

## 2 ヒンジ円弧アーチの面内座屈特性に関する研究

### ON THE BUCKLING CHARACTERISTICS OF 2-HINGED CIRCULAR ARCHES

崎 山 毅\*  
By Takeshi Sakiyama

#### 1. 序 言

2 ヒンジ円弧アーチの面内弾性座屈に関しては、古くから多くの研究がなされてきている。Timoshenko<sup>1)</sup> は円形等分布荷重に対する座屈性状を解析し、Chwalla および Kollbrunner<sup>2),3)</sup> は対称荷重に対する座屈性状を理論的および実験的に研究した。Oran<sup>4)</sup> は2 ヒンジ円弧アーチおよびその他の円弧アーチに関して、円形等分布荷重に対する座屈性状をエネルギー理論により明らかにした。DaDeppo および Schmidt<sup>5)</sup> はアーチクラウンに作用する鉛直集中荷重による座屈を解明した。以上の研究においては、いずれも、アーチ部材図心軸の非圧縮性の仮定のもとに、座屈直前までアーチ部材は円弧状に保たれるものとして解析が行なわれている。

さらに2 ヒンジ円弧アーチの図心軸の圧縮性を考慮し、座屈前の曲げ変形を考慮して、Huddleston<sup>6)</sup> は鉛直集中荷重による飛移り座屈を解析し、また、Dym<sup>7)</sup> は円形等分布荷重に対する逆対称座屈荷重を明らかにしたが、これらの理論の適用範囲から偏平アーチは除外されている。

偏平アーチと通常の拱矢比をもつ円弧アーチとでは、座屈特性に著しい相違のあることが知られている<sup>1)</sup>。従来、両者は互いに区別された座屈理論によって解析されており、偏平アーチおよび高アーチを包含する一般的な円弧アーチの座屈理論は著者の知る限りない。また、座屈特性におよぼすせん断変形の影響もいまだ定量的に解明されていないようである。

本論文はアーチ部材図心軸のひずみおよびせん断変形を考慮して導かれた円弧アーチの変形方程式を用いて、2 ヒンジアーチの面内弾性座屈の特性を明らかにしたものである。理論は通常の拱矢比をもつアーチのみならず偏平アーチにも適用でき、その結果、両者の座屈特性の

相違を量的に把握することが可能となる。荷重に関しては、円形等分布荷重、部分的に分布する対称荷重および非対称荷重を取扱い、座屈前にアーチ面内において軸線に直角に作用していた荷重は座屈時もおお変形した軸線に直角に作用するものとして解析を行なった。

#### 2. 変形方程式

##### (1) アーチの変形状態での力のつり合い

変形状態にある円弧アーチの任意の微小部分に関して、図-1<sup>8)</sup>を参照して、力のつり合い条件を求める。曲げモーメント、軸力およびせん断力をそれぞれ  $M$ ,  $N$  および  $Q$  で、また、変形時のアーチ部材軸の法線方向および接線方向の荷重強度を  $p^*$  および  $q^*$  で表わせば、高次の微小項を無視して、つり合い条件は次の3式となる。

$$\frac{dQ}{dS^*} + \frac{N}{R^*} + p^* = 0 \dots\dots\dots(1.a)$$

$$\frac{dN}{dS^*} - \frac{Q}{R^*} + q^* = 0 \dots\dots\dots(1.b)$$

$$\frac{dM}{dS^*} - Q = 0 \dots\dots\dots(1.c)$$

円弧アーチの任意点の変形前の曲率  $1/R$  と変形時の曲率  $1/R^*$  との関係が 図-1 から求められる。図心軸

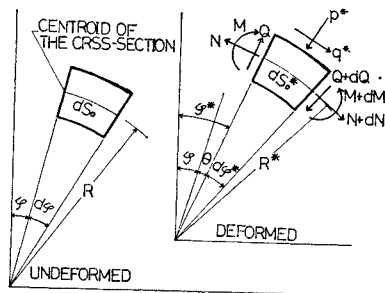


図-1 アーチ微小部分の変形前と変形後

\* 正会員 長崎大学助教授 工学部構造工学科

のひずみを  $\epsilon_0$  として

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^*} &= \frac{d\varphi^*}{dS^*} = \frac{1}{1+\epsilon_0} \frac{d\varphi^*}{dS} \\ &= \frac{1}{(1+\epsilon_0)R} \frac{d\varphi^*}{d\varphi} \dots\dots\dots(2) \\ \theta &= \varphi^* - \varphi \end{aligned}$$

であるゆえ

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{1+\epsilon_0} \left( \frac{d\theta}{d\varphi} + 1 \right) \frac{1}{R} \doteq \left( \frac{d\theta}{d\varphi} + 1 \right) \frac{1}{R} \dots\dots\dots(3)$$

$$R^* = \frac{R}{1+\theta'} \doteq \left( 1 - \frac{d\theta}{d\varphi} \right) R \dots\dots\dots(4)$$

を得る。さらに

$$dS^* = R^* d\varphi^* \doteq R^* d\varphi \dots\dots\dots(5)$$

なる近似を行ない，式(4)を用いれば，つり合い条件式(1)は次式となる。

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N + \left( 1 - \frac{d\theta}{d\varphi} \right) p^* R = 0 \dots\dots\dots(6\cdot a)$$

$$\frac{dN}{d\varphi} - Q + \left( 1 - \frac{d\theta}{d\varphi} \right) q^* R = 0 \dots\dots\dots(6\cdot b)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} - QR = 0 \dots\dots\dots(6\cdot c)$$

(2) 諸量間の関係式

円弧アーチの任意点における法線方向および接線方向の変位をそれぞれ  $u, w$  とし，曲げモーメント  $M$  によるたわみ角を  $\psi$  とすれば，これら 諸変位と全たわみ角  $\theta$ ，せん断力によるたわみ角  $\beta_0$ ，曲げモーメント  $M$ ，軸力  $N$  およびせん断力  $Q$  との間には，アーチの微小変形理論におけるのと同一の次の関係が成立する。部材の弾性係数，せん断弾性係数，断面 2 次モーメント，断面積をそれぞれ  $E, G, I, A$  とし，図心におけるせん断応力と平均せん断応力との比を  $\kappa$  で表わせば

$$\theta = \psi + \beta_0 = \frac{1}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right) \dots\dots\dots(7\cdot a)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right) - \psi \dots\dots\dots(7\cdot b)$$

$$M = - \frac{EI}{R} \frac{d\psi}{d\varphi} \dots\dots\dots(7\cdot c)$$

$$N = \frac{EA}{R} \left( \frac{dw}{d\varphi} - u \right) \dots\dots\dots(7\cdot d)$$

$$Q = \frac{AG}{\kappa} \beta_0 = \frac{AG}{\kappa} \left\{ \frac{1}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right) - \psi \right\} \dots\dots\dots(7\cdot e)$$

(3) 円弧アーチの変形方程式

円弧アーチの変形方程式は式(7)の各式をつり合い条件式(6)に代入することにより求められ，3個の無次元変位量  $\bar{u}, \bar{w}, \psi$  に関する次の連立微分方程式となる。

$$\begin{cases} \alpha a^2 \left( \frac{d\bar{w}}{d\eta} - \alpha \bar{u} \right) + \mu^2 a^2 \left( \frac{d^2 \bar{u}}{d\eta^2} + \alpha \frac{d\bar{w}}{d\eta} - \frac{d\psi}{d\eta} \right) \\ \quad + \frac{p^* L^3}{\alpha EI} \left( \alpha - \frac{d^2 \bar{u}}{d\eta^2} - \alpha \frac{d\bar{w}}{d\eta} \right) = 0 \dots\dots(8\cdot a) \\ a^2 \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\eta^2} - \alpha \frac{d\bar{u}}{d\eta} \right) - \alpha \mu^2 a^2 \left( \frac{d\bar{u}}{d\eta} + \alpha \bar{w} - \psi \right) \\ \quad + \frac{q^* L^3}{\alpha EI} \left( \alpha - \frac{d^2 \bar{u}}{d\eta^2} - \alpha \frac{d\bar{w}}{d\eta} \right) = 0 \dots\dots(8\cdot b) \\ \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} + \mu^2 a^2 \left( \frac{d\bar{u}}{d\eta} + \alpha \bar{w} - \psi \right) = 0 \dots\dots(8\cdot c) \end{cases}$$

ただし， $d\eta = d\varphi/\alpha$ ， $L, \alpha$ ：円弧アーチの部材長および中心角

$$\bar{u} = u/L, \bar{w} = w/L, \mu^2 = G/\kappa E, a^2 = AL^2/I$$

また，新変数  $\eta$  および無次元変位  $\bar{u}, \bar{w}, \psi$  を用いれば式(7)の(c)，(d)，(e)は

$$M = - \frac{EI}{L} \frac{d\psi}{d\eta} \dots\dots\dots(9\cdot a)$$

$$N = EA \left( \frac{d\bar{w}}{d\eta} - \alpha \bar{u} \right) \dots\dots\dots(9\cdot b)$$

$$Q = \frac{AG}{\kappa} \left( \frac{d\bar{u}}{d\eta} + \alpha \bar{w} - \psi \right) \dots\dots\dots(9\cdot c)$$

3. 部分的等分布荷重による円弧アーチの変形

導かれた変形方程式(8)により，各種形式の荷重に対する円弧アーチの座屈性状が解析される。ここでは，任意位置に作用する部分的円形等分布荷重に対する変形を算定する。アーチ部材の全長に働く円形等分布荷重あるいは法線方向集中荷重による円弧アーチの変形は特別の場合として本問題中に含まれる。

変形時も外力は部材軸の法線方向に作用するものとすれば図-2に示すような部分的円形等分布荷重  $p$  による円弧アーチの変形は次の方程式からえられる。

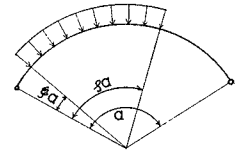


図-2 部分的等分布荷重

$$\begin{cases} \alpha a^2 \left( \frac{d\bar{w}}{d\eta} - \alpha \bar{u} \right) + \mu^2 a^2 \left( \frac{d^2 \bar{u}}{d\eta^2} + \alpha \frac{d\bar{w}}{d\eta} - \frac{d\psi}{d\eta} \right) \\ \quad + k^2 \left( \alpha - \frac{d^2 \bar{u}}{d\eta^2} - \alpha \frac{d\bar{w}}{d\eta} \right) [u(\eta - \xi) - u(\eta + \xi)] \\ \quad = 0 \dots\dots\dots(10\cdot a) \\ \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\eta^2} - \alpha \frac{d\bar{u}}{d\eta} \right) - \alpha \mu^2 \left( \frac{d\bar{u}}{d\eta} + \alpha \bar{w} - \psi \right) = 0 \\ \quad \dots\dots\dots(10\cdot b) \\ \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} + \mu^2 a^2 \left( \frac{d\bar{u}}{d\eta} + \alpha \bar{w} - \psi \right) = 0 \dots\dots(10\cdot c) \end{cases}$$

ただし

$$k^2 = \frac{pL^3}{\alpha EI}, u(\eta - \xi) = \begin{cases} 0 (\eta < \xi) \\ 1 (\eta > \xi) \end{cases}$$

$$u(\eta-\zeta) = \begin{cases} 0 & (\eta < \zeta) \\ 1 & (\eta > \zeta) \end{cases}$$

連立微分方程式 (10・a), (10・b), (10・c) は式中に単位階段関数  $u(\eta-\xi)$  および  $u(\eta-\zeta)$  を含む特殊な表現形式をもつ。

2 ヒンジ円弧アーチの左支点の境界条件

$$\bar{u}(0) = \bar{w}(0) = \bar{M}(0) = 0$$

を考慮して、連立微分方程式 (10・a)~(10・c) の解を求めることにより法線および接線方向変位  $\bar{u}(\eta)$  および  $\bar{w}(\eta)$  と曲げモーメント  $\bar{M}(\eta)$  が次のとおりえられる。

$$\bar{u}(\eta) = u_1(\eta) \cdot \psi(0) + U_N(\eta) \cdot \bar{N}(0) + U_Q(\eta) \cdot \bar{Q}(0) - U_0(\eta) \dots\dots\dots(11\cdot a)$$

$$\bar{w}(\eta) = w_1(\eta) \cdot \psi(0) + W_N(\eta) \cdot \bar{N}(0) + W_Q(\eta) \cdot \bar{Q}(0) - W_0(\eta) \dots\dots\dots(11\cdot b)$$

$$\bar{M}(\eta) = M_N(\eta) \cdot \bar{N}(0) + M_Q(\eta) \cdot \bar{Q}(0) - M_0(\eta) \dots\dots\dots(11\cdot c)$$

ただし

$$\begin{bmatrix} U_N(\eta) \\ U_Q(\eta) \\ U_0(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(\eta) & U_1(\eta-\xi) & -U_2(\eta-\zeta) \\ u_3(\eta) & U_3(\eta-\xi) & -U_4(\eta-\zeta) \\ 0 & -u_4(\eta-\xi) & U_5(\eta-\zeta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u(\eta-\xi) \\ u(\eta-\zeta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_N(\eta) \\ W_Q(\eta) \\ W_0(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2(\eta) & W_1(\eta-\xi) & -W_2(\eta-\zeta) \\ w_3(\eta) & W_3(\eta-\xi) & -W_4(\eta-\zeta) \\ 0 & -w_4(\eta-\xi) & W_5(\eta-\zeta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u(\eta-\xi) \\ u(\eta-\zeta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_N(\eta) \\ M_Q(\eta) \\ M_0(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2(\eta) & -M_1(\eta-\xi) & M_2(\eta-\zeta) \\ m_3(\eta) & -M_3(\eta-\xi) & M_4(\eta-\zeta) \\ 0 & m_4(\eta-\xi) & -M_5(\eta-\zeta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u(\eta-\xi) \\ u(\eta-\zeta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1(\eta) & U_2(\eta) & U_3(\eta) & U_4(\eta) & u_4(\eta) - U_5(\eta) \\ W_1(\eta) & W_2(\eta) & W_3(\eta) & W_4(\eta) & w_4(\eta) - W_5(\eta) \\ M_1(\eta) & M_2(\eta) & M_3(\eta) & M_4(\eta) & m_4(\eta) - M_5(\eta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_5(\eta) & u_6(\eta) & u_7(\eta) \\ w_5(\eta) & w_6(\eta) & w_7(\eta) \\ m_5(\eta) & m_6(\eta) & m_7(\eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_2(\xi) & m_{11} & m_3(\xi) & m_{12} & m_4(\zeta-\xi) \\ q_2(\xi) & q_{11} & q_3(\xi) & q_{12} & q_4(\zeta-\xi) \\ n_2(\xi) & n_{11} & n_3(\xi) & n_{12} & n_4(\zeta-\xi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_2(\zeta) - m_{11} & m_3(\zeta) - m_{12} \\ q_2(\zeta) - q_{11} & q_3(\zeta) - q_{12} \\ n_2(\zeta) - n_{11} & n_3(\zeta) - n_{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_5(\zeta-\xi) & m_6(\zeta-\xi) & m_7(\zeta-\xi) \\ q_5(\zeta-\xi) & q_6(\zeta-\xi) & q_7(\zeta-\xi) \\ n_5(\zeta-\xi) & n_6(\zeta-\xi) & n_7(\zeta-\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_2(\xi) & m_3(\xi) \\ q_2(\xi) & q_3(\xi) \\ n_2(\xi) & n_3(\xi) \end{bmatrix}$$

$$m_2(\eta) = \frac{2}{\alpha} \sin^2 \frac{\alpha\eta}{2}$$

$$m_3(\eta) = -\frac{2\mu^2\alpha^2}{\alpha} \sin \frac{\alpha\eta}{2} \cos \frac{\alpha\eta}{2}$$

$$m_4(\eta) = -\mu^2\alpha^2 \left\{ \frac{f_1}{\alpha} \sin^2 \frac{\alpha\eta}{2} + \frac{f_2}{\beta} \sin^2 \frac{\beta\eta}{2} \right\}$$

$$m_5(\eta) = -\frac{\mu^2\alpha^2}{\beta} f_3 \sin^2 \frac{\beta\eta}{2}$$

$$m_6(\eta) = \mu^2\alpha^2 \left\{ \frac{f_4}{\alpha} \sin \frac{\alpha\eta}{2} \cos \frac{\alpha\eta}{2} - \frac{f_4}{\beta} \sin \frac{\beta\eta}{2} \cos \frac{\beta\eta}{2} \right\}$$

$$m_7(\eta) = -\mu^2\alpha^2 \left\{ \frac{f_3}{\alpha} \sin^2 \frac{\alpha\eta}{2} + \frac{f_6}{\beta} \sin^2 \frac{\beta\eta}{2} \right\}$$

$$q_2(\eta) = -\frac{2}{\mu^2\alpha^2} \sin \frac{\alpha\eta}{2} \cos \frac{\alpha\eta}{2}$$

$$q_3(\eta) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha\eta}{2}$$

$$q_4(\eta) = f_1 \sin \frac{\alpha\eta}{2} \cos \frac{\alpha\eta}{2} + f_2 \sin \frac{\beta\eta}{2} \cos \frac{\beta\eta}{2}$$

$$q_5(\eta) = f_3 \sin^2 \frac{\beta\eta}{2} \cos \frac{\beta\eta}{2}$$

$$q_6(\eta) = f_4 \left( \sin^2 \frac{\alpha\eta}{2} - \sin^2 \frac{\beta\eta}{2} \right)$$

$$q_7(\eta) = f_5 \sin \frac{\alpha\eta}{2} \cos \frac{\alpha\eta}{2} + f_6 \sin \frac{\beta\eta}{2} \cos \frac{\beta\eta}{2}$$

$$n_2(\eta) = -\alpha m_2(\eta) + 1$$

$$n_i(\eta) = -\alpha m_i(\eta) \quad (i=3, 4, \dots, 7)$$

$$f_1 = \frac{2k^2[\mu^2\alpha^2(\alpha^2+k^2) - \beta^2(\mu^2\alpha^2 - k^2)]}{\mu^2\alpha^2(\mu^2\alpha^2 - k^2)(\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$f_2 = -\frac{2\alpha k^4(\beta^2 + \mu^2\alpha^2)}{\beta\mu^2\alpha^2(\mu^2\alpha^2 - k^2)(\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$f_3 = -\frac{2k^2}{\beta(\mu^2\alpha^2 - k^2)}$$

$$f_4 = \frac{2k^2(\alpha^2 + \mu^2\alpha^2)}{(\mu^2\alpha^2 - k^2)(\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$f_5 = \frac{f_4}{\mu^2\alpha^2} \quad f_6 = \frac{f_2}{k^2}$$

$$u_1(\eta) = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha\eta$$

$$u_2(\eta) = b_{21}\alpha\eta \sin \alpha\eta + b_{22} \cos \alpha\eta - b_{22}$$

$$u_3(\eta) = b_{31} \sin \alpha\eta + b_{32} \alpha\eta \cos \alpha\eta$$

$$u_4(\eta) = b_{41} \alpha\eta \sin \alpha\eta + b_{42} \cos \alpha\eta + b_{43} \cos \beta\eta + b_{44}$$

$$u_5(\eta) = b_{51} \cos \alpha\eta + b_{52} \cos \beta\eta - b_{53}$$

$$u_6(\eta) = b_{61} \sin \alpha\eta + b_{62} \alpha\eta \cos \alpha\eta + b_{63} \sin \beta\eta$$

$$u_7(\eta) = b_{71} \alpha\eta \sin \alpha\eta + b_{72} \cos \alpha\eta + b_{73} \cos \beta\eta + b_{74}$$

$$w_1(\eta) = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos \alpha\eta)$$

$$w_2(\eta) = c_{21} \sin \alpha\eta + c_{22} \alpha\eta \cos \alpha\eta + c_{23}\eta$$

$$w_3(\eta) = c_{31} \alpha\eta \sin \alpha\eta + c_{32} \cos \alpha\eta - c_{32}$$

$$w_4(\eta) = c_{41} \sin \alpha\eta + c_{42} \alpha\eta \cos \alpha\eta + c_{43} \sin \beta\eta + c_{44} \alpha\eta$$

$$w_5(\eta) = c_{51} \sin \alpha\eta + c_{52} \sin \beta\eta + c_{53} \alpha\eta$$

$$w_6(\eta) = c_{61} \alpha\eta \sin \alpha\eta + c_{62} \cos \alpha\eta + c_{63} \cos \beta\eta + c_{64}$$

$$w_7(\eta) = c_{71} \sin \alpha\eta + c_{72} \alpha\eta \cos \alpha\eta + c_{73} \sin \beta\eta + c_{74} \alpha\eta$$

$$b_{21} = -\frac{\mu^2\alpha^2 + \alpha^2(1 + \mu^2)}{2\alpha^3\mu^2\alpha^2}, \quad b_{22} = -\frac{1}{\alpha^3}$$

$$b_{31} = \frac{\alpha^2 - \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{2\alpha^3}, \quad b_{32} = \frac{\alpha^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{2\alpha^3}$$

$$b_{41} = -\frac{\alpha^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{2\alpha^4\mu^2\alpha^2} \cdot a_{11}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{2\alpha^4\mu^2a^2(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot a_{12} \\
b_{42} = & -\frac{\alpha^2 + a^2}{\alpha^4a^2} \cdot a_{11} \\
& -\frac{\alpha^4 - \mu^2(\alpha^2 + a^2)(\beta^2 - 2\alpha^2)}{\alpha^4\mu^2a^2(\alpha^2 - \beta^2)^2} \cdot a_{12} \\
b_{43} = & \frac{\beta^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{\mu^2a^2\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)^2} \cdot a_{12} \\
b_{44} = & \frac{\alpha^2 + a^2}{\alpha^4a^2} \cdot a_{11} - \frac{\alpha^2 + a^2}{\alpha^4\beta^2a^2} \cdot a_{12} \\
b_{51} = & -\frac{\alpha^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{\alpha^2\mu^2a^2(\alpha^2 - \beta^2)} a_{13} \\
b_{52} = & \frac{\beta^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{\beta^2\mu^2a^2(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot a_{13}, \quad b_{53} = \frac{\alpha^2 + a^2}{\alpha^2\beta^2a^2} \cdot a_{13} \\
b_{61} = & -\frac{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) - \mu^2(\alpha^2 + a^2)(\beta^2 - 3\alpha^2)}{2\alpha^3\mu^2a^2(\alpha^2 - \beta^2)^2} \cdot a_{14}, \\
b_{62} = & \frac{\alpha^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{2\alpha^3\mu^2a^2(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot a_{14} \\
b_{63} = & \frac{\beta^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{\beta\mu^2a^2(\alpha^2 - \beta^2)^2} \cdot a_{14} \\
b_{71} = & -\frac{a_{15}}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \\
& \cdot \left[ \frac{1}{\mu^2a^2} + \frac{\alpha^2 + 2a^2}{\alpha^2a^2} + \frac{\mu^2(\alpha^2 + a^2)}{\alpha^4} \right] \\
b_{72} = & -\frac{a_{15}}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \\
& \cdot \left[ \frac{\beta^2}{\mu^2a^2} + \frac{\alpha^2 + 2a^2}{a^2} - \frac{\mu^2(\alpha^2 + a^2)(\beta^2 - 2\alpha^2)}{\alpha^4} \right] \\
b_{73} = & \frac{a_{15}}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \\
& \cdot \left[ \frac{\beta^2}{\mu^2a^2} + \frac{\alpha^2 + 2a^2}{a^2} + \frac{\mu^2(\alpha^2 + a^2)}{\beta^2} \right] \\
b_{74} = & -\frac{\mu^2(\alpha^2 + a^2)}{\alpha^4\beta^2} \cdot a_{15}, \quad c_{21} = \frac{\alpha^2\mu^2 - \alpha^2 - 3\mu^2a^2}{2\alpha^3\mu^2a^2} \\
c_{22} = & \frac{\alpha^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{2\alpha^3\mu^2a^2}, \quad c_{23} = \frac{1}{\alpha^3} \\
c_{31} = & \frac{\alpha^2 + \mu^2(\alpha^2 + a^2)}{2\alpha^3}, \quad c_{32} = \frac{\mu^2a^2}{\alpha^3} \\
c_{41} = & -\frac{a_{11}}{2\alpha^2} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{3}{\alpha^2} \right] + \frac{a_{12}}{2\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)^2} \\
& \cdot \left[ \frac{(1 + \mu^2)(\beta^2 - 3\alpha^2)}{\mu^2a^2} + \frac{3\beta^2 - 5\alpha^2}{\alpha^2} \right] \\
c_{42} = & \frac{a_{11}}{2\alpha^2} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right] \\
& + \frac{a_{12}}{2\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right] \\
c_{43} = & \frac{\alpha a_{12}}{\beta(\alpha^2 - \beta^2)^2} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{1}{\beta^2} \right] \\
c_{44} = & \frac{1}{\alpha^4} \left[ a_{11} - \frac{a_{12}}{\beta^2} \right] \\
c_{51} = & -\frac{a_{13}}{\alpha^2 - \beta^2} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right] \\
c_{52} = & \frac{\alpha a_{13}}{\beta(\alpha^2 - \beta^2)} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{1}{\beta^2} \right], \quad c_{53} = -\frac{a_{13}}{\alpha^2\beta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{61} = & \frac{a_{14}}{2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right] \\
c_{62} = & \frac{a_{14}}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \left[ \frac{\alpha(1 + \mu^2)}{\mu^2a^2} - \frac{(\beta^2 - 2\alpha^2)}{\alpha^3} \right] \\
c_{63} = & -\frac{\alpha a_{14}}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{1}{\beta^2} \right], \quad c_{64} = \frac{a_{14}}{\alpha^3\beta^2} \\
c_{71} = & \frac{a_{15}}{2(\alpha^2 - \beta^2)^2} \left[ -\frac{(1 + \mu^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{\mu^2a^2} \right. \\
& \left. + \frac{(2 + \mu^2)(\beta^2 - 3\alpha^2)}{\alpha^2} + \frac{\mu^2a^2(3\beta^2 - 5\alpha^2)}{\alpha^4} \right] \\
c_{72} = & \frac{a_{15}}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2a^2} + \frac{2 + \mu^2}{\alpha^2} + \frac{\mu^2a^2}{\alpha^4} \right] \\
c_{73} = & \frac{\alpha a_{15}}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \left[ \frac{\beta(1 + \mu^2)}{\mu^2a^2} + \frac{2 + \mu^2}{\beta} + \frac{\mu^2a^2}{\beta^3} \right] \\
c_{74} = & -\frac{\mu^2a^2}{\alpha^4\beta^2} \cdot a_{15} \\
a_{11} = & \frac{\alpha k^2\mu^2a^2}{\mu^2a^2 - k^2}, \quad a_{12} = \frac{\alpha k^4(\beta^2 + \mu^2a^2)}{\mu^2a^2 - k^2} \\
a_{13} = & \frac{k^2\mu^2a^2}{\mu^2a^2 - k^2}, \quad a_{14} = \frac{\mu^2a^2k^2(\alpha^2 + \mu^2a^2)}{\mu^2a^2 - k^2} \\
a_{15} = & \frac{\alpha k^2}{\mu^2a^2 - k^2}, \quad \beta^2 = \frac{\mu^2a^2(\alpha^2 + k^2)}{\mu^2a^2 - k^2}
\end{aligned}$$

(11) の各式中の定数  $\psi(0)$ ,  $\bar{N}(0)$ ,  $\bar{Q}(0)$  は 2 ヒンジアーチの右支点における境界条件

$$\bar{u}(1) = \bar{w}(1) = \bar{M}(1) = 0$$

から導かれる次の連立方程式で決定される。

$$\begin{bmatrix} u_1(1) & U_N(1) & U_Q(1) \\ w_1(1) & W_N(1) & W_Q(1) \\ 0 & M_N(1) & M_Q(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \bar{N}(0) \\ \bar{Q}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0(1) \\ W_0(1) \\ M_0(1) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

方程式 (12) より

$$\psi(0) = \frac{K_1}{D}, \quad \bar{N}(0) = \frac{K_2}{D}, \quad \bar{Q}(0) = \frac{K_3}{D}$$

ただし

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} u_1(1) & U_N(1) & U_Q(1) \\ w_1(1) & W_N(1) & W_Q(1) \\ 0 & M_N(1) & M_Q(1) \end{vmatrix} \\
K_1 &= \begin{vmatrix} U_0(1) & U_N(1) & U_Q(1) \\ W_0(1) & W_N(1) & W_Q(1) \\ M_0(1) & M_N(1) & M_Q(1) \end{vmatrix} \\
K_2 &= \begin{vmatrix} u_1(1) & U_0(1) & U_Q(1) \\ w_1(1) & W_0(1) & W_Q(1) \\ 0 & M_0(1) & M_Q(1) \end{vmatrix} \\
K_3 &= \begin{vmatrix} u_1(1) & U_N(1) & U_0(1) \\ w_1(1) & W_N(1) & W_0(1) \\ 0 & M_N(1) & M_0(1) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

したがって、2 ヒンジ円弧アーチの部分的等分布荷重による変形  $\bar{u}(\eta)$ ,  $\bar{w}(\eta)$  および曲げモーメント  $\bar{M}(\eta)$  は

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\eta) = & \frac{1}{D} \{ K_1 \cdot u_1(\eta) + K_2 \cdot U_N(\eta) \\
& + K_3 \cdot U_Q(\eta) - D \cdot U_0(\eta) \} \dots\dots\dots(13 \cdot a)
\end{aligned}$$

$$\bar{w}(\eta) = \frac{1}{D} \{K_1 \cdot w_1(\eta) + K_2 \cdot W_N(\eta) + K_3 \cdot W_Q(\eta) - D \cdot W_0(\eta)\} \dots\dots(13 \cdot b)$$

$$\bar{M}(\eta) = \frac{1}{D} \{K_2 \cdot M_N(\eta) + K_3 \cdot M_Q(\eta) - D \cdot M_0(\eta)\} \dots\dots(13 \cdot c)$$

4. 座屈条件式および座屈モード

部分的等分布荷重の作用を受ける 2 ヒンジ円弧アーチの座屈条件は式 (13・a)~(13・c) から

$$D=0$$

により与えられ、次式となる。

$$\begin{vmatrix} u_1(1) & U_N(1) & U_Q(1) \\ w_1(1) & W_N(1) & W_Q(1) \\ 0 & M_N(1) & M_Q(1) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots(14)$$

$\bar{u}(\eta)$ ,  $\bar{w}(\eta)$  および  $\bar{M}(\eta)$  のモードは  $C_0$  を任意定数として

$$\bar{a}(\eta) = C_0 \{K_1 \cdot u_1(\eta) + K_2 \cdot U_N(\eta) + K_3 \cdot U_Q(\eta)\} \dots\dots(15 \cdot a)$$

$$\bar{w}(\eta) = C_0 \{K_1 \cdot w_1(\eta) + K_2 \cdot W_N(\eta) + K_3 \cdot W_Q(\eta)\} \dots\dots(15 \cdot b)$$

$$\bar{M}(\eta) = C_0 \{K_2 \cdot M_N(\eta) + K_3 \cdot M_Q(\eta)\} \dots\dots(15 \cdot c)$$

5. 円形等分布荷重による 2 ヒンジアーチの座屈

2 ヒンジ円弧アーチの全長に作用する円形等分布荷重 (図-3) に対する座屈条件式および座屈モードを明らかにする。左支点における境界条件を満足する変形  $\bar{u}(\eta)$ ,  $\bar{w}(\eta)$  および曲げモーメント  $\bar{M}(\eta)$

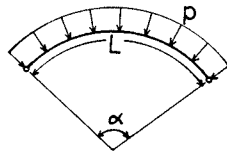


図-3 円形等分布荷重

は、一般式 (11・a)~(11・c) において、 $\xi \rightarrow 0$ ,  $\zeta \rightarrow 1$  とすることにより得られ、次の各式となる。

$$\bar{u}(\eta) = c_1 \cdot u_{11}(\eta) + c_2 \cdot u_{12}(\eta) + c_3 \cdot u_{13}(\eta) - u_{14}(\eta) \dots\dots(16 \cdot a)$$

$$\bar{w}(\eta) = c_1 \cdot w_{11}(\eta) + c_2 \cdot w_{12}(\eta) + c_3 \cdot w_{13}(\eta) - w_{14}(\eta) \dots\dots(16 \cdot b)$$

$$\bar{M}(\eta) = \frac{\mu^2 a^2}{\beta^2} \sin \frac{\beta \eta}{2} \left\{ c_2 \cdot a^2 \sin \frac{\beta \eta}{2} + c_3 \cdot \beta \cos \frac{\beta \eta}{2} + \sin \frac{\beta \eta}{2} \right\} \dots\dots(16 \cdot c)$$

ただし

$$c_1 = \frac{2}{\alpha} \psi(0), \quad c_2 = \frac{2\alpha}{a^2(\mu^2 a^2 - k^2)} \bar{N}(0),$$

$$c_3 = \frac{2}{\mu^2 a^2} \bar{Q}(0)$$

$$u_{11}(\eta) = \sin \frac{\alpha \eta}{2} \cos \frac{\alpha \eta}{2}$$

$$u_{12}(\eta) = a_{n1} \sin^2 \frac{\alpha \eta}{2} + a_{n2} \sin^2 \frac{\beta \eta}{2}$$

$$u_{13}(\eta) = - \left( a_{q1} \sin \frac{\alpha \eta}{2} \cos \frac{\alpha \eta}{2} + a_{q2} \sin \frac{\beta \eta}{2} \cos \frac{\beta \eta}{2} \right)$$

$$u_{14}(\eta) = - \left( a_1 \sin^2 \frac{\alpha \eta}{2} + a_2 \sin^2 \frac{\beta \eta}{2} \right)$$

$$w_{11}(\eta) = \sin^2 \frac{\alpha \eta}{2}$$

$$w_{12}(\eta) = b_{n1} \sin \frac{\alpha \eta}{2} \cos \frac{\alpha \eta}{2} + b_{n2} \sin \frac{\beta \eta}{2} \cos \frac{\beta \eta}{2} + \frac{b_{n3}}{2} \eta$$

$$w_{13}(\eta) = b_{q1} \sin^2 \frac{\alpha \eta}{2} + b_{q2} \sin^2 \frac{\beta \eta}{2}$$

$$w_{14}(\eta) = b_1 \sin \frac{\alpha \eta}{2} \cos \frac{\alpha \eta}{2} + b_2 \sin \frac{\beta \eta}{2} \cos \frac{\beta \eta}{2} + \frac{b_3}{2} \eta$$

$$a_{n1} = - \frac{\mu^2 a^2 - k^2 + a^2}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\mu^2 a^2 (a^2 - k^2)}{\alpha^2 (\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$a_{n2} = \frac{\mu^2 a^2 - k^2 + a^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\mu^2 a^2 (a^2 - k^2)}{\beta^2 (\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$a_{q1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\mu^2 (a^2 + \alpha^2)}{\alpha (\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$a_{q2} = - \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\mu^2 (a^2 + \alpha^2)}{\beta (\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$a_1 = - \frac{a_{q1}}{\alpha}, \quad a_2 = - \frac{a_{q2}}{\beta}$$

$$b_{n1} = \frac{\mu^2 a^2 - k^2}{\alpha^2} + \frac{(1 + \mu^2) a^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\mu^2 a^4}{\alpha^2 (\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$b_{n2} = - \frac{(1 + \mu^2) \alpha a^2}{\beta (\alpha^2 - \beta^2)} - \frac{\alpha \mu^2 a^4}{\beta^3 (\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$b_{n3} = \frac{\mu^2 a^4}{\alpha \beta^2}, \quad b_{q1} = -a_{q1},$$

$$b_{q2} = \frac{(1 + \mu^2) \alpha}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\alpha \mu^2 a^2}{\beta^2 (\alpha^2 - \beta^2)}, \quad b_{q3} = - \frac{\mu^2 a^2}{\alpha \beta^2}$$

$$b_1 = \frac{b_{q1}}{\alpha}, \quad b_2 = \frac{b_{q2}}{\beta}, \quad b_3 = b_{q3}$$

(16・a), (16・b), (16・c) の各式中の定数  $c_1, c_2, c_3$  は 2 ヒンジアーチの右支点の境界条件  $\bar{u}(1) = \bar{w}(1) = \bar{M}(1) = 0$  よりえられる次の連立方程式で決定される。

$$\begin{bmatrix} u_{11}(1) & u_{12}(1) & u_{13}(1) \\ w_{11}(1) & w_{12}(1) & w_{13}(1) \\ 0 & a^2 \sin \frac{\beta}{2} & \beta \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{14}(1) \\ w_{14}(1) \\ -\sin \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \dots\dots(17)$$

2 ヒンジ円弧アーチの円形等分布荷重による座屈の 1 つの条件式として、式 (17) の左辺の係数行列式 = 0 よ

り次式をえる。

$$2\beta^3 \left\{ 2\alpha^2 + a^2 - \beta^2 - \frac{k^2(\alpha^2 - \beta^2) - \alpha^2 a^2}{\mu^2 a^2} \right\} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - 2\alpha^3 \left( \beta^2 + a^2 + \frac{\beta^2}{\mu^2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \alpha\beta a^2 (\alpha^2 - \beta^2) \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 0 \dots\dots(18)$$

ただし

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2 + k^2}{1 - \frac{k^2}{\mu^2 a^2}}, \quad \mu^2 = \frac{G}{\kappa E}, \quad a^2 = \frac{AL^2}{I},$$

$$k^2 = \frac{\rho L^3}{\alpha EI}$$

式 (18) において、 $\mu^2 = G/\kappa E \rightarrow \infty$  とすれば、せん断変形を無視した場合の座屈条件式がえられ次式となる。

$$2\beta^3 (2\alpha^2 + a^2 - \beta^2) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - 2\alpha^3 (\beta^2 + a^2) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \alpha\beta a^2 (\alpha^2 - \beta^2) \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 0 \dots\dots(19)$$

式 (19) においては、 $\beta^2 = \alpha^2 + k^2$  である。

座屈条件式 (18) に対応する座屈モードは  $C_0$  を任意定数として

$$\bar{u}(\eta) = C_0 \{ K_{11} \cdot u_{11}(\eta) + K_{12} \cdot u_{12}(\eta) + K_{13} \cdot u_{13}(\eta) \} \dots\dots(20 \cdot a)$$

$$\bar{w}(\eta) = C_0 \{ K_{11} \cdot w_{11}(\eta) + K_{13} \cdot w_{13}(\eta) + K_{13} \cdot w_{13}(\eta) \} \dots\dots(20 \cdot b)$$

$$\bar{M}(\eta) = C_0 \cdot \frac{\mu^2 a^2}{\beta^2} \sin \frac{\beta\eta}{2} \cdot \left\{ K_{12} \cdot a^2 \sin \frac{\beta\eta}{2} + K_{13} \cdot \beta \sin \frac{\beta\eta}{2} \right\} \dots\dots(20 \cdot c)$$

$$K_{11} = \begin{vmatrix} u_{14}(1) & u_{12}(1) & u_{13}(1) \\ w_{14}(1) & w_{12}(1) & w_{13}(1) \\ -\sin \frac{\beta}{2} & a^2 \sin \frac{\beta}{2} & \beta \cos \frac{\beta}{2} \end{vmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{vmatrix} u_{11}(1) & u_{14}(1) & u_{13}(1) \\ w_{11}(1) & w_{14}(1) & w_{13}(1) \\ 0 & -\sin \frac{\beta}{2} & \beta \cos \frac{\beta}{2} \end{vmatrix}$$

$$K_{13} = \begin{vmatrix} u_{11}(1) & u_{12}(1) & u_{14}(1) \\ w_{11}(1) & w_{12}(1) & w_{14}(1) \\ 0 & a^2 \sin \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \end{vmatrix}$$

さらに、式 (16・c) より明らかなごとく

$$\sin \frac{\beta}{2} = 0 \dots\dots(21)$$

のとき、 $\bar{M}(1) = 0$  となるゆえ、 $\bar{u}(1) = 0$  および  $\bar{w}(1) = 0$  を満足する次式

$$\bar{u}(\eta) = C_1 \cdot K_{21} a_{q2} \sin \frac{\beta\eta}{2} \cos \frac{\beta\eta}{2} + K_{22} \cdot u_{12}(\eta)$$

$$-K_{23} \cdot u_{13}(\eta) - u_{14}(\eta) \dots\dots(22 \cdot a)$$

$$\bar{w}(\eta) = -C_1 \cdot K_{21} b_{q2} \sin^2 \frac{\beta\eta}{2} + K_{22} \cdot w_{12}(\eta) + K_{23} \cdot w_{13}(\eta) - w_{14}(\eta) \dots\dots(22 \cdot b)$$

$$K_{21} = \frac{1}{\lfloor K_{20} \rfloor} \begin{vmatrix} a_{n1} \sin^2 \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ b_{n1} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{b_{n3}}{2} & \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{vmatrix}$$

$$K_{22} = \frac{1}{\lfloor K_{20} \rfloor} \begin{vmatrix} -a_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} & -a_{q1} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ b_1 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{b_3}{2} & b_{q1} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{vmatrix}$$

$$K_{23} = \frac{1}{\lfloor K_{20} \rfloor} \begin{vmatrix} a_{n1} \sin^2 \frac{\alpha}{2} & -a_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ b_{n1} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{b_{n3}}{2} & b_1 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{b_3}{2} \end{vmatrix}$$

$$K_{20} = \begin{vmatrix} a_{n1} \sin^2 \frac{\alpha}{2} & -a_{q1} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ b_{n1} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{b_3}{2} & b_{q1} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{vmatrix}$$

は円形等分布荷重に対する 2 ヒンジ円弧アーチの境界条件を満足するもう 1 つのつり合い状態を表わす。すなわち、条件式 (21) は座屈条件式であることを知る。

式 (22・a)、(22・b) において、 $C_1$  は任意の値をとる不定係数である。したがって座屈条件式 (21) に対応する座屈モード  $\bar{u}(\eta)$ 、 $\bar{w}(\eta)$ 、 $\bar{M}(\eta)$  は  $C_0$  を任意定数として

$$\bar{u}(\eta) = C_0 \cdot a_{q2} \sin \frac{\beta\eta}{2} \cos \frac{\beta\eta}{2} \dots\dots(23 \cdot a)$$

$$\bar{w}(\eta) = -C_0 \cdot b_{q2} \sin^2 \frac{\beta\eta}{2} \dots\dots(23 \cdot b)$$

$$\bar{M}(\eta) = -C_0 \cdot \frac{\mu^2 a^2}{\beta^2} \sin \frac{\beta\eta}{2} \cos \frac{\beta\eta}{2} \dots\dots(23 \cdot c)$$

座屈条件式 (18) は 2 ヒンジ円弧アーチの円形等分布荷重に対する対称型座屈を表わし、座屈条件式 (21) は逆対称型座屈を表わす。

座屈条件式 (21) より、逆対称座屈の固有値  $k^2 = \rho L^3 / \alpha EI$  は

$$k^2 = \frac{(2n\pi)^2 - \alpha^2}{1 + \frac{(2n\pi)^2}{\mu^2 a^2}} \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots(24)$$

となる。また、せん断変形を無視した場合には

$$k^2 = (2n\pi)^2 - \alpha^2 \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots(25)$$

となり、式 (25) は Timoshenko が導いた式と一致する。

## 6. 2 ヒンジ円弧アーチの座屈特性

### (1) 円形等分布荷重に対する特性

アーチ部材全長にわたって作用する円形等分布荷重に

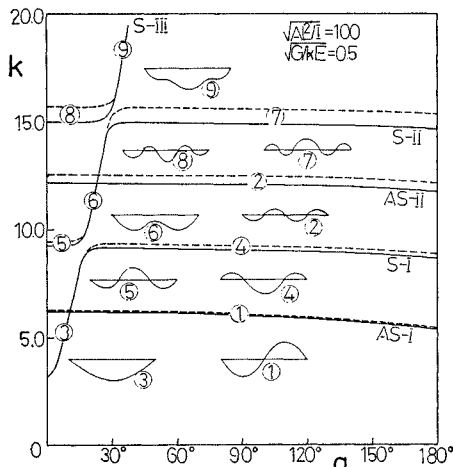


図-4 円形等分布荷重に対する座屈固有値と座屈モード

対する、細長比  $\sqrt{AL^2/I}=100$  の 2 ヒンジ円弧アーチの座屈固有値  $k = \sqrt{pL^3/\alpha EI}$  とアーチ中心角  $\alpha$  との関係を図-4 に示す。点線はせん断変形を無視した場合、実線は  $\sqrt{G/E}=0.5$  としてせん断変形を考慮した場合である。図中の各数字は次の意味を表わす。

- ① : 逆対称 1 次座屈 (AS-I)
- ② : " 2 " (AS-II)
- ③-④ : 対称 1 次座屈 (S-I)
- ⑤-⑥-⑦ : " 2 " (S-II)
- ⑧-⑨ : " 3 " (S-III)

図-4 より次のことが明らかとなる。

- [1] 逆対称座屈 ①, ② の固有値  $k$  は中心角  $\alpha$  が大になるにつれてゆるやかに値が低下する。その変化は高次座屈において少ない。偏平アーチにくらべて高アーチのほうがより小さな荷重で逆対称座屈を起こす。
- [2] 対称座屈 ③-④, ⑤-⑥-⑦, ⑧-⑨ において、④, ⑤, ⑦, ⑧ の部分では、逆対称座屈と同様、中心角  $\alpha$  の増加に対して固有値  $k$  のゆるやかな低下がみられるが、③, ⑥, ⑨ においては中心角のわずかな変化に対して固有値が急変し、逆対称座屈の  $k-\alpha$  曲線と交差する。その結果、中心角の小なる部分において、対称 1 次固有値が逆対称 1 次固有値よりも小となる。通常のスパンライズ比を有する 2 ヒンジ円弧アーチにおいては円形等分布荷重に対して最初に逆対称座屈が生じるが、偏平アーチにおいては最初に対称座屈が起こる。
- [3] せん断変形を無視した場合、座屈固有値  $k$  は真の値よりも大きく算定される。せん断変形の影響は逆対称 1 次座屈においてはきわめて微小であり、高次座屈においても高々数パーセントである。

また、対称座屈の  $k-\alpha$  曲線の急変部 ③, ⑥, ⑨ においては、せん断変形の影響はほとんど無視できる。

図-4 中に記入されたモードは各次の座屈における法線方向変位  $u$  のモードである。 $u$  モードの特性は次のとおりである。

- [1] 逆対称モード ①, ② においてはアーチクラウンに節ができる。
- [2] 対称 1 次モード ③, ④ においてはアーチ中央部は下に凸である。なお、モード ③ においては節はなく、モード ④ の節の数は 2 である。
- [3] 対称 2 次モード ⑤, ⑥, ⑦ においてはアーチクラウンは上に凸である。節の数はそれぞれ 2, 0, 4 である。
- [4] 対称 3 次モード ⑧-⑨ においては、対称 1 次モードと同様、アーチ中央部は下に凸である。節の数はそれぞれ 4, 0 である。
- [5]  $k-\alpha$  曲線の急変部 ③, ⑥, ⑨ における  $u$  モードには節がない。
- [6] 対称 1 次の④の部分と対称 2 次の⑤の部分とは座屈固有値  $k$  がほぼ同じ大きさであり、 $u$  モードの節の数もともに 2 であるが、アーチ中央部の変形方向が互いに正反対である。
- [7] 対称 2 次の⑦の部分と対称 3 次の⑧の部分とは固有値がほぼ同じ大きさであり、 $u$  モードの節の数もともに 4 であるが、アーチ中央部の変形方向が互いに正反対である。

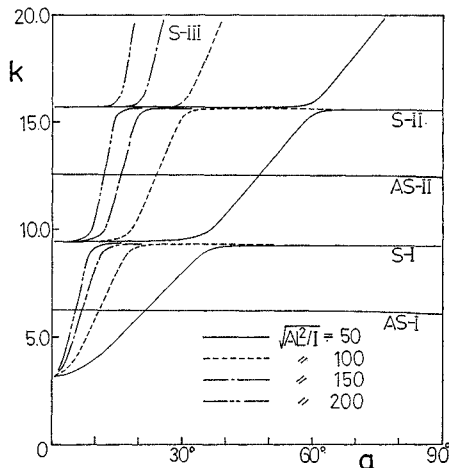


図-5 座屈固有値に対する細長比の影響

図-5 は細長比  $\sqrt{AL^2/I}=50, 100, 150, 200$  の 4 種の 2 ヒンジ円弧アーチの  $k-\alpha$  曲線である。いずれもせん断変形を無視している。 $k-\alpha$  曲線の急変部すなわち節のない  $u$  モードの発生する部分において細長比の影響が顕著である。その他の  $k-\alpha$  曲線のゆるやかな変化部に

おいては細長比の影響はほとんどみられない。細長比の影響の著しい  $k-\alpha$  曲線急変部の勾配は細長比が大のとき急である。細長比の小なる太短い2ヒンジアーチにおいては、節のない  $u$  モードの生じる範囲が広がる。図より逆対称1次座屈の  $k-\alpha$  曲線と対称1次座屈の  $k-\alpha$  曲線との交点の  $\alpha$  値  $\alpha_0$  を読めば

$\sqrt{AL^2/I}=50$ のとき	$\alpha_0 \doteq 22.0^\circ$
" 100 "	$\alpha_0 \doteq 11.0^\circ$
" 150 "	$\alpha_0 \doteq 7.3^\circ$
" 200 "	$\alpha_0 \doteq 5.5^\circ$

となる。2ヒンジ円弧アーチの中心角が上記の  $\alpha_0$  より

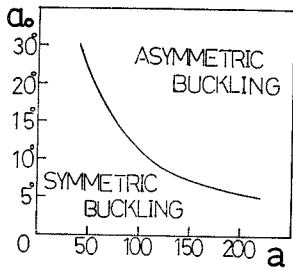


図-6 円形等分布荷重による対称, 逆対称座屈

小なるとき対称座屈が最初に生じ, 大なるときには逆対称座屈が最初に起こる。したがって  $\alpha_0$  は2ヒンジ円弧アーチに対称座屈が生じるか逆対称座屈が生じるかの境となる境界中心角を表わす。

境界中心角  $\alpha_0$  と細長比  $a = \sqrt{AL^2/I}$  との間には,  $\alpha_0$  をラジアンで表わして, ほぼ次式で表わされる反比例関係が成立する。

$$\alpha_0 a = 19.2$$

この反比例関係を図示したものが図-6である。すなわち扁平なアーチの first  $u$ -mode は対称型であり, 通常のアーチの first  $u$ -mode は逆対称型である。

(2) 部分的等分布荷重に対する座屈特性

a) 対称分布荷重

図-7に示すような対称型部分的等分布荷重に対する細長比  $\sqrt{AL^2/I}=100$  の2ヒンジ円弧アーチの  $k-\alpha$  曲線を図-8に示す。せん断変形は  $\sqrt{G/\mu E}=0.5$  として考慮している。 $\bar{a} \rightarrow 1$  は円形等分布荷重を表わし,  $\bar{a} \rightarrow 0$  なる極限はアーチクラウンに作用する法線方向集中荷重を意味する。図-8によれば, 荷重分布長  $\bar{a}L$  の減少にと

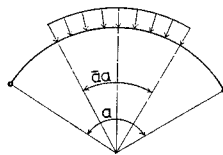


図-7 対称荷重

もない, 座屈固有値  $k = \sqrt{\rho L^3/\alpha EI}$  は全体的に大となる。また  $\bar{a} = 0.2$  のときには第1次対称座屈の固有値が第1次逆対称座屈の固有値よりも小さくなる。すなわち荷重分布長  $\bar{a}L$  いかんによって first  $u$ -mode が対称型になる場合と逆対称型になる場合とがあることを知る。

細長比  $\sqrt{AL^2/I}=100$ , 中心角  $\alpha=60^\circ$ ,  $\sqrt{G/\mu E}=0.5$  なる2ヒンジ円弧アーチの  $k-\bar{a}$  曲線を図-9に示す。

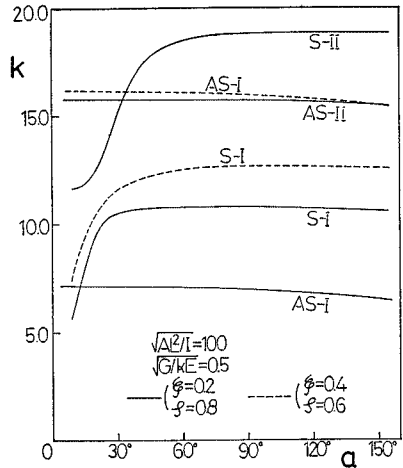


図-8 対称荷重に対する座屈固有値

逆対称1次座屈の  $k-\bar{a}$  曲線と対称1次座屈の  $k-\bar{a}$  曲線とは  $\bar{a} \doteq 0.27$  において交わる。すなわち, この2ヒンジアーチの first  $u$ -mode は荷重分布長が境界分布長  $\bar{a}_0 L_0 = 0.27 L$  以下の場合対称型であり, 境界分布長以上の場合逆対称型である。

細長比  $\sqrt{AL^2/I}=100$ ,  $\sqrt{G/\mu E}=0.5$  の2ヒンジアーチの無次元境界分布長  $\bar{a}_0$  と中心角  $\alpha$  との

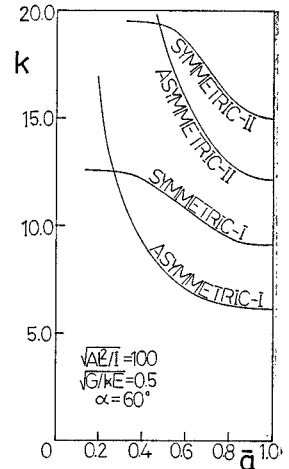


図-9 座屈固有値と対称荷重長

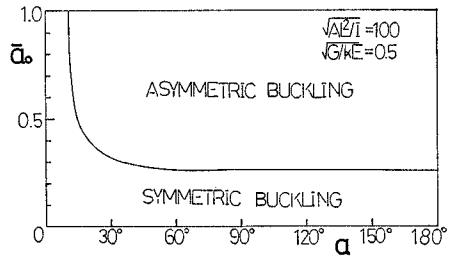


図-10 対称荷重による対称, 逆対称座屈

関係を図-10に示す。荷重分布長  $(\zeta-\xi)L$  が約  $0.26 L$  以下の場合あるいは中心角  $\alpha$  が約  $11^\circ$  以下の場合, first  $u$ -mode として逆対称型は存在しない。

b) 非対称分布荷重

図-11に示すような非対称分布荷重の作用をうける, 細長比  $\sqrt{AL^2/I}=100$ ,  $\sqrt{G/\mu E}=0.5$  の2ヒンジアーチの  $k-\alpha$  曲線を図-12に示す。



図-14 (a), (b) にそれぞれ中心角  $60^\circ$  と  $10^\circ$  の2種の2ヒンジアーチの、種々の分布長をもつ非対称荷重(図-13)に対する座屈固有値を示す。荷重長は  $0.1L, 0.2L, \dots, L$  の10種である。横軸には荷重中心位置  $\bar{\beta}$  をとっており、荷重中心位置が  $0.5L$  の分布荷重は対称荷重を意味する。図-14(a) より以下のことが明らかと

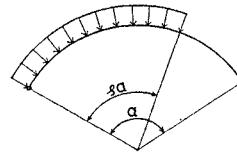


図-11 非対称荷重 ( $\xi=0$ )

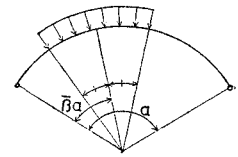


図-13 非対称荷重

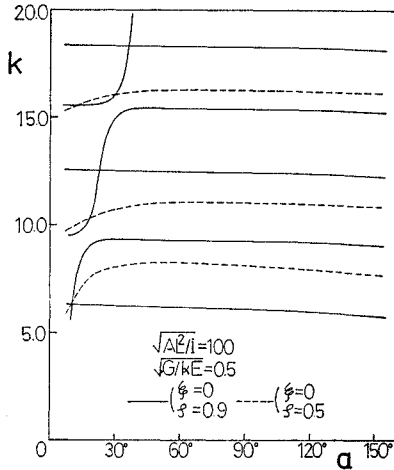


図-12 非対称荷重に対する座屈固有値

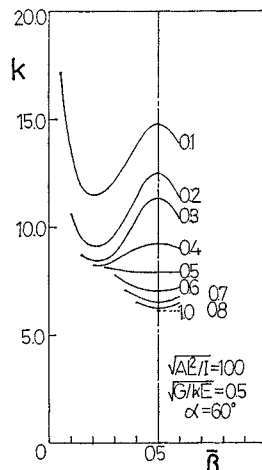


図-14 (a) 座屈固有値と非対称荷重位置

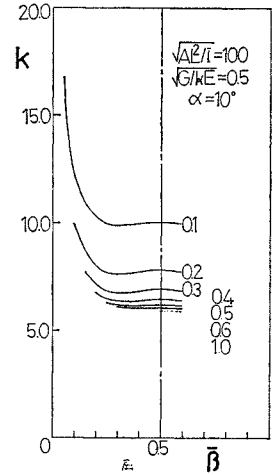


図-14 (b) 座屈固有値と非対称荷重位置

なる。

- [1] 荷重分布長が  $0.4L$  以下の場合、大略  $L/4$  点に荷重中心位置をもつ非対称荷重に対する座屈固有値が最小であり、荷重中心位置  $L/2$  の対称荷重に対する固有値は極大である。
- [2] 荷重分布幅が  $L/2$  以上の場合、非対称荷重に対する座屈固有値よりも対称荷重に対する座屈固有値のほうが小である。
- [3] 全体として、円形等分布荷重による逆対称座屈の固有値が最小である。

図-14 (b) によれば

- [1] 偏平な2ヒンジアーチの  $L/4$  点から  $3L/4$  点の間に荷重中心をもつ分布荷重に対する座屈固有値は、各荷重分布長に応じて、ほぼ一定である。
- [2] 全体として、円形等分布荷重による対称座屈の固有値が最小である。

## 7. 結 語

アーチ部材図心軸のひずみおよびせん断変形を考慮した円弧アーチの変形方程式を導き、2ヒンジ円弧アーチの円形等分布荷重、対称荷重、非対称荷重などに対する座屈特性を明らかにした。

せん断変形を無視した場合、座屈荷重は真の値よりも

大きく算定される。その差は高次座屈において大であるが、最小固有値ではほとんど差があらわれない。このことから、2ヒンジ円弧アーチの危険荷重の算定時には、せん断変形を無視しうることを知った。

2ヒンジ円弧アーチの座屈性状はアーチ部材の細長比に支配される。円形等分布荷重あるいは部分的分布対称荷重によって起こる対称型座屈に細長比が大きな影響を与える。

円形等分布荷重による通常の2ヒンジアーチの座屈において、first  $u$ -mode は逆対称型であるが、中心角の小なる偏平アーチにおいては対称型である。その境界となる中心角の大きさはアーチ部材の細長比によって異なる。一般に細長比の小なる偏平アーチにおいて対称型座屈の生じる範囲が大である。

円形等分布荷重による対称座屈モードはアーチ中心角の大きさにより形状および節の数が異なる。

部分的に分布する対称荷重による座屈において、分布幅が大なとき first  $u$ -mode は逆対称型であるが、分布幅の小なときは対称型である。その境界となる分布幅は中心角および細長比により決まる。

通常の2ヒンジアーチにおいては、荷重幅の小なる部分的分布荷重に対して、荷重中心位置がアーチ部材の4分の1点付近にあるときの座屈荷重が最小となり、偏平な2ヒンジアーチにおいては、アーチ部材の中半分が荷

重中心位置があるとき, 対称荷重と非対称荷重による座屈荷重はほぼ等しい。

数値計算は九州大学大型計算機センター FACOM 230-60 によった。本研究を行なうにあたり, 山崎徳也博士(川崎製鉄(株))にいろいろの助言いただいた。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw Hill, 1961
- 2) Chwalla, E. and Kollbrunner, C.F. : Über das Ausknicken symmetrischer Bogenträger unter symmetrisch verteilten Belastungen, STAHLBAU, Heft 16, 1937, SS. 121~123
- 3) Chwalla, E. and Kollbrunner, C.F. : Über das Ausknicken symmetrischer Bogenträger unter symmetrisch verteilten Belastungen, STAHLBAU, Heft 17,

- 1937, SS. 138~142
- 4) Oran, C. : Complementary Energy Method for Buckling of Arches, ASCE, Vol. 94, EM 2, 1968
- 5) DaDeppo, D.A. and Schmidt, R. : Sidesway Buckling of Deep Circular Arches under a Concentrated Load, Journal of Applied Mechanics, June, 1969, pp. 325~327
- 6) Huddleston, J.V. : Finite Deflection and Snap-Through of High Circular Arches, Journal of Applied Mechanics, Dec., 1968, pp. 763~769
- 7) Dym, C.L. : Buckling and Postbuckling Behavior of Steep Compressible Arches, Int. J. Solids Structures, 1973, Vol. 9, pp. 129~140
- 8) Wempner, G.A. and Kesti, N.E. : On the Buckling of Circular Arches and Rings, Proc. of 4-th U.S. National Congress of Applied Mechanics, Vol. 2, June, 1962, pp. 843~849
- 9) 倉西正嗣他 : 弾性安定要覧, コロナ社, 昭 42

【付 録】

連立微分方程式 (10・a)~(10・c) の解は Laplace 変換を用いて求められる。このとき, 式 (10・a) の第 3 項中に含まれる  $(\bar{u}'' + \alpha w')$   $[u(\eta - \xi) - u(\eta - \zeta)]$  の Laplace 変換は次のように算定される。

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\zeta} \psi' e^{-s\eta} d\eta &= \left[ \psi' \frac{e^{-s\eta}}{-s} \right]_{\xi}^{\zeta} + \int_{\xi}^{\zeta} \psi'' \frac{e^{-s\eta}}{s} d\eta \quad \text{[部分積分により]} \\ &= \left[ \psi' \frac{e^{-s\eta}}{-s} \right]_{\xi}^{\zeta} - \frac{\mu^2 a^2}{s} \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{u}' + \alpha \bar{w}) e^{-s\eta} d\eta + \frac{\mu^2 a^2}{s} \int_{\xi}^{\zeta} \psi e^{s\eta} d\eta \quad \text{[式 (10・c) より]} \\ &= \left[ \psi' \frac{e^{-s\eta}}{-s} \right]_{\xi}^{\zeta} - \frac{\mu^2 a^2}{s} \left[ (\bar{u}' + \alpha \bar{w}) \frac{e^{-s\eta}}{-s} \right]_{\xi}^{\zeta} + \frac{\mu^2 a^2}{s} \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{u}'' + \alpha w') \frac{e^{-s\eta}}{-s} d\eta \\ &\quad + \frac{\mu^2 a^2}{s} \left[ \psi \frac{e^{-s\eta}}{-s} \right]_{\xi}^{\zeta} + \frac{\mu^2 a^2}{s} \int_{\xi}^{\zeta} \psi' \frac{e^{-s\eta}}{s} d\eta \quad \text{[部分積分により]} \end{aligned}$$

これより

$$\int_{\xi}^{\zeta} \psi' e^{-s\eta} d\eta = -\frac{s}{s^2 - \mu^2 a^2} [\bar{M}(\eta) e^{-s\eta}]_{\xi}^{\zeta} - \frac{1}{s^2 - \mu^2 a^2} [\bar{Q}(\eta) e^{-s\eta}]_{\xi}^{\zeta} - \frac{\mu^2 a^2}{s^2 - \mu^2 a^2} \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{u}'' + \alpha \bar{w}') e^{-s\eta} d\eta \dots (A1)$$

全く同様に

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{w}' - \alpha \bar{u}) e^{-s\eta} d\eta &= \frac{\alpha \mu^2}{s(s^2 - \mu^2 a^2)} [\bar{M}(\eta) e^{-s\eta}]_{\xi}^{\zeta} + \frac{\alpha}{a^2(s^2 - \mu^2 a^2)} [\bar{Q}(\eta) e^{-s\eta}]_{\xi}^{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{a^2 s} [\bar{N}(\eta) e^{-s\eta}]_{\xi}^{\zeta} + \frac{\alpha \mu^2}{s^2 - \mu^2 a^2} \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{u}'' + \alpha \bar{w}') e^{-s\eta} d\eta \dots (A2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{u}'' + \alpha \bar{w}') e^{-s\eta} d\eta &= \int_{\xi}^{\zeta} \psi' e^{-s\eta} d\eta - \frac{\alpha}{\mu^2} \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{w}' - \alpha \bar{u}) e^{-s\eta} d\eta - \frac{\alpha k^2}{\mu^2 a^2} \int_{\xi}^{\zeta} e^{-s\eta} d\eta \\ &\quad + \frac{k^2}{\mu^2 a^2} \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{u}'' + \alpha \bar{w}') e^{-s\eta} d\eta \dots (A3) \end{aligned}$$

式 (A1), (A2), (A3) より

$$\begin{aligned} \Omega\{(\bar{u}'' + \alpha \bar{w}') [u(\eta - \xi) - u(\eta - \zeta)]\} &= \int_{\xi}^{\zeta} (\bar{u}'' + \alpha \bar{w}') e^{-s\eta} d\eta \\ &= \frac{\mu^2 a^2}{\mu^2 a^2 - k^2} \left\{ -\frac{s^2 + \alpha^2}{s(s^2 + \beta^2)} [\bar{M}(\eta) e^{-s\eta}]_{\xi}^{\zeta} - \frac{\alpha^2 + \mu^2 a^2}{\mu^2 a^2 (s^2 + \beta^2)} [\bar{Q}(\eta) e^{-s\eta}]_{\xi}^{\zeta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha (s^2 - \mu^2 a^2)}{\mu^2 a^2 s (s^2 + \beta^2)} [\bar{N}(\eta) e^{-s\eta}]_{\xi}^{\zeta} + \frac{\alpha k^2 (s^2 - \mu^2 a^2)}{\mu^2 a^2 (s^2 + \beta^2)} \left[ \frac{e^{-s\eta}}{s} \right]_{\xi}^{\zeta} \right\} \end{aligned}$$

(1972.11.22・受付)  
(1973. 5.23・再受付)