

## 間隙空気の圧縮を伴う鉛直浸透に関する一考察

A THEORETICAL CONSIDERATION ON VERTICAL INFILTRATION  
AFFECTED BY COMPRESSED AIR PRESSURE OF VOIDS IN SOILS

佐藤邦明\*  
By Kuniaki Sato

### 1. 序

有限の規模をもつ不飽和土層の表面に降雨あるいは給水が起った場合、土層内で浸透が生ずる。この現象は土層上の貯留水圧と層内での重力さらに表面張力に起因する毛管力により層内を水分が不飽和あるいは飽和状態で輸送されるものである。

これに関し、従来、L.G. Wilson & J.N. Luthin (1963)<sup>1)</sup>, E.G. Young & A.J. Peck (1965)<sup>2)</sup>, 石原・高木・馬場 (1966)<sup>3)</sup>, 田中 (1969)<sup>4)</sup>, 室田・佐藤 (1971)<sup>5)</sup>らの研究がある。これらの研究から次のような実験的事実がわかっている。

通常、鉛直浸透は土層の浸透能と降雨強度の比較によって機械的に違ったものとなる。つまり、浸透能が降雨強度に比べ十分小さければ、土層表面上で降雨は貯留され、その水位は時間的に増大し、多くの場合に流出が起こる。また、同時に土層内ではほぼ飽和含水比に近い浸透が起り、かなり明瞭な進行浸潤線が観測され、特に、土層下端で浸潤線の進行に伴い間隙の空気圧が大気圧以上に上昇する。しかし、逆に浸透能が降雨強度に比べ大きければ、降雨はほとんど不飽和浸透となり、不明瞭な浸潤線が時間的に進行することになる。この場合もやはり浸潤線下端の土層間隙の空気の圧縮はまぬがれないと。

結局、上述の二つの場合のいずれにおいても、浸潤線下端での土層内の空気の圧縮性に浸潤線の進行が影響を受けることになる。

実験的に、前者では圧縮された間隙内の空気は浸潤帯を通って表面に放出する、いわゆる空気の交換は起こりにくいが、後者では空気の交換を伴いながら浸透が促進されることが知られている。しかし、もし、浸透に伴いまく空気交換が発生しなければ、浸潤線の進行は時間

的に徐々に抑制され、ついに停止するものと考えられる。実際に、詳細に観測すれば、浸潤線は進行中、停止後ともにその前面で局的に一種の fingering, jumping 現象を起こし、不規則で必ずしも一定の形状を保ち得ず、安定したものとは言えない。しかしながら、進行浸潤帶内の含水比分布の実測<sup>6)</sup>によると、土層表面と浸潤線の至近を除けば、分布は全体的にはほぼ一様でかつ平均的にはある程度安定した分布形状が認められる。したがって、浸透が一様飽和浸潤帶の進行という見方から、空気の圧縮を伴う浸透過程における浸透速度の減少さらに停止の機構を理論的に検討することは興味あるものと思われる。

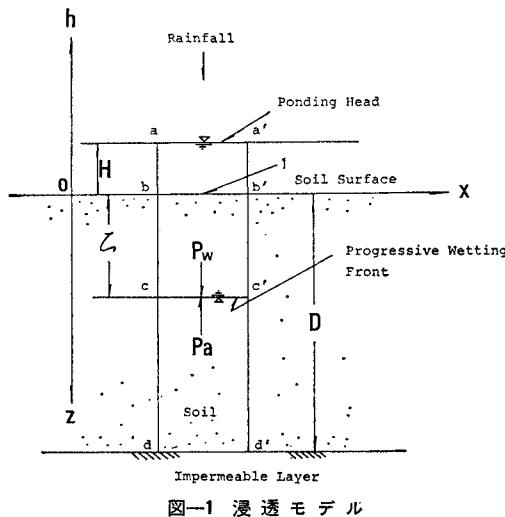
本研究はこの点に着目し、浸透能が降雨強度より小さいとき、空気の交換が生じない場合の浸潤線の進行限界、浸潤線の進行と貯留水位との関係、さらに間隙空気圧の変化を土層厚さとの関連において理論的に考察している。厳密に、鉛直浸透の問題は不飽和浸透流として捉えるべきであるが、土層の浸透係数が極端に小さくなれば、時間的に自由表面の変化を伴う流れ (Transient free-surface flow) とみなして、ポテンシャル的に取扱うことができる。

なお、ここでは必ずしも流出現象に伴う浸透にのみ着目せず、比較的土層規模の大きい場合の飽和浸透流を前提に述べてみたい。

### 2. 基礎式

図-1 のように、水平土層面上に鉛直上向きに  $h$ 、下向きに  $z$  をとり、不透水層または地下水面上の厚さ  $D$  の一様土層内の鉛直浸透を考える。 $x$  軸に沿って単位幅の土柱に着目すると、浸透能が降雨強度より小さいから任意の時刻で表面貯留  $H(t)$ 、浸潤面までの深さ  $\zeta(t)$  が生ずる。図中、浸潤線  $c-c'$  が時間的に降下すれば、下部土層  $cdd'c'$  内の土粒間隙の空気圧力は外部と空気交

\* 正会員 工博 大阪府立工業高等専門学校助教授土木工学科



換が起らなければ増大し、浸潤面の降下を抑制するよう働く。

ポテンシャル的に次の基礎式が導入される。

浸潤面は

$$F(z, t) = z - \zeta(t) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

であり、 $z$  と時間  $t$  の関数である。

また、浸潤面で自由表面の条件は

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

であり、 $z = \zeta$ において

$$\frac{\partial F}{\partial t} + w_f \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

が成立する。ここで、 $w$ :  $z$  方向の浸透流速、 $w_f$ : 浸潤面での真の流速である。

もし、飽和浸透流を考えれば、空隙率  $\lambda$  を導入して、

$$w = \lambda w_f \quad \dots \dots \dots (4)$$

と書ける。

流れは一次元的であるから ポテンシャル  $\phi(z)$  は、 $t > 0, 0 \leq z \leq \zeta$  に關し

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

を満たす必要がある。

式 (5) は積分して

$$\phi = Az + B \quad \dots \dots \dots (6)$$

となる。ここで、 $A, B$ : 積分定数である。

次に、式 (6) の定数  $A, B$  を境界条件  $z=0, z=\zeta$  で決定する。

いま、水頭  $h_w(z, t)$  は

$$h_w = \frac{P}{r} - z \quad \dots \dots \dots (7)$$

である。ここで、 $P$ : 圧力、 $r$ : 水の単位体積重量である。さらに、浸潤面下の土粒間隙内の空気圧力  $P_a$  は以

下のように決まる。

浸潤面の降下に伴う  $P_a$  の増大と下部土層の空気体積  $v$  との関係は非断熱的にボイル・シャルルの法則に従う。

$$P_a v = RT = \text{Const.} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ここで、 $R$ : 気体定数、 $T$ : 絶対温度である。

図-1 から、土層表面下  $\zeta$  における空気体積  $v = \lambda(D - \zeta)$  であるから、式 (8) へ代入し、 $[P_a]_{\zeta=0} = P_0$  (大気圧) を考慮すれば、 $D - \zeta$  での間隙の空気圧  $P_a$  は

$$P_a = \left(1 + \frac{\zeta}{D - \zeta}\right) P_0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

あるいは

$$h_a = \left(1 + \frac{\zeta}{D - \zeta}\right) h_0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

である。ここで、 $h_a = P_a/r$ ,  $h_0 = P_0/r$  である。

結局、ポテンシャルの表現、式 (6) の定数  $A, B$  は次のようにになる。

$$\text{式 (6), (7) で } z=0 \text{ として}$$

$$B = \phi(0) = k(H + P_0/r) \quad \dots \dots \dots (10)$$

である。ここで、 $k$ : 浸透係数である。

そこで、式 (6) は式 (10) を代入し、

$$\phi = Az + k(H + P_0/r) \quad \dots \dots \dots (11)$$

となる。

また、定数  $A$  は、式 (11) で  $z=\zeta$  として、式 (7) を考慮すれば、

$$\phi(\zeta) = A\zeta + k(H + P_0/r)$$

$$= k \left\{ \frac{1}{r} (P_a + P_c) - \zeta \right\}$$

から決まる。ここで、 $P_c$ : 毛管圧力 であり、 $-P_c/r = \eta$  (毛管水頭) と書ける。

したがって、式 (9) を考慮して、 $A$  は

$$A = -k \frac{H + \eta + \zeta - \frac{\zeta}{D - \zeta} h_0}{\zeta} \quad \dots \dots \dots (12)$$

となる。

式 (11) は式 (12) を代入し、

$$\phi = -k \frac{H + \eta + \zeta - \frac{\zeta}{D - \zeta} h_0}{\zeta} z + k(H + h_0) \quad \dots \dots \dots (13)$$

である。

他方、式 (3) へ式 (1), (4) を代入して

$$w = \lambda \frac{d\zeta}{dt} \quad \dots \dots \dots (14)$$

であり、 $\partial\phi/\partial z = -w$  であるから、式 (13), (14) から

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{k}{\lambda} \frac{(\zeta + H + \eta)(D - \zeta) - h_0 \zeta}{(D - \zeta)\zeta} \quad \dots \dots \dots (15)$$

が成立する。

式 (15) は間隙の空気の圧縮を考慮した鉛直飽和浸透

の基礎式となる。もし、圧縮を考えなければ、式(15)は

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{k}{\lambda} \frac{\zeta + H + \eta}{\zeta} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

となる。

さらに、降雨強度  $R(t)$ 、浸潤距離  $\zeta(t)$ 、貯留水位  $H(t)$  との間の保存式は流出を考えなければ、

$$\int_0^t R(t) dt = H(t) + \lambda \zeta(t) \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

である。

したがって、間隙の空気の圧縮を伴う鉛直浸透は式(15)と式(17)をある条件の下で解けばよいことになる。

### 3. 基礎式の解

式(15)を式(17)を考慮して初期条件の下で解くわけであるが、それに先立ち浸潤線の進行限界について述べる。土層表面と空気交換が起こらないから、浸潤線の進行は時々徐々に抑制され、ついに止るはずである。その時の位置  $\zeta = \zeta_c$  は式(15)から

$$\left( \frac{d\zeta}{dt} \right)_{\zeta=\zeta_c} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

で決まり、

$$(\zeta_c + H + \eta)(D - \zeta_c) - h_0 \zeta_c = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

の解となる。

二次方程式(19)の解は物理的に

$$\zeta_c = \frac{-(H + \eta + h_0 - D) + \sqrt{(H + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H + \eta)D}}{2} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

である。

式(15)は式(17)を考えて

$$\frac{dH}{dt} \equiv 0 \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

の3ケース、つまり、 $dH/dt > 0$  は貯留水位が時間的に増加する場合、 $dH/dt = 0$  は水位一定の場合、 $dH/dt < 0$  はある初期水位から降雨による供給がなく、水位が時間的に減少する場合、それぞれについて解き得る。

初期条件は

$$[\zeta]_{t=0} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (22)$$

である。また、式(17)の降雨強度は簡単のため

$$R(t) = R_0 : \text{一定} \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

とする。

#### (1) $dH/dt >$ の場合

式(17)は

$$R_0 t = H + \lambda \zeta \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

であるから、式(15)に代入し

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{k}{\lambda} \left[ \frac{\{(1-\lambda)\zeta + R_0 t + \eta\}(D - \zeta) - h_0 \zeta}{(D - \zeta)\zeta} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (25)$$

となる。

式(25)は非線形であるが、逐次代入法によって近似解を第二次近似まで求める。そこで、式(25)は変形して

$$\frac{d\zeta^2}{dt} = \frac{2k}{\lambda} \left\{ (1-\lambda)\zeta + R_0 t + \eta - \frac{h_0}{D - \zeta} \zeta \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (25)'$$

であり、 $R_0/k = \varepsilon$  ( $\varepsilon > 1$ )、 $\tau = kt$  とおくと、

$$\frac{d\zeta^2}{d\tau} = \frac{2}{\lambda} \left\{ (1-\lambda)\zeta + \varepsilon\tau + \eta - h_0 \frac{\zeta}{1 - \frac{\zeta}{D}} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (26)$$

となる。いま、式(26)の右辺において、 $H \ll D$  ならば  $(\zeta/D) < 1$  だから

$$h_0 \frac{\zeta}{1 - \frac{\zeta}{D}} = h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\zeta}{D} \right)^n$$

と置けば、式(26)は

$$\frac{d\zeta^2}{d\tau} = \frac{2}{\lambda} \left\{ (1-\lambda)\zeta + \varepsilon\tau + \eta - h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\zeta}{D} \right)^n \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (26)'$$

となる。

式(26)'の解は

$$\zeta^2 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\tau} \left\{ (1-\lambda)\zeta + \varepsilon f + \eta - h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\zeta}{D} \right)^n \right\} df \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

と同値である。

第一次近似  $[\zeta^2]_1$  は初期条件式(22)から

$$[\zeta^2]_1 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\tau} (\varepsilon f + \eta) df = \alpha \tau^2 + \beta \tau \quad \dots \dots \dots \quad (28)$$

である。ここで、 $\alpha = \varepsilon/\lambda$ 、 $\beta = 2\eta/\lambda$  である。

第二次近似  $[\zeta^2]_2$  はさらに、

$$[\zeta^2]_2 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\tau} \left[ (1-\lambda) \sqrt{\alpha f^2 + \beta f} + \varepsilon f + \eta - h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{\alpha f^2 + \beta f}}{D} \right)^n \right] df \quad \dots \dots \dots \quad (29)$$

となり、 $n=2$ まで考えると、

$$\begin{aligned} [\zeta^2]_2 = & \left[ \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ \frac{2\alpha\tau + \beta}{2\alpha} \sqrt{\alpha\tau^2 + \beta\tau} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta^2}{4\alpha\sqrt{\alpha}} \log_e \frac{2\alpha\tau + \beta + 2\sqrt{\alpha(\alpha\tau^2 + \beta\tau)}}{\beta} \right\} \right] \\ & + \alpha\tau^2 + \beta\tau \\ = & \frac{1}{\lambda} \frac{h_0}{D} \left[ \left\{ \frac{2\alpha\tau + \beta}{2\alpha} \sqrt{\alpha\tau^2 + \beta\tau} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta^2}{4\alpha\sqrt{\alpha}} \log_e \frac{2\alpha\tau + \beta + 2\sqrt{\alpha(\alpha\tau^2 + \beta\tau)}}{\beta} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\alpha}{3D} \tau^3 + \frac{\beta}{D} \tau^2 \Big] \quad \dots \dots \dots (30)$$

となる。

もし、間隙の空気の圧縮を考えなければ、式 (16) は式 (24) を代入し、

$$\frac{d\zeta^2}{dt} = \frac{2k}{\lambda} \{(1-\lambda)\zeta + R_0 t + \eta\} \quad \dots \dots \dots (31)$$

であり、式 (25)' の右辺の最後の項を無視したものと同じである。したがって、近似解は

$$[\zeta^2]_2 = \left[ \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ \frac{2\alpha\tau + \beta}{2\alpha} \sqrt{\alpha\tau^2 + \beta\tau} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta^2}{4\alpha\sqrt{\alpha}} \log_e \left| \frac{2\alpha\tau + \beta + 2\sqrt{\alpha(\alpha\tau^2 + \beta\tau)}}{\beta} \right| \right\} \right. \\ \left. + \alpha\tau^2 + \beta\tau \right] \quad \dots \dots \dots (32)$$

である。

ここで、式 (31) は非線形であるが、次のように線形化でき、厳密解を求め得る。

式 (31) は  $\tau = t + \eta^*$ ,  $\eta^* = \eta/R_0$  とおくと

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{k}{\lambda} \left\{ (1-\lambda) + \frac{R_0}{\zeta} \tau \right\} \quad \dots \dots \dots (33)$$

となり、さらに、 $\zeta = \xi\tau$  とおくと

$$-\frac{\xi d\xi}{\xi^2 - a\xi - b} = \frac{d\tau}{\tau} \quad \dots \dots \dots (34)$$

となる。ここで、 $a = (1-\lambda)k/\lambda$ ,  $b = R_0 k/\lambda$  である。

式 (34) は積分して

$$\log_e \tau + \log_e |(\xi^2 - a\xi - b)^{1/2}| \\ + \log_e \left| \left( \frac{2\xi - a - c}{2\xi - a + c} \right)^{a/2c} \right| = C \quad \dots \dots \dots (35)$$

である。ここで、 $C$  : 積分定数,  $c = \sqrt{a^2 + 4b}$  である。さらに、初期条件式 (22) から、 $\tau = \eta^*$  で  $\xi = 0$  であり、定数  $C$  が容易に決まり

$$\frac{t + \eta^*}{\eta^*} \left\{ \frac{-\left(\frac{\xi}{t + \eta^*}\right)^2 + a\left(\frac{\xi}{t + \eta^*}\right) + b}{b} \right\}^{1/2} \\ - \left\{ \frac{\xi}{t + \eta^*} (a - c) + 2b \right\}^{a/2c} \\ - \left\{ \frac{\xi}{t + \eta^*} (a + c) + 2b \right\}^{a/2c} = 1 \quad \dots \dots \dots (36)$$

となる。

しかし、式 (36) の表現は  $\xi \sim t$  関係において、Implicit であるため、そのままで計算しにくい。

## (2) $dH/dt = 0$ の場合

貯留水位  $H(t) = H_0 : \text{const}$  であるから、式 (15) は、

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{k}{\lambda} \frac{(\zeta + H_0 + \eta)(D - \zeta) - h_0 \zeta}{(D - \zeta)\zeta} \quad \dots \dots \dots (37)$$

となり、変形して

$$\left\{ 1 + \frac{(H_0 + \eta + h_0)\zeta - (H_0 + \eta)D}{-\zeta^2 - (H_0 + \eta + h_0 - D)\zeta + (H_0 + \eta)D} \right\} d\zeta \\ = \frac{k}{\lambda} dt \quad \dots \dots \dots (37)'$$

である。

式 (37)' は容易に積分でき

$$\zeta - \frac{(H_0 + \eta + h_0)}{2} \log_e |-\zeta^2| \\ - (H_0 + \eta + h_0 - D)\zeta + (H_0 + \eta)D | \\ + \frac{2(H_0 + \eta)D + (H_0 + \eta + h_0 - D)(H_0 + \eta + h_0)}{2\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}} \\ \cdot \log_e \left| \frac{2\zeta + (H_0 + \eta + h_0 - D)}{2\zeta + (H_0 + \eta + h_0 - D)} \right| \\ \cdot \frac{+\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}}{-\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}} \\ = \frac{k}{\lambda} t + C \quad \dots \dots \dots (38)$$

となる。ここで  $C$  : 積分定数である。

定数  $C$  は式 (22) から

$$C = -\frac{(H_0 + \eta + h_0)}{2} \log_e |(H_0 + \eta)D| \\ - \frac{2(H_0 + \eta)D + (H_0 + \eta + h_0 - D)(H_0 + \eta + h_0)}{2\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}} \\ \cdot \log_e \left| \frac{(H_0 + \eta + h_0 - D)}{(H_0 + \eta + h_0 - D)} \right| \\ + \frac{+\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}}{-\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}} \\ \dots \dots \dots (39)$$

である。

結局、式 (39) を式 (38) へ代入し、解は

$$\zeta + \frac{(H_0 + \eta + h_0)}{2} \\ \cdot \log_e \left| \frac{(H_0 + \eta)D}{-\zeta^2 - (H_0 + \eta + h_0 - D)\zeta + (H_0 + \eta)D} \right| \\ - \frac{2(H_0 + \eta)D + (H_0 + \eta + h_0 - D)(H_0 + \eta + h_0)}{2\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}} \\ \cdot \log_e \left| \frac{-\zeta \{(H_0 + \eta + h_0 - D)}{-\zeta \{(H_0 + \eta + h_0 - D)} \right| \\ - \frac{+\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}}{+\sqrt{(H_0 + \eta + h_0 - D)^2 + 4(H_0 + \eta)D}} \\ + \frac{2(H_0 + \eta)D}{+2(H_0 + \eta)D} = \frac{k}{\lambda} t \quad \dots \dots \dots (40)$$

である。

もし、間隙の空気の圧縮を考えなければ、式 (16) は

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{k}{\lambda} \frac{\zeta + H_0 + \eta}{\zeta} \quad \dots \dots \dots (41)$$

であり、変形して

$$\left\{ 1 - \frac{(H_0 + \eta)}{(\zeta + H_0 + \eta)} \right\} d\zeta = \frac{k}{\lambda} dt \quad \dots \dots \dots (41)'$$

となる。

式 (41)' は容易に積分でき、

$$\zeta - (H_0 + \eta) \log_e |\zeta + H_0 + \eta| = \frac{k}{\lambda} t + C \quad \dots \dots \dots (42)$$

となり、積分定数  $C$  は式 (22) から、

$$C = -(H_0 + \eta) \log_e |H_0 + \eta| \quad \dots \dots \dots (43)$$

である。

式(43)を式(42)へ代入して、解は

$$\zeta - (H_0 + \eta) \log_e \left| \frac{\zeta + H_0 + \eta}{H_0 + \eta} \right| = \frac{k}{\lambda} t \quad \dots\dots\dots(44)$$

となる。

### (3) $dH/dt < 0$ の場合

式(17)は初期水位を  $H_0$  とすると、

$$H_0 - H = \lambda \zeta \quad \dots\dots\dots(45)$$

であるから、式(15)へ代入し、

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{k}{\lambda} \left[ \frac{(1-\lambda)\zeta + H_0 + \eta}{(D-\zeta)\zeta} (D-\zeta) - h_0 \zeta \right] \quad \dots\dots\dots(46)$$

となる。

式(46)は変形して

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \left\{ D + \frac{(H_0 + \eta + h_0 + \lambda D - D)}{(1-\lambda)} \right\} \zeta - \frac{(H_0 + \eta)}{(1-\lambda)} D \right\} d\zeta \\ & - \zeta^2 - \frac{(H_0 + \eta + h_0 + \lambda D - D)}{(1-\lambda)} \zeta + \frac{(H_0 + \eta)}{(1-\lambda)} D \right\} \\ & = \frac{(1-\lambda)k}{\lambda} dt \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(47)$$

となり、積分し

$$\begin{aligned} & \zeta - \frac{D+\delta}{2} \log_e | -\zeta^2 - \delta\zeta + \kappa | \\ & - \frac{2\kappa + (D+\delta)\delta}{2\sqrt{\delta^2 + 4\kappa}} \log_e \left| \frac{-2\zeta - \delta - \sqrt{\delta^2 + 4\kappa}}{-2\zeta - \delta + \sqrt{\delta^2 + 4\kappa}} \right| \\ & = \frac{(1-\lambda)k}{\lambda} t + C \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(48)$$

である。ここで、

$$\delta = \frac{(H_0 + \eta + h_0 + \lambda D - D)}{(1-\lambda)}, \quad \kappa = \frac{(H_0 + \eta)D}{(1-\lambda)}$$

である。

積分定数  $C$  は式(22)から

$$\begin{aligned} C &= -\frac{D+\delta}{2} \log_e |\kappa| \\ & - \frac{2\kappa + (D-\delta)\delta}{2\sqrt{\delta^2 + 4\kappa}} \log_e \left| \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 + 4\kappa}}{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\kappa}} \right| \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(49)$$

となり、式(48)へ代入し、解は

$$\begin{aligned} & \zeta + \frac{D+\delta}{2} \log_e \left| \frac{\kappa}{-\zeta^2 - \delta\zeta + \kappa} \right| \\ & - \frac{2\kappa + (D+\delta)\delta}{2\sqrt{\delta^2 + 4\kappa}} \log_e \left| \frac{-\zeta(\zeta - \sqrt{\zeta^2 + 4\kappa}) + 2\kappa}{-\zeta(\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\kappa}) + 2\kappa} \right| \\ & = \frac{(1-\lambda)k}{\lambda} t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(50)$$

である。

さらに、もし、間隙の空気の圧縮が起らなければ、式(45)を式(16)へ代入し、

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{k}{\lambda} \left\{ \frac{(1-\lambda)\zeta + H_0 + \eta}{\zeta} \right\} \quad \dots\dots\dots(51)$$

となり、変形して

$$\left\{ 1 - \frac{\frac{H_0 + \eta}{(1-\lambda)}}{\zeta + \frac{H_0 + \eta}{(1-\lambda)}} \right\} d\zeta = \frac{(1-\lambda)k}{\lambda} dt \quad \dots\dots\dots(51)'$$

である。

式(51)'は積分して

$$\zeta - \frac{H_0 + \eta}{(1-\lambda)} \log_e \left| \zeta + \frac{H_0 + \eta}{(1-\lambda)} \right| = \frac{(1-\lambda)k}{\lambda} t + C \quad \dots\dots\dots(52)$$

となり、積分定数  $C$  は式(22)から

$$C = -\frac{H_0 + \eta}{(1-\lambda)} \log_e \left| \frac{H_0 + \eta}{(1-\lambda)} \right| \quad \dots\dots\dots(53)$$

であり、式(52)へ代入し

$$\zeta - \frac{H_0 + \eta}{(1-\lambda)} \log_e \left| \frac{(1-\lambda)\zeta + H_0 + \eta}{H_0 + \eta} \right| = \frac{(1-\lambda)k}{\lambda} t \quad \dots\dots\dots(54)$$

となる。

ここで、式(16)において表面貯留水位を  $H=0$  に保てば、

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{k}{\lambda} \frac{\zeta + \eta}{\zeta} \quad \dots\dots\dots(55)$$

となり、積分し

$$\zeta - \eta \log_e |\zeta + \eta| = \frac{k}{\lambda} t + C \quad \dots\dots\dots(56)$$

である。積分定数  $C$  は式(22)から決まり、結局、

$$\zeta - \eta \log_e \left| \frac{\zeta + \eta}{\eta} \right| = \frac{k}{\lambda} t \quad \dots\dots\dots(57)$$

となる。

つまり、 $H=0$  に保てば、浸潤線は毛管水頭  $\eta$  のみでも進行しうることを示している。

## 4. 計算結果と検討

浸潤線の進行限界、浸透距離と表面貯留水位の時間的变化、さらに土粒間隙の空気圧力と時間の関係について、それぞれ  $dH/dt > 0$ ,  $dH/dt = 0$ ,  $dH/dt < 0$  の場合に数値計算を行ない、それらの現象のメカニズムを比較、検討する。

浸潤線の進行限界  $\zeta_c$  は式(20)を用い数値計算する。いま、毛管水頭  $\eta=0.1$  m、標準大気圧  $h_0=10$  mと仮定し、まず貯留水位  $H=0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$  mをパラメーターに  $\zeta_c \sim D$  関係を計算し、次に、土層厚さ  $D=1, 10, 20, 30, 50$  mをパラメーターとし、 $\zeta_c \sim H$  関係を求めた。それらの計算結果を対数紙上にプロットしたものが図-2であり、プロットの都合上横軸で  $\zeta_c \sim H$  関係は  $\zeta_c \sim D$  関係の  $10^{-2}$  倍されている。図中、 $\zeta_c \sim D$  関係は  $D=20$  mをこえると  $H$  に無関係に一義的に決まり、また  $\zeta_c \sim H$  関係において、 $\zeta_c$  は

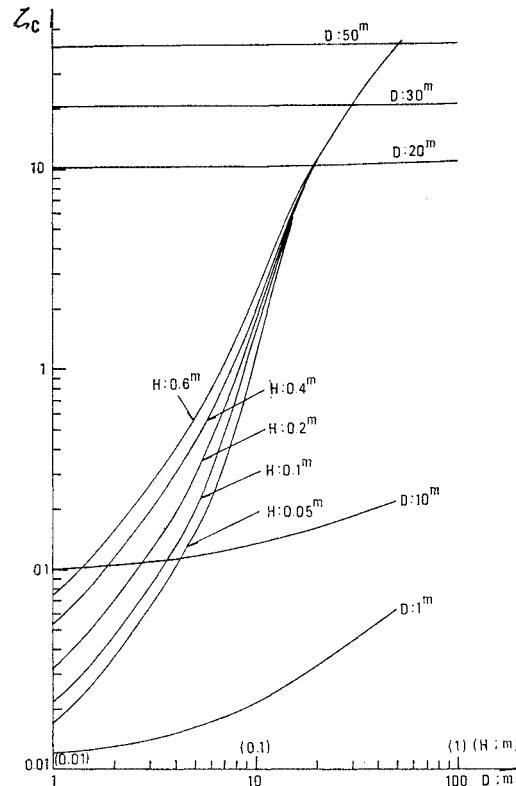


図-2  $D$  と  $H$  をパラメーターとした  $H$ ,  $D$  と限界浸透距離  $\zeta_c$  の関係 ( $\eta=10$  cm,  $\lambda=0.4$  の場合の計算例)

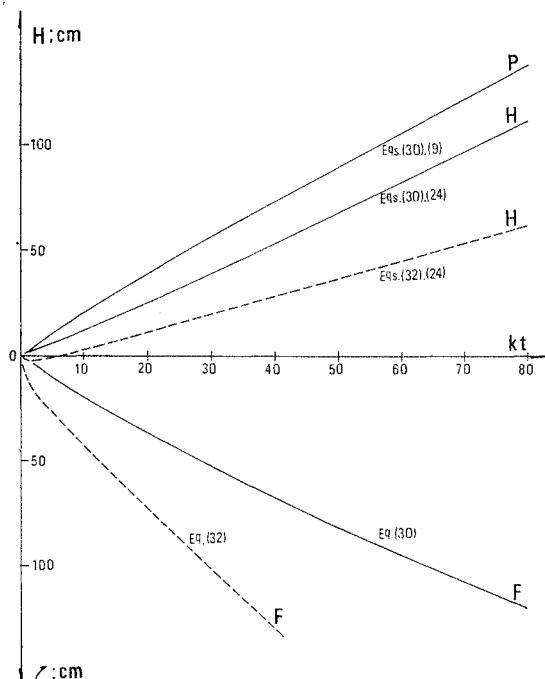


図-3  $dH/dt > 0$  の  $\zeta$ ,  $H$ ,  $P_a/\gamma$  と  $kt$  の関係 ( $\epsilon=2$ ,  $\eta=10$  cm,  $\lambda=0.4$ ,  $h_0/D=1$ ,  $D=1000$  cm の場合の計算例)

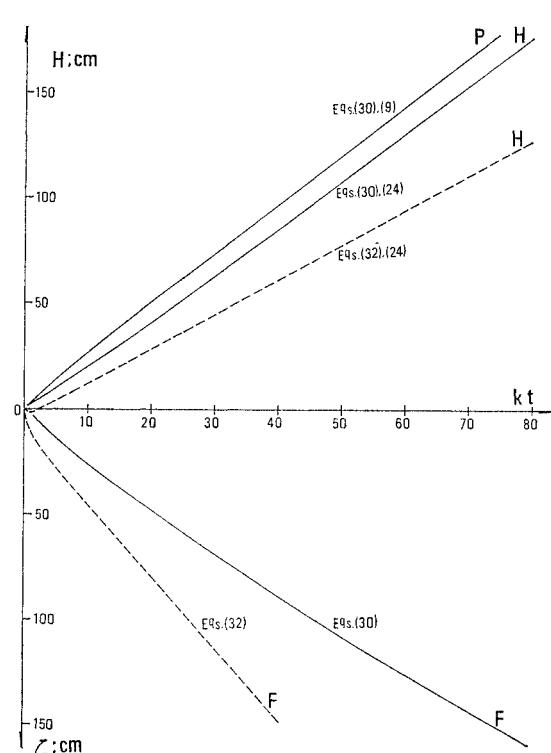


図-4  $dH/dt > 0$  の  $\zeta$ ,  $H$ ,  $P_a/\gamma$  と  $kt$  の関係 ( $\epsilon=3$ ,  $\eta=10$  cm,  $\lambda=0.4$ ,  $h_0/D=1$ ,  $D=1000$  cm の場合の計算例)

$D$  が大きくなると  $H$  は無関係にほぼ一定値をもつようになる。つまり、 $\zeta_c \sim D$  関係、 $\zeta_c \sim H$  関係とともに  $D$  が大きくなると貯留水位、毛管水頭の影響をほとんど受けなくなる。

次に、間隙の空気圧を考えた場合、浸透距離  $\zeta$ 、貯留水位  $H$ 、空気圧力の上昇が時間的にどう変わるか、また間隙の空気の圧縮を考えない場合に  $\zeta$  と  $H$  が時間的にいかに変化するかを  $dH/dt > 0$ ,  $dH/dt = 0$ ,  $dH/dt < 0$  の場合に数値計算によって検討する。これらの計算例ではすべて  $\eta=10$  cm,  $\lambda=0.4$ ,  $h_0=1000$  cm,  $D=1000$  cm と仮定して計算されている。

まず、 $dH/dt > 0$  の場合について空気の圧縮を考えたとき、式(30), (24), (9)から、また圧縮を考えないとき、式(32), (24)が用いられる。計算結果の二例が  $\epsilon=R_0/k=2, 3$  についてそれぞれ図-3, 4に示されている。図中、縦軸上向きに  $P_a/\gamma$ ,  $H$ 、下向きに  $\zeta$  が目盛られ、横軸は  $kt$  である。また、図中、点線は空気の圧縮を考えない場合であり、実線は空気の圧縮を考えた場合の計算値であり、また記号  $F$  は  $\zeta \sim kt$  関係、 $H$  は  $H \sim kt$  関係、 $P$  は  $P_a/\gamma \sim kt$  関係を意味する（ほかの図-5, 6においても同様である）。図-3, 4 から浸透におよぼす空気の圧縮の効果が明確に把握でき、 $\epsilon=2$  の場合より  $\epsilon=3$  の場合のほうが

降雨強度が大きいから、浸透、圧力上昇、水位上昇速度がともに大であることがわかる。特に、興味深いことは圧縮を考えない場合の  $H \sim kt$  関係に着目し、 $\epsilon=2, 3$  の場合ともに降雨初期に毛管水頭が卓越するため、土層

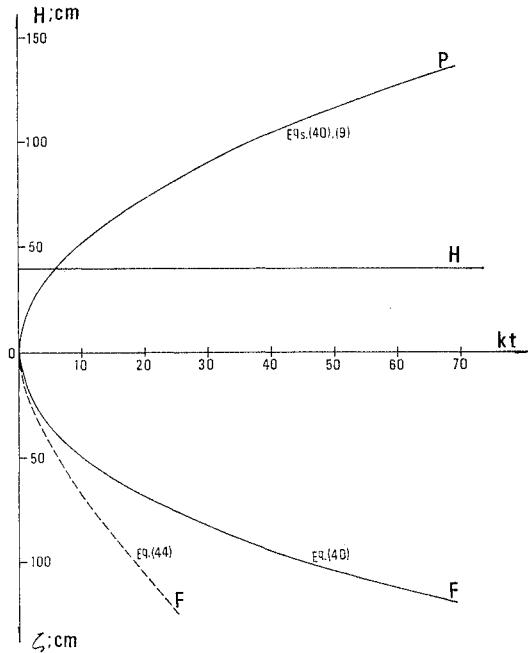


図-5  $dH/dt=0$  の  $\zeta, H, P_a/r$  と  $kt$  の関係  
( $\gamma=10\text{ cm}$ ,  $\lambda=0.4$ ,  $H_0=40\text{ cm}$ ,  $h_0/D=1$ ,  
 $D=1000\text{ cm}$  の場合の計算例)

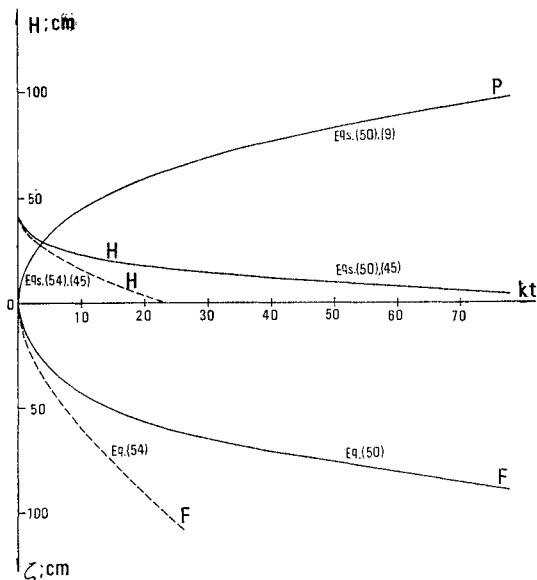


図-6  $dH/dt<0$  の  $\zeta, H, P_a/r$  と  $kt$  の関係  
( $\gamma=10\text{ cm}$ ,  $\lambda=0.4$ ,  $H_0=40\text{ cm}$ ,  $h_0/D=1$ ,  
 $D=1000\text{ cm}$  の場合の計算例)

表面に湛水しないことである。この現象は現場においても実験室においてもしばしば観測される事実である。また、概して、 $dH/dt>0$  の場合の  $\zeta \sim kt$  関係、 $H \sim kt$  関係とともにきわめて直線に近いことも注目したい(図-5, 6 比較参照)。

さらに、 $dH/dt=0$  の場合、式(40), (9) または式(44)において一定貯留水位  $H_0=40\text{ cm}$  として、 $dH/dt<0$  の場合、式(50), (45), (9) または式(54), (45)において、初期貯留水位  $H_0=40\text{ cm}$  として計算値をプロットしたものがそれぞれ図-5, 6 である。図-5, 6において、 $\zeta \sim kt$  関係、 $H \sim kt$  関係はともに概して二次曲線に近く、また比較すれば、 $dH/dt=0$  の場合のほうが  $dH/dt<0$  の場合より浸透、水位上昇、圧力上昇速度が大であり、逆に空気の圧縮の効果は  $dH/dt=0$  の場合より  $dH/dt<0$  の場合のほうが顕著である。

## 5. 結 論

有限規模の不飽和土層内の鉛直浸透に関し、土粒間隙の空気の圧縮を考慮して理論的に考察したが、従来あまり明確でなかったことが明らかになった。

まず、浸潤線の進行限界に関連し、浸潤線の進行に伴い、その下部の制限土層内で間隙の空気圧力は徐々に増大するがある圧力に達すると浸潤線上部に働く水圧と毛管力に一致して一定値となり、そのとき浸潤線の進行は停止する。したがって、浸潤線の進行は大気圧が一定で、ある土層について毛管水頭が一定とみなせるから、土層の厚さと表面貯留水位によって決まる。しかし、土層厚さが大きくなると貯留水位、毛管力の効果は顕著でなくなる。

次に、間隙の空気圧力を考慮した基礎式がダルシー則、ボイル・シャルル則より導入され、保存式とあわせ貯留水位に着目し  $dH/dt>0$ ,  $dH/dt=0$ ,  $dH/dt<0$  の場合に解かれた。同時に、空気の圧縮を考えない場合の解も得られた。そこで、数値計算によって仮定された空隙率、毛管水頭、土層厚さ、降雨強度の下で解の妥当性を吟味した。その結果、 $dH/dt>0$ ,  $dH/dt=0$ ,  $dH/dt<0$  のいずれの場合においても空気の圧縮は浸透に非常に大きな影響を与えることがわかった。 $dH/dt>0$  の場合、降雨強度が大きいほど浸透、圧力上昇、水位上昇速度が大であり、また概して  $\zeta \sim kt$  関係、 $H \sim kt$  関係は直線に近い関係をもつ。この場合、降雨初期において毛管力が卓越するため、土層表面に湛水の発生が見られない。次に、 $dH/dt=0$ ,  $dH/dt<0$  の場合、 $\zeta \sim kt$  関係、 $H \sim kt$  関係は概して二次曲線に近く、特に降雨初期に浸透速度が大きくなる。また、 $dH/dt=0$  の場合は  $dH/dt<0$  の場合より浸透、水位上昇、圧力上昇速度

が大である。

なお、この研究では鉛直浸透の進行によって間隙内で圧縮された空気がまったく外部と交換されないと仮定したが、実際には浸透能と降雨強度の差が小さくなり、浸透係数が大きくなると浸透に伴い空気交換がおこる。したがって、こういった場合は別の立場から研究する必要がある。

最後に、本論文は昭和47年度文部省科研、特定研究“水資源の貯留・調節機能の研究”よりの補助を得て行なわれた研究の一部であることを記して、研究代表者大阪大学工学部室田 明教授ならびに関係各位に深甚の謝意を表わす次第である。

#### 参考文献

- 1) Wilson, L.G., Luthin, J.N.: Effect of Air ahead of the Wetting Front on Infiltration, *Soil Sci.*, Vol. 96, 1963.
- 2) Youngs, E.G., Peck, A.J.: Moisture profile Development and Air Compression during Water Uptake by Bounded Porous Bodies, *Soil Sci.*, Vol. 98, 1965.
- 3) 石原安雄・高木不折・馬場洋二：雨水の鉛直浸透に関する実験的研究，京大防災研究所年報，9号，1966。
- 4) 田中 茂：土壤間隙空気の圧縮を考慮した地中への鉛直浸透，第13回水理講演会講演集，1969。
- 5) Murota, A., Sato, K.: Vertical Infiltration due to Constant Rainfall into Non-Saturated Soils, 14th Congress I.A.H.R., Vol. 5, Paris, 1971.
- 6) Murota, A., Sato, K.: On Progressive Wetting Front in Non-Saturated Soils due to Rainfall, Tech. Rept. Osaka Univ., Vol. 23, No. 1118, 1973

(1973.1.29・受付)