土木学会論文報告集
第 215 号・1973 年 7 月

等時間原則による交通量配分の繰返し計算法

AN ITERATIVE METHOD OF TRAFFIC ASSIGNMENT BY THE PRINCIPLE OF EQUAL TRAVEL TIMES

佐 佐 木　綱*・井 上 博 司**
By Tsuna Sasaki and Hiroshi Inoue

1. まえがき

等時間原則とは，各道路区間の走行時間が交通量によって変化することを前提として，運転者は起終点間の所要時間が最小となる経路を選ぶという仮定である。この配分原則は Wardrop, J.G.[1] によって提唱されたものであり，Wardrop, J.G. 自身は等時間原則を「走行時間は実際に使用される経路についてすべて等しく，使用されないどの経路のそれよりも小さい」と表現している。そして「交通の状態は最終的には，新しい経路を選択することによって走行時間を小さくすることができないような平衡状態にいたると仮定することができるであろうから，この配分原則は非常に現実的である」と述べている。

等時間原則による交通量配分の計算手法については多くの研究がなされており，その近似解を求める方法として分割配分法，ウエイン法などすでにいくつかの有用な計算方法が開発され，実用に供されている。一方，その厳密解を求める方法についてもさまざまな計算手法が提案されているが[2)~5)]，それらの多くは実際上の適用性に乏しく，一般の道路網を対象として組織的に計算を行なう手法はみあたらない。

本研究は，道路区間の走行時間が交通量の増加とともに直線的に増大することを仮定して，等時間原則による交通量配分計算を行なう手法について考察を行なったものである。変数としてはパスフローを用いており，順次ゾーンペアーを遷移することによって，ゾーンペアーごとに等時間原則を満足するようなパスフローを求めている。また，走行時間関数を線形に仮定したときには，等時間原則による交通量配分は特殊な2次計画法の問題になるが，これを非常に効率よく解くアルゴリズムを開発している。この手法では計算が組織的であるから，いかなる OD 表と道路網とが与えられても電子計算機により自動的に配分計算を行なうことができる。

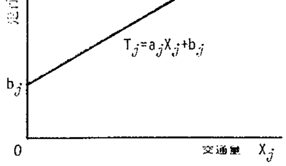
* 正会員　工博　京都大学教授　工学部交通土木工学科
** 正会員　工修　京都大学助手　工学部交通土木工学科

2. 定　式　化

いま，リンク j を流れる交通量を X_j，その走行時間を T_j，リンクの数を m とする。道路区間の走行時間はそこを流れる交通量の増加とともに増大するが，この関係は一次式で十分近似することができるので，

$$T_j = a_j X_j + b_j \quad (j=1, 2, \cdots, m) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

とおく。ここに a_j, b_j はリンク j に固有の正の定数である。図―1 は走行時間と交通量の関係を図示したものである。



図―1　走行時間と交通量の関係

次に経路を代数的に表示するためにルート行列を用いる。ゾーンペアー i についてのルート行列 R^i を次のように定義する。

$$R^i = [r_{kj}{}^i]$$

$$r_{kj}{}^i = \begin{cases} 1;\ \text{ゾーンペアー } i \text{ の経路 } k \text{ がリンク } j \text{ を経由するとき} \\ 0;\ \text{ゾーンペアー } i \text{ の経路 } k \text{ がリンク } j \text{ を経由しないとき} \end{cases}$$

ゾーンペアー i の起終点交通量を S^i，経路 k を流れる交通量を $x_k{}^i$，ゾーンペアーの数を s で表わすと，パスフローの和は起終点交通量に等しくなければならないから

$$\sum_k x_k{}^i=S^i \quad (i=1,2,\cdots,s) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

である。また，リンク j を流れる交通量 X_j はパスフロー，ルート行列を用いて次のように表わされる。

$$X_j=\sum_i\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i \quad (j=1,2,\cdots,m) \cdots\cdots (3)$$

式 (3) を式 (1) に代入すると次式を得る。

$$T_j=a_j\sum_i\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i+b_j \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ゾーンペアー l の経路 p の全長にわたる所要時間 $t_p{}^l$ は，その通るリンクの走行時間を加算することによって，

$$t_p{}^l=\sum_j r_{pj}{}^l T_j=\sum_j r_{pj}{}^l\Big(a_j\sum_i\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i+b_j\Big) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

となる。

任意のゾーンペアーについて，交通量の流れる経路については所要時間が皆同じで，交通量の流れないどの経路のそれよりも小さいという関係は次のように表わされる。

$$\left.\begin{array}{l}\sum_j r_{pj}{}^l\Big(a_j\sum_i\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i+b_j\Big)=t_0{}^l \quad (x_p{}^l>0)\\ \sum_j r_{pj}{}^l\Big(a_j\sum_i\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i+b_j\Big)\geqq t_0{}^l \quad (x_p{}^l=0)\\ x_p{}^l\geqq 0\\ \begin{pmatrix}l=1,2,\cdots,s\\ p=1,2,\cdots,n_l\end{pmatrix}\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

等時間原則による交通量配分は，式 (2)，(6) を満足するような $x_p{}^l$ を求める問題に帰着した。

3. 1 ゾーンペアーについての配分

一般的な交通量配分の問題は，すべてのゾーンペアーについての起終点交通量を道路網に配分するものであるが，ここではまずある特定のゾーンペアーの起終点交通量のみを道路網に配分することを考える。その他のゾーンペアーのパスフローの値をすべて固定し，着目するゾーンペアーについて何本かの経路が求まっているとき，それらの経路を流れるパスフローが等時間原則にしたがうような値を求める。

いま着目するゾーンペアーを l とすると，ゾーンペアー l の任意の経路 p の所要時間は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}t_p{}^l&=\sum_j r_{pj}{}^l\Big(a_j\sum_i\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i+b_j\Big)\\ &=\sum_j r_{pj}{}^l\Big(a_j\sum_{i\neq l}\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i+a_j\sum_k r_{kj}{}^l x_k{}^l+b_j\Big)\\ &=\sum_k x_k{}^l\sum_j a_j r_{pj}{}^l r_{kj}{}^l\\ &\quad+\sum_i r_{pj}{}^l\Big(a_j\sum_{i\neq l}\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i+b_j\Big)\cdots (7)\end{aligned}$$

式 (7) において，右辺第1項中の $\sum_j a_j r_{pj}{}^l r_{kj}{}^l$ は定数であるから，

$$\sum_j r_{pj}{}^l r_{kj}{}^l a_j=e_{pk}{}^l \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

とおく。また l 以外のゾーンペアーのパスフローはすべて固定しているから右辺第2項も定数となり，これを

$$\sum_j r_{pj}{}^l\Big(a_j\sum_{i\neq l}\sum_k r_{kj}{}^i x_k{}^i+b_j\Big)=w_p{}^l \cdots\cdots (9)$$

とおく。$e_{pk}{}^l$, $w_p{}^l$ を用いると，式 (7) は次のように表わされる。

$$t_p{}^l=\sum_k e_{pk}{}^l x_k{}^l+w_p{}^l \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

したがって，ゾーンペアー l について等時間原則にしたがうようなパスフローを得るためには，

$$\left.\begin{array}{l}\sum_p x_p{}^l=S^l\\ \sum_k e_{pk}{}^l x_k{}^l+w_p{}^l=t_0{}^l \quad (x_p{}^l>0)\\ \sum_k e_{pk}{}^l x_k{}^l+w_p{}^l\geqq t_0{}^l \quad (x_p{}^l=0)\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (11)$$

の解 $x_p{}^l$ を求めればよい。

以下式 (11) を解くアルゴリズムについて説明する。以下の説明中ではゾーンペアー l についてという意味の添字 l を省略する。アルゴリズムの原理は，式 (11) の第1式を，

$$\left.\begin{array}{l}\sum_p x_p+z=S\\ z\geqq 0\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

と書きかえ，x_p が式 (12) および式 (11) の第2，第3式を満足するように保ちながら，z の値を S から逐次小さくして最後に0とすることである。

いま，$z=z^*$, $x_p=x_p{}^*$ $(p=1,2,\cdots,n)$ のとき，次の式 (13) が成り立つものとする。

$$\left.\begin{array}{l}\sum_p x_p{}^*+z^*=S\\ \sum_k e_{pk}x_k{}^*+w_p=t_0{}^*,\ x_p{}^*\geqq 0 \quad (p\in\mathfrak{A})\\ \sum_k e_{pk}x_k{}^*+w_p\geqq t_0{}^*,\ x_p{}^*=0 \quad (p\bar{\in}\mathfrak{A})\end{array}\right\} \cdots (13)$$

ここに，$\mathfrak{A}$ は集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ の部分集合である。

ここで，

$$\left.\begin{array}{ll}x_p=x_p{}^*+\Delta x_p & \\ z=z^*-\Delta z & (0\leqq\Delta z\leqq z^*)\\ t_0=t_0{}^*+\Delta t_0 & \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

とするとき，

$$\left.\begin{array}{l}\sum_p x_p+z=S\\ \sum_k e_{pk}x_k+w_p=t_0,\ x_p\geqq 0 \quad (p\in\mathfrak{A})\\ \sum_k e_{pk}x_k+w_p\geqq t_0,\ x_p=0 \quad (p\bar{\in}\mathfrak{A})\end{array}\right\} \cdots\cdots (15)$$

が成り立つような Δx_p, Δz, Δt_0 の範囲を求める。

式 (14) を式 (15) に代入すると，

$$\sum_p x_p{}^*+\sum_p\Delta x_p+z^*-\Delta z=S$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_k e_{pk}x_k{}^*+w_p+\sum_k e_{pk}\Delta x_k=t_0{}^*+\Delta t_0\\ x_p{}^*+\Delta x_p\geqq 0\end{array}\right\} (p\in\mathfrak{A})$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_k e_{pk}x_k{}^*+w_p+\sum_k e_{pk}\Delta x_k\geqq t_0{}^*+\Delta t_0\\ x_p{}^*+\Delta x_p=0\end{array}\right\} (p\bar{\in}\mathfrak{A})$$

となる。上式は式 (13) より，

$$\left.\begin{array}{l}\sum_p \Delta x_p-\Delta z=0\\ \sum_k e_{pk}\Delta x_k=\Delta t_0,\ x_p^*+\Delta x_p\geqq 0\ (p\in\mathfrak{A})\\ \sum_k e_{pk}x_k^*+w_p+\sum_k e_{pk}\Delta x_k\geqq t_0^*+\Delta t_0,\ \Delta x_p=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (p\bar{\in}\mathfrak{A})\end{array}\right\}\cdots\cdots(16)$$

となる。

式 (16) の第 2，第5式より，

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta x_p=\Delta t_0\xi_p & (p\in\mathfrak{A})\\ \Delta x_p=0 & (p\bar{\in}\mathfrak{A})\end{array}\right\}\cdots\cdots(17)$$

を得る。ここに ξ_p は連立一次方程式

$$\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_k=1\ (p\in\mathfrak{A})\cdots\cdots(18)$$

の解である。式 (8) より明らかに行列 $E=[e_{pk}]$ は正値行列であり，方程式 (18) は解をもつ。式 (18) より，

$$\sum_{p\in\mathfrak{A}}\xi_p=\sum_{p\in\mathfrak{A}}\xi_p\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_k=\sum_{p\in\mathfrak{A}}\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_p\xi_k$$

となるが，E は正値行列であるということより上式の右辺は正である。したがって次式を得る。

$$\sum_{p\in\mathfrak{A}}\xi_p>0\cdots\cdots(19)$$

式 (17) を式 (16) の第1式に代入すると，

$$\Delta z=\Delta t_0\cdot\sum_{p\in\mathfrak{A}}\xi_p\cdots\cdots(20)$$

となるから，式 (14) より

$$0\leqq\Delta t_0\leqq\frac{z^*}{\sum_{p\in\mathfrak{A}}\xi_p}\cdots\cdots(21)$$

でなければならない。

次に式 (17) を式 (16) の第3式に代入すると，

$$x_p^*+\Delta t_0\xi_p\geqq 0$$

となる。上式は $\xi_p\geqq 0$ となる p については常に成り立つから，上式の成り立つ Δt_0 の範囲は，

$$\Delta t_0\leqq-\frac{x_p^*}{\xi_p},\ (\xi_p<0)\cdots\cdots(22)$$

である。

さらに式 (17) を式 (16) の第4式に代入すると，

$$\sum_k e_{pk}x_k^*+w_p+\Delta t_0\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_k\geqq t_0^*+\Delta t_0$$

となる。上式は $\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_k\geqq 1$ となる p については常に成り立つから，上式の成り立つ Δt_0 の範囲は，

$$\Delta t_0\leqq\frac{\sum_k e_{pk}x_k^*+w_p-t_0^*}{1-\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_k},\ (\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_k<1)\cdots\cdots(23)$$

である。

以上をまとめると，式 (14) により与えられる x_p, z, t_0 が式 (15) を満足するためには，方程式 (18) により与えられる $\xi_p(p\in\mathfrak{A})$ に対して，

$$0\leqq\Delta t_0\leqq\min(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$$

であればよいことになる。ここに，

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1=\dfrac{z^*}{\sum_{p\in\mathfrak{A}}\xi_p}\\ \theta_2=\min\limits_{\xi_p<0,\,p\in\mathfrak{A}}-\dfrac{x_p^*}{\xi_p}\\ \theta_3=\min\limits_{\substack{\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_k<1\\ p\bar{\in}\mathfrak{A}}}\dfrac{\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}x_k^*+w_p-t_0^*}{1-\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{pk}\xi_k}\end{array}\right\}\cdots\cdots(24)$$

である。

いま，

$$\theta=\min(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\cdots\cdots(25)$$

とおくと，z は

$$\Delta t_0=\theta$$

に対して最も小さくなり，しかも

$$z=z^*-\Delta z=z^*-\theta\sum_{p\in\mathfrak{A}}\xi_p\leqq z^*\cdots\cdots(26)$$

である。ここで，

$$\theta=\theta_1\cdots\cdots(27)$$

のときには，

$$z=0$$

となり，

$$\left.\begin{array}{ll}x_p=x_p^*+\theta\xi_p & (p\in\mathfrak{A})\\ x_p=0 & (p\bar{\in}\mathfrak{A})\end{array}\right\}\cdots\cdots(28)$$

はもとの式 (11) の解である。

$$\theta=\theta_2=-\frac{x_\varphi^*}{\xi_\varphi}\cdots\cdots(29)$$

のときには，

$$x_\varphi=x_\varphi^*+\Delta x_\varphi=x_\varphi^*+\theta\xi_\varphi=0$$

である。そこで $\mathfrak{A}-\{\varphi\}$ を新しく $\mathfrak{A}$ とし，式 (28) の右辺を新しく x_p^* として同様の計算を行なっていけばよい。

$$\theta=\theta_3=\frac{\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{\varphi k}x_k^*+w_\varphi-t_0^*}{1-\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{\varphi k}\xi_k}\cdots\cdots(30)$$

のときには，

$$\sum_{k\in\mathfrak{A}}e_{\varphi k}x_k^*+w_\varphi=t_0$$

であるから，$\mathfrak{A}\cup\{\varphi\}$ を新しく $\mathfrak{A}$ とし，式 (28) の右辺を新しく x_p^* として同様の計算を行なっていけばよい。

いずれにしても，各ステップで z は単調に減少していくから，最後にはもとの方程式の解にいたる。

最初のステップでは $\min\limits_p w_p$ を与える p を $\mathfrak{A}$ とし，

$$\left.\begin{array}{ll}x_p^*=0 & (\text{すべての }p)\\ z^*=S & \\ t_0=\min\limits_p w_p &\end{array}\right\}\cdots\cdots(31)$$

とすればよい。

以上のアルゴリズムをまとめると次のようになる。

(i)　最初の x_p^*, z^*, t_0, $\mathfrak{A}$ を決める。

(ii)　方程式 (18) の解を求める。

(iii) $\theta=\min(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を決める。

(iv) 式 (27) が成り立つときは式 (28) により与えられる x_p がもとの方程式の解である。

(v) 式 (29) あるいは式 (30) が成り立つときには式 (28) の右辺を新しく x_p^* とし，$\mathfrak{A}$ を組みかえて，(ii) にもどる。

このアルゴリズムの主要な計算は，連立一次方程式 (18) の解を求めることであるが，各ステップでそれぞれ直接にこの方程式を解く必要はない。行列 $E=[e_{pk}]$ は各ステップで1つずつ行と列を付加あるいは削除したものとなるから，前のステップでの逆行列が求まっておれば当該ステップの逆行列は分割法[6]により容易に計算することができる。このようにして求まる逆行列から式 (18) の解が計算できる。

4. 配分計算の手順と計算例

前節ではある特定のゾーンペアーにのみ着目し，そのゾーンペアーに関して等時間原則にしたがうパスフローを求めるアルゴリズムについて述べた。その際，他のゾーンペアーのパスフローはすべて固定して考えた。本節では前節で述べたアルゴリズムを用いて配分計算を行なう手順を説明する。

配分計算の原理は，順次ゾーンペアーを遷移し，各繰返しごとに最短経路探索によって求められた新しい経路を付加して，そのゾーンペアーについて等時間原則にしたがうようなパスフローを求めるということである。その手順は次のようである。

(i) ゼロフロー時の所要時間を用いて，すべてのゾーン間の最短経路探索を行なう。

(ii) 各起終点交通量をゼロフロー時の最短経路に予備配分する。

(iii) 配分計算を行なう際のゾーンペアーの順序を決める。

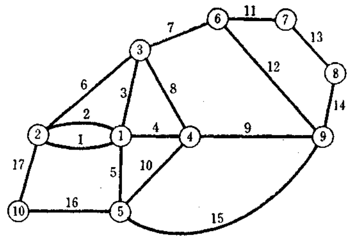
(iv) 着目するゾーンペアーについて起終点間の最短経路探索を行なう。最短経路は各ゾーンペアーごとに記憶される。

(v) 着目するゾーンペアーに関する配分交通量を各リンクから除去する。

(vi) 着目するゾーンペアーの起終点交通量を，記憶されているすべての経路に等時間原則にしたがうように配分する。

(vii) (iii) の順序にしたがって，(iv), (v), (vi) の計算をすべてのゾーンペアーについて行なう。

(viii) (iv)～(vii) の計算をリンク交通量が収束する



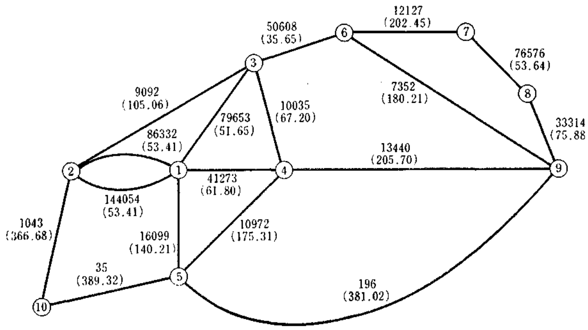
図—2 配分対象道路網

表—2 走行時間関数の定数

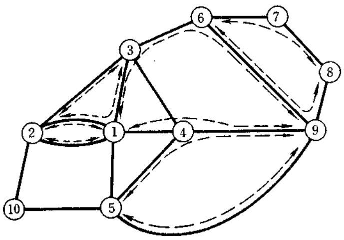
リンク j	a_j (分/台)	b_j (分)
1	0.00023177	20.025
2	0.00037109	21.375
3	0.00037630	21.675
4	0.00062500	36.000
5	0.00459722	66.200
6	0.00447222	64.400
7	0.00032943	18.975
8	0.00275000	39.600
9	0.00738889	106.400
10	0.00690972	99.500
11	0.00763194	109.900
12	0.00828472	119.300
13	0.00039974	23.025
14	0.00083464	48.075
15	0.02610417	375.900
16	0.00341667	389.200
17	0.00496528	361.500

表—1 OD 表 (単位 台)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ノード
—	218 109	53 940	37 095	14 188	7 763	1 393	6 248	3 000	480	1
	—	14 134	2 011	1 111	1 042	459	1 445	549	425	2
		—	9 310	396	27 169	478	854	1 152	45	3
			—	2 354	602	123	284	2 403	32	4
				—	271	134	399	8 415	35	5
					—	2 559	1 245	1 925	12	6
						—	66 648	2 958	11	7
							—	26 822	29	8
								—	9	9
									—	10



図―3 各リンクの配分交通量（台）と所要時間（（ ）内，分）



図―4 等時間のフローパターン

表―3 各計算ステップでの配分交通量（単位 台）

リンク番号	1	2	3
予 備 配 分	239 478.0	0.0	87 721.0
繰 返 し 1	140 638.3	89 827.8	79 398.0
〃 2	144 020.5	86 363.2	79 663.9
〃 3	144 053.4	86 332.3	79 658.0
〃 4	144 053.6	86 332.4	79 653.7
〃 5	144 053.6	86 332.5	79 653.3
〃 10	144 053.6	86 332.5	79 653.2

まで続ける。

手順（iii）の配分計算を行なう際のゾーンペアーの順序については，0 フロー時における走行時間の短い順とするのがよいようである。なぜなら，こうすることによって新しく求まる経路の数が少なくなり，収束性も他の順序にくらべていくぶんよくなるからである。

以上に述べた方法で実際に計算を行なってみた。配分対象道路網は **図―2** に示しており，ノード数は 10，リンク数は 17 である。また 45 ゾーンペアーに対する OD 交通量を **表―1** に，各リンクの走行時間関数の定数値を **表―2** に示す。

この計算例では，5 回の繰返しによってすべてのリンクにおける配分交通量の変動が 1 台以下になった。求まった各リンクの配分交通量と走行時間は **図―3** に示すとおりである。また，独立な等時間のパターンは 5 つ表われており，それを **図―4** に示す。計算の収束状況を示すために，3 つのリンクの各計算ステップでの配分交通量の値を **表―3** に示している。本計算は京都大学大型計算機センターの FACOM 230-60 によるものであり，繰返し 5 回までの計算時間（CPU 使用時間）は 11.637 秒であった。

5. あとがき

パスフローを変数として線形走行時間関数を用い，等時間原則による交通量配分計算法を述べてきた。実際の交通量配分計算では道路網が複雑になるため計算に多くの時間を要する。したがって必要とされる精度に応じて計算量を加減することができ，しかも計算が途中で打ち切られた場合でも近似値が求まっていると都合がよい。本計算法ではこれらの要求は満たされており，計算例からもわかるとおり収束性についても非常に良好である。

今後の課題として，走行時間関数が非線形の場合の計算法の確立，求まった区間交通量をもとにしたパスフローの推定などが残されている。

最後に本計算を行なうにあたりご討議をいただいた京都大学 米谷栄二教授，同 明神 証助教授，金沢大学 飯田恭敬助教授に対し深謝の意を表わします。

参 考 文 献

1) Wardrop, J.G. : Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, pp. 325～378, 1952.

2) 佐佐木 綱：道路網における交通量の配分方法，日本地域学会年報，第 2 号，pp. 19～34, 1963.

3) Jφrgensen, N.O. : Some Aspects of the Urban Traffic Assignment Problem, Graduate Report, ITTE, University of California Berkeley, 1963.

4) 飯田恭敬：パスフローを用いた等時間原則による交通量配分，土木学会論文報告集，第 168 号，pp. 45～57, 1969.

5) 飯田恭敬・井上博司・魚住隆彰：カット法による交通量配分，土木学会論文報告集，第 196 号，pp. 95～103, 1971.

6) 古屋 茂：行列と行列式，培風館，pp. 62～65, 1959.

（1972.9.1・受付）