artesian aquifer, Tr.A.G.U., Vol. 27, No. 2, 1946.
- 11) Hantush, M.S. and Jacob, C.E.：Nonsteady radial flow in an infinite aquifer, Tr.A.G.U., Vol. 36, No. 1, 1955.
- 12) Hantush, M.S. and Jacob, C.E.：Nonsteady Green's functions for an infinite strip of leaky aquifer, Tr.A.G.U., Vol. 36, No. 1, 1955.
- 13) Hantush, M.S. and Jacob, C.E.：Steady-three-dimensional flow to a well in a two-layered aquifer, Tr.A.G.U., Vol. 36, No. 2, 1955.

(1973.3.9・受付)
