

こう配法による機械化土工・工程計画管理の最適化

OPTIMIZATION OF SCHEDULING AND CONTROL FOR EARTH MOVING BY A GRADIENT TECHNIQUE

庄子幹雄*・荒井克彦**
By Mikio Shoji and Katsuhiko Arai

1. まえがき

建設工事の大規模化、複雑化に伴い施工計画管理業務の合理化が重要な課題とされてきた。施工計画管理業務の合理化においては、業務担当者が正確な意志決定を行なえるように、最適性の定量的評価に基づく判断資料を提供することが基本的目標である。この考え方に基いて筆者らは先に、機械化土工における工程計画管理最適化問題の定式化に関する報告を行なったが¹⁾²⁾、本報では先に定式化された工程計画管理最適化問題を具体的に解くことを試みる。初めに機械化土工工事を対象とする工程計画管理最適化問題の定式化と、その組織的な計算手順に関する要約を与える。この定式化は最適制御理論の適用を意図したものである。そこで、まず最適制御理論における各手法の適用可能性について検討する。そして実際にはこう配法の適用が有用であることから、こう配法を用いた数値計算法および計算結果について詳述する。

2. 問題の定式化 (要約)

(1) 定式化の準備

機械化土工工事を対象として、筆者らが先に定式化した工程計画管理最適化問題は以下のように要約される。ただし本報では定式化に関する詳細な説明を省略する²⁾。

a) 工程の表現

工期単位 $4T$ (日)を選び、工期 T を図-1 に示す

* 鹿島建設(株)技術研究所主任研究員
** 正会員 工修 鹿島建設(株)技術研究所企画調査室

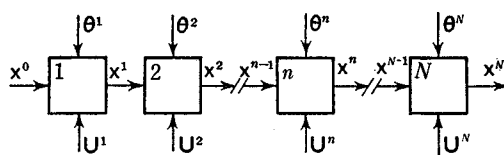


図-1

多段決定過程モデルを用いて N 個のステージ (Stage) で表わす。

$$T = 4T \cdot N \dots \dots \dots (1)$$

本報の例では、 $4T=5$ 日、 $N=30$ ステージとする。

b) オペレーションとアクティビティの設定²⁾

工事をオペレーション (Operation) の集合として表わし、また工程上の順序関係の制約を表わせるようにオペレーションを適当なアクティビティ (Activity) に分

表-1

オペレーション				アクティビティ			
No. (I)	名称	数量 (TOQ)	単位	No. (J)	名称	数量 (TQ _J)	先行アクティビティ
1	伐 開 除 根	60,900	m ²	1	伐 開 除 根	60,900	
2	ブルワーク 50m	288,224	m ³	2	ブルワーク 50m A	156,661	1
				3	" B	131,563	1
3	キャリワーク 100m	161,444	"	4	キャリワーク 100m A	97,903	2, 3
				5	" B	63,541	2, 3
4	キャリワーク 150m	135,101	"	6	キャリワーク 150m A	6,658	4
				7	" B	128,443	5
5	キャリワーク 200m	56,543	"	8	キャリワーク 200m	56,543	6

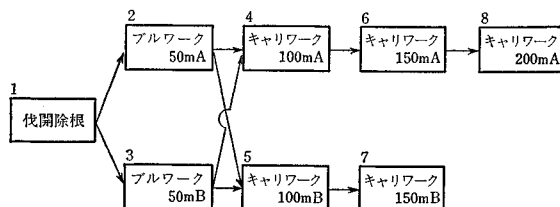


図-2

表-2

No. (i)	資源名称	固定費用 (RCD _i)	稼働費用 (RCH _i)	搬入費用 (RCIM _i)	搬出費用 (RCEX _i)	利用可能 最大数量 (QMAX _i)
		円/日	円/時間	円/回	円/回	
1	ブルドーザ D-80	11,600	5,020	107,600	107,600	10
2	ブルドーザ D-8-36 A	24,000	9,000	120,000	120,000	10
3	ブルドーザ D-8-46 A	35,200	10,880	131,200	131,200	10
4	ブルドーザ D-8-36 AC	30,400	6,920	126,400	126,400	10
5	スクレーパ 18	13,200	700	80,000	80,000	10
6	ブルドーザ D-8-46 AC	41,000	8,700	137,000	137,000	10
7	スクレーパ 22	14,800	700	80,000	80,000	10

ープ (Resource Group) を定義する。 QR_{ik} : 資源グループ k における資源 i の資源数量, UR_{ik} : 稼働時間率, 他作業との共用可能性。具体例を表-3に示す。

e) 作業グループの定義^{2),3)}

資源グループの集合として、次のパラメータを用いて作業グループ (Operation Group) を定義する。

QR_{kl} : 作業グループ l における資源グループ k の数量 (比), 作業グループの比例・固定型指定。具体例を表-4に示す。また以上の要素の関係を 図-3 に示す。

f) 環境条件データの設定²⁾

以下のデータを環境条件として与える。 WH_j^n : 第 n ステージ・アクティビティ j における1作業グループ・時間当たり作業能力, $VMAX_j^n$: $n \cdot j$ における最大投入

割する。

$$TOQ_l = \sum_{j \in A_l} TQ_j \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 TOQ_l : オペレーション l の総作業数量, TQ_j : アクティビティ j の総作業数量, A_l : オペレーション l に属するアクティビティの集合, とする。具体例を表-1, 図-2に示す。

c) 資源に関するデータの設定²⁾

各資源 (Resource) i ごとに以下のデータを与える。

RCD_i : 固定費用 (円/日), RCH_i : 稼働費用 (円/時間), $RCIM_i$: 搬入費用 (円/回), $RCEX_i$: 搬出費用 (円/回), $QMAX_i$: 利用可能最大数。具体例を表-2に示す。

d) 資源グループの定義^{2),3)}

資源の集合として、次のパラメータを用いて資源グループ

表-4

No. (l)	作業グループ名称	資源グループ名称	資源グループ数量 (QR _{kl})	比例型 固定型
1	伐 開 除 根	A	1.0	比 例
2	ブルワーク 50m	B	1.0	〃
3	キャリワーク 100m	C	1.0	〃
		D	0.9	〃
4	キャリワーク 150m	C	1.0	〃
		D	0.8	〃
5	キャリワーク 200m	C	1.0	〃
		D	0.7	〃

表-3

No. (k)	資源グループ名称	資源名	資源数量 (QR _{ik})	稼働率 (UR _{ik})	共用 可能性
1	A	ブルドーザ D-80	1.0	1.0	可
		ブルドーザ D-8-36 A	1.0	1.0	〃
2	B	ブルドーザ D-80	1.0	0.8	〃
		ブルドーザ D-8-36 A	1.0	1.0	〃
		ブルドーザ D-8-46 A	1.0	1.0	〃
3	C	ブルドーザ D-8-46 A	1.0	0.5	不可
		ブルドーザ D-8-36 AC	1.0	1.0	〃
		スクレーパ 18	1.0	1.0	〃
		ブルドーザ D-8-46 AC	1.0	1.0	〃
		スクレーパ 22	1.0	1.0	〃
4	D	ブルドーザ D-80	1.0	1.0	可

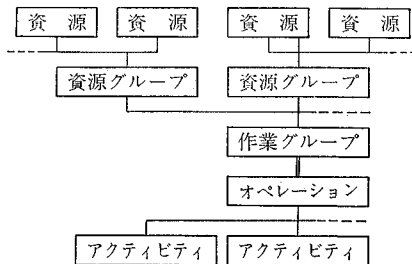


図-3

表-5

No. (j)	アクティビティ名称	1作業グループ時間当り作業能力 (WH _j ⁿ)	最大投入作業グループ数量 (VMAX _j ⁿ)	1日当り実稼働時間 (RH _j ⁿ)	稼働日数率 (UD _j ⁿ) ΔT=5日					
					1月	2月	3月	4月	5月	6月
					n=1~6	7~12	13~18	19~24	25~30	31~36
1	伐 開 除 根	335 (m ² /hr)	5	12 時間	0.68	0.75	0.60	0.62	0.57	0.58
2	ブルワーク 50m A	235 (m ² /hr)	10	12	〃	〃	〃	〃	〃	〃
3	〃 B	235 〃	10	12	〃	〃	〃	〃	〃	〃
4	キャリワーク 100m A	320 〃	10	12	〃	〃	〃	〃	〃	〃
5	〃 B	320 〃	10	12	〃	〃	〃	〃	〃	〃
6	キャリワーク 150m A	268 〃	10	12	〃	〃	〃	〃	〃	〃
7	〃 B	268 〃	10	12	〃	〃	〃	〃	〃	〃
8	キャリワーク 200m	240 〃	10	12	〃	〃	〃	〃	〃	〃

作業グループ数量, $RH_j^n : n \cdot j$ における 1 日当り実稼働時間, $UD_j^n : n \cdot j$ における (月当り) 稼働日数率。具体例を 表-5 に示す。ただし 簡単のため, 本報の例では $WH_j^n, VMAX_j^n, RH_j^n$ が全ステージを通じて一定とする。

g) 見積り計算²⁾

① 環境条件データの平均

$$\left. \begin{aligned} E[WH_l] &= \left[\sum_{j \in A_l} \left\{ \left(\sum_{n=1}^N WH_j^n \right) / N \right\} \right] / NA_l \\ E[RH_l] &= \left[\sum_{j \in A_l} \left\{ \left(\sum_{n=1}^N RH_j^n \right) / N \right\} \right] NA_l \\ E[UD_l] &= \left[\sum_{j \in A_l} \left\{ \left(\sum_{n=1}^N UD_j^n \right) / N \right\} \right] / NA_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで, $E[WH_l]$: オペレーション l の平均 1 作業グループ・時間当り作業能力, $E[RH_l]$: l の 1 日当り実稼働時間, $E[UD_l]$: l の平均 (月当り) 稼働日数率, NA_l : オペレーション l に属するアクティビティの個数。式 (3) はアクティビティ・ステージに関する全平均を意味する。

② 作業グループ l における資源 i の稼働数量

$$WR_{il} = \sum_k (QR_{ik} \cdot UR_{ik} \cdot QRG_{kl}) \dots\dots\dots (4)$$

③ 作業グループ l の 1 作業グループ・時間当り費用

$$COG_l = \sum_i \{ WR_{il} \cdot (RCD_i / E[RH_l] / E[UD_l] + RCH_i) \} \dots\dots\dots (5)$$

④ オペレーション l の作業数量当り単価

$$UOC_l = COG_l / E[WH_l] \dots\dots\dots (6)$$

⑤ 見積り金額

$$CT = \sum_j (UOC_j \cdot TOQ_j) \dots\dots\dots (7)$$

⑥ アクティビティ j の作業数量当り単価

$$UC_j = UOC_l, (j \in A_l) \dots\dots\dots (8)$$

⑦ アクティビティ j の総出来高

$$TC_j = TQ_j \cdot UC_j / CT \cdot 100(\%),$$

$$\sum_j TC_j = 100\% \dots\dots\dots (9)$$

④, ⑥, ⑦ の具体例を 表-6 に示す。

h) 動の見積りの準備²⁾

① 第 n ステージ・アクティビティ j における 1 作業グループ当り出来高

$$W_j^n = WH_j^n \cdot RH_j^n \cdot \Delta T \cdot UD_j^n \cdot UC_j / CT \cdot 100(\%) \dots\dots\dots (10)$$

② 作業グループ l の 1 作業グループ・時間当り稼働費用

$$COH_l = \sum_i (WR_{il} \cdot RCH_i)$$

③ 第 n ステージ・アクティビティ j における 1 作業グループ当り稼働費用

$$CW_j^n = COH_l \cdot RH_j^n \cdot \Delta T \cdot UD_j^n, (j \in A_l) \dots\dots\dots (12)$$

(2) 多段決定過程としての定式化²⁾

a) 操作変数 θ^n

$$\theta^n = \left(\begin{matrix} u^n \\ v^n \end{matrix} \right), \left. \begin{matrix} u^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^T \\ v^n = (v_1^n, \dots, v_L^n)^T \end{matrix} \right\} \dots\dots (13)$$

ここで, u_i^n : 第 n ステージにおける資源 i の搬入 ($u_i^n > 0$) または搬出 ($u_i^n < 0$) 数量, v_j^n : 第 n ステージ・アクティビティ j における作業グループ投入数量, L : 総アクティビティ数, M : 資源総種類数, とする。

b) 状態変数 x^n と状態方程式

$$x^n = \left(\begin{matrix} q^n \\ r^n \\ x_2^n \end{matrix} \right), \left. \begin{matrix} q^n = (q_1^n, \dots, q_M^n)^T \\ r^n = (r_1^n, \dots, r_L^n)^T \end{matrix} \right\} \dots\dots (14)$$

ここで, q_i^n : 第 n ステージにおける資源 i の存置数量, r_j^n : 第 n ステージにおけるアクティビティ j の累積出来高, x_2^n : 第 n ステージにおける全累積費用, とする。

$$q_i^n = q_i^{n-1} + u_i^n, (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (15)$$

注 1) $()^T$: 転置行列を表わす。

表-6

オペレーション				アクティビティ			
No. (i)	名 称	作業数量当り単価 (UOC _i)	単 位	No. (j)	名 称	作業数量当り単価 (UC _j)	総出来高 (TC _j)
1	伐 開 除 根	55.6	円/m ²	1	伐 開 除 根	55.6	3.17 (%)
2	ブルワーク 50m	139.6	円/m ³	2	ブルワーク 50m A	139.6	20.47
				3	” B	139.6	17.20
3	キャリワーク 100m	160.4	”	4	キャリワーク 100m A	160.4	14.69
				5	” B	160.4	9.54
4	キャリワーク 150m	189.0	”	6	キャリワーク 150m A	189.0	1.18
				7	” B	189.0	22.72
5	キャリワーク 200m	208.4	”	8	キャリワーク 200m	208.4	11.03
							100.00 (%)

$$\begin{aligned}
 r_j^n &= r_j^{n-1} + W_j^n \cdot v_j^n, \quad (j=1, \dots, L) \dots\dots(16) \\
 x_2^n &= x_2^{n-1} + \sum_j \{ RCD_j \cdot \Delta T \cdot (q_i^{n-1} + u_i^n) \\
 &\quad + RCIM_i \cdot V[u_i^n] + RCEX_i \cdot V[-u_i^n] \} \\
 &\quad + \sum_j (CW_j^n \cdot v_j^n) \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

ただし、 $V[x]$ を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 V[x] &= x : x > 0 \\
 &= 0 : x \leq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

状態方程式の境界条件

$$\left. \begin{aligned}
 q_i^0 &= 0, \quad (i=1, \dots, M) \\
 r_j^0 &= 0, \quad (j=1, \dots, L) \\
 x_2^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

$$r_j^N = TC_j, \quad (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(20)$$

状態変数ではないが全累積出来高 x_1^n を次式で定義する。

$$x_1^n = x_1^{n-1} + \sum_j (W_j^n \cdot v_j^n) \dots\dots\dots(21)$$

$$x_1^0 = 0, \quad x_1^N = 100(\%) \dots\dots\dots(22)$$

e) 制約条件

$$0 \leq q_i^n \leq QMAX_i, \quad (i=1, \dots, M) \dots\dots(23)$$

$$\sum_j h_{ij} \cdot v_j^n \leq q_i^n, \quad (j \in A_i, i=1, \dots, M) \dots(24)$$

$$0 \leq v_j^n \leq VMAX_j^n, \quad (j=1, \dots, L) \dots\dots(25)$$

$$r_j^n \leq TC_j, \quad (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(26)$$

$$\begin{aligned}
 v_j^n \cdot (r_k^{n-1} - TC_k) &= 0, \quad (k \in P_j, j=1, \dots, L) \\
 &\dots\dots\dots(27)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 h_{il} &= \sum_k (QR_{ik} \cdot UR_{ik} \cdot QRG_{kl}) : \text{共用資源} \\
 &= \sum_k (QR_{ik} \cdot QRG_{kl}) : \text{非共用資源} \\
 &\dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

P_j : アクティビティ j の先行アクティビティの集合とする。式 (23) は存置資源数量の制限 ($QMAX_i$) を与える。式 (24) は稼働資源総数量が存置資源数量を越えないことを意味する。式 (25) は投入作業グループ数量の制限 ($VMAX_j^n$) を与える。式 (26) は各アクティビティの累積出来高が各アクティビティの総出来高を越えないことを意味する。式 (27) はアクティビティの順序関係の制約を表わす。

d) 目的関数

$$J = x_2^N + \sum_j (RCEX_j \cdot q_j^N) \rightarrow \min \dots\dots\dots(29)$$

(3) 数値計算モデル

筆者らが行った数値計算モデルおよび、その数値はすでに 図-2、表-1~6 に示したものである。ただし、この数値計算モデルは架空のものであり、費用、単価などの値が必ずしも妥当ではないことを付言する。

3. 最適制御理論の適用

(1) 最適制御問題 (多段決定過程)^{4)~26)}

変分問題における一形式として、式 (30) の微分方程式 (状態方程式) 制約条件の下で、汎関数である式 (31) の極値を与える操作変数 (Control or Decision Variable) $\theta(t)$ を求める問題が最適制御問題 (Optimal Control Problem) と称される^{4)~26)}。

$$\begin{aligned}
 dx(t)/dt &= f\{x(t), \theta(t), t\}, \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \\
 &\dots\dots\dots(30)
 \end{aligned}$$

$$J = \phi\{x(t_f)\} \rightarrow \min \dots\dots\dots(31)$$

ただし $x(t)$ は状態変数 (State Variable) とする。操作変数としては自由に操作しうる変数、状態変数としては操作変数を通じてのみ操作しうる変数が選ばれる。式 (30) を式 (32) の差分方程式で、式 (31) を式 (33) で置き換えた極値問題が離散型最適制御問題または多段決定過程 (Multi Stage Decision Process) と称され、図-1 で表わされる^{6), 13)~25)}。

$$x^n = f^n(x^{n-1}, \theta^n, n), \quad (n=1, \dots, N) \dots\dots(32)$$

$$J = \phi(x^N) \rightarrow \min \dots\dots\dots(33)$$

$$\text{操作変数} : \theta^n = (\theta_1^n, \dots, \theta_m^n)^T \dots\dots\dots(34)$$

$$\text{状態変数} : x^n = (x_1^n, \dots, x_l^n)^T \dots\dots\dots(35)$$

ただし、本報では工程計画管理の定常最適化を目標としているので、図-1 における外乱 U^n を考慮しない。

状態方程式 (32) 式の境界条件が式 (36), (37) で与えられる。

$$\text{初期条件} : M(x^0) = 0 \dots\dots\dots(36)$$

$$\text{終端条件} : N(x^N) = 0 \dots\dots\dots(37)$$

現実の問題には境界条件の他に次のような制約条件が存在する場合が多い。

$$C^n(\theta^n) \leq 0 \dots\dots\dots(38)$$

$$g^n(x^{n-1}, \theta^n) \leq 0 \dots\dots\dots(39)$$

$$h^n(x^{n-1}, \theta^n) = 0 \dots\dots\dots(40)$$

これらのうち、式 (38) のように操作変数のみから成る制約条件を処理することは容易であるが、式 (39), (40) のように状態変数を含む制約条件を持つ場合は、最適制御理論における解析が困難な問題の1つとされている^{9), 12)~21), 24)}。

(2) 各手法の適用可能性について

離散型最適制御問題に対する最適化手法としては離散型最大原理 (Discrete Maximum Principle; DM P)^{6), 12)~17)} ダイナミック・プログラミング (Dynamic Programming; DP)⁴²⁾、こう配法 (Gradient Technique)^{13)~23)} などがある。これらの手法の詳細については

省略するが、対象である問題の特性に応じて適用する手法を選択する必要がある²⁵⁾。

a) 離散型最大原理 (DMP)⁶⁾~²⁹⁾

DMP は最適操作変数 θ^n に対して、後出の式 (41)~(44) で定義されるハミルトニアン (Hamiltonian) H^n が各ステージで停留値をとる必要があることを保証する。筆者らが定式化した工程計画管理最適化問題については、状態方程式、目的関数の形から、ハミルトニアンが各ステージで最小値をとることが十分条件にもなる強最大原理を適用しうる可能性も残されている^{17), 28), 29)}。しかし連続型の場合と異なり、状態変数制約問題に対する処理は実際に計算を行なうことが困難である^{14), 17)}。さらに、工程計画管理最適化問題のように状態変数の個数が多い場合には、DMP の難点である 2 点境界値問題に関する計算を実行することが困難である。

b) ダイナミック・プログラミング (DP)⁴²⁾

DP は状態変数制約条件を含む最適制御問題に対しても有用であり、また DMP におけるような 2 点境界値問題を避けることができる。しかし工程計画管理最適化問題のように状態変数の個数が多い場合は、記憶容量などの制約により計算を行なうことが困難である。ただし、操作変数、状態変数の選定にくふうを加えることにより、工程計画管理最適化問題に DP を適用しうる可能性が残されているが本報では省略する⁶³⁾。

c) こう配法 (こう配関数法)^{13)~23), 44~54)}

最適制御理論における変分問題に対するこう配法 (こう配関数法) は変数空間におけるこう配法を関数空間に拡張したものである。こう配法の計算手順が簡単であり、DMP における 2 点境界値問題を避けることができるから、最適制御問題の数値解を求めるための主要な方法である。また、数理計画法の分野で発展したこう配法、線形計画法などの最適化手法との関係から、最適制御理論と数理計画法が本質的に異なるものではないという見方も多数報告されている^{18)~21)}。変数空間におけるこう配法としては、1 階収束こう配法、2 階収束こう配法、2 次収束こう配法 (共役こう配法その他) など多数の手法が提案されているが^{30)~39)}、これらの手法を関数空間に拡張して最適制御問題に適用する方法についても多くの成果が得られている。関数空間における各種のこう配法も、それぞれの利点・欠点を有するから問題ごとに適用する手法の検討が必要である。2 階収束こう配法は最適点付近での収束性の良い反面、1 回の試行ごとに逆行列を計算しなければならないため、工程計画管理最適化問題のように操作変数の個数が多い場合は適用が困難である^{15)~19)}。2 次収束こう配法は 2 階収束こう配法における上述の欠点を除くことができるが、式 (38) のような操作変数に関する制約条件を単純に処理できないなどの

難点が残されている^{53), 54)}。1 階収束こう配法は最適点付近での収束速度が遅くなることから全体の収束が遅くなるという難点があるが、2 階、2 次収束こう配法における上述の欠点を持たず、また境界条件の処理に関する方法が提案されており^{14)~17), 46), 50)}、計算手順が簡単であるなどの利点をもつ一般的な手法である。そこで本報では 1 階収束こう配法 (以下ではこう配法と略) を採用し、次節以下でその詳細を述べる。

(3) こう配法 (こう配関数法)

a) こう配関数

ハミルトニアン H^n を次式で定義する。

$$H^n = (z^n)^T \cdot x^n = \sum_j (z_j^n \cdot x_j^n) \dots\dots\dots (41)$$

$$z^n = (z_1^n, \dots, z_l^n)^T \dots\dots\dots (42)$$

$$z_j^{n-1} = \partial H^n / \partial x_j^{n-1}, (j=1, \dots, l) \dots\dots\dots (43)$$

$$z_j^N = \partial J / \partial x_j^N, (j=1, \dots, l) \dots\dots\dots (44)$$

ここで、 z^n : 共変変数 (Covariant Variable) とする。

こう配関数 ($\partial H^n / \partial \theta^n$) を次式で定義する。

$$\partial H^n / \partial \theta^n = (\partial H^n / \partial \theta_1^n, \dots, \partial H^n / \partial \theta_m^n)^T \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{\partial H^n}{\partial \theta_i^n} = \frac{\partial}{\partial \theta_i^n} \sum_j (z_j^n \cdot x_j^n) \quad (i=1, \dots, m) \dots\dots\dots (46)$$

b) 計算手順 (最小値を求める場合)

- ① 操作変数 θ^n の初期値 θ_0^n を仮定する。
- ② 式 (36), (32) から x_k^n を求める。
- ③ 式 (44) の境界条件を用いて式 (43) を逆向きに計算して z_k^n を求める。
- ④ こう配関数 ($\partial H_k^n / \partial \theta_k^n$) を求める。
- ⑤ 次式により θ_k^n を修正する。

$$\theta_{k+1}^n = \theta_k^n + \Delta \theta_k^n = \theta_k^n - \alpha_k \cdot (\partial H_k^n / \partial \theta_k^n) \dots\dots\dots (47)$$

- ⑥ 計算停止基準を満たすまで②~⑤を繰返す。

ただし式 (47) における比例定数 α_k の選択方法により最急降下法 (Steepest Decent Method), 単純降下法 (Simple Decent Method) などに分けられる^{13), 30)~39)}。

c) 状態変数制約条件の処理

1 階収束こう配法を利用する場合、式 (38) のように操作変数のみから成る制約条件については修正こう配関数の概念を利用するか⁴⁾、あるいは単純に式 (47) で求められた新しい試行値が境界値を越える場合はその境界値をとることにすればよい^{44)~54)}。しかし、制約条件式が状態変数を含む場合には共変変数 z^n の跳躍 (jump) 現象のため解析的な処理が困難である^{9), 17)}。連続型最適制御問題については状態変数制約問題に関して種々の報告がなされているが^{55)~57)}、離散型についてはペナルティ関数法以外に一般的な計算方法が提案されていない^{14)~20)}。そこで式 (39) に相当する式 (23), (24), (26) につ

いてはすべてペナルティ関数法,より具体的には SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) を利用する⁴¹⁾。最適制御問題における SUMT も変数空間における SUMT を関数空間に拡張したものであり,変数空間におけるのと同様に外点法 (Exterior Point Method) と内点法 (Interior Point Method) があるが,本報ではより基本的な外点法を利用する^{41),44)~52)}。

外点法では式 (39),(40) の制約条件式を次のように式 (33) の目的関数に含めて,制約条件のない修正目的関数 J_{EXP} に関する最適化問題を解く。

$$J_{EXP} = \phi(x^N) + \lambda_k \cdot \sum_{n=1}^N [\sum_j \{g_j^n(x^{n-1}, \theta^n)\}^2 \cdot H[g_j^n(x^{n-1}, \theta^n)]] + \sum_j \{h_j^n(x^{n-1}, \theta^n)\}^2 \rightarrow \min \dots\dots\dots (48)$$

ここで, $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ なるパラメータとし, $\lambda_k \rightarrow \infty$ のとき制約条件を満たす真の最適解が得られる⁵⁸⁾。ただし, $H[x]$ は Heaviside の階段関数とする。

$$H[x] = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (49)$$

d) 境界条件の処理

工程計画管理最適化問題は式 (21) に示されるような終端拘束条件をもつ。終端拘束条件の処理については Kelley による方法と Bryson・Denham による方法が一般的である。

① Kelley の方法^{15),49)} : 終端条件式 (37) を c) で述べた状態変数の等式制約条件とみなしてペナルティ関数法を適用する。

② Bryson・Denham の方法^{14)~17),46),50)} : この方法は連続型最適制御問題に対して考察されたものであるが,ここでは離散型に書き換えて計算のアルゴリズムのみ引用する¹⁷⁾。

イ) 操作変数 θ^n の初期値 θ_0^n を仮定する。

ロ) 式 (36),(32) から x_k^n を求める。

ハ) 式 (44),(43) から z_k^n を求める。

ニ) 式 (50) の境界条件を用いて,式 (51) を逆向きに計算して ZN_k^n を求める。

$$[ZN^N]^T = \partial N(x^N) / \partial x^N \dots\dots\dots (50)$$

$$ZN^{n-1} = \partial (HN^n)^T / \partial x^{n-1} \dots\dots\dots (51)$$

$$HN^n = (ZN^n)^T \cdot x^n \dots\dots\dots (52)$$

【ホ) $\partial H_k^n / \partial \theta_k^n$ を計算する。

へ) $\partial (HN_k^n)^T / \partial \theta_k^n$ を計算する。

ト) 次の定数を求める。

$$\left. \begin{aligned} I_{\phi\phi} &= \sum_{n=1}^N \{(\partial H^n / \partial \theta^n)^T \cdot (\partial H^n / \partial \theta^n)\} \\ I_{N\phi} &= \sum_{n=1}^N \{[\partial (HN^n)^T / \partial \theta^n]^T \cdot (\partial H^n / \partial \theta^n)\} \\ I_{NN} &= \sum_{n=1}^N \{[\partial (HN^n)^T / \partial \theta^n]^T \cdot \partial (HN^n)^T / \partial \theta^n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

チ) $N(x^N)$ を計算し次式により ΔN を求める。

$$\Delta N = -N(x^N) \dots\dots\dots (54)$$

リ) Δp の値を適当に設定する。

$$(\Delta p)^2 = \sum_{n=1}^N (\Delta \theta^n)^T \cdot \Delta \theta^n \dots\dots\dots (55)$$

ヌ) $S = (\Delta p)^2 - \Delta N^T \cdot I_{NN}^{-1} \cdot \Delta N$ を計算し, $S < 0$ の場合は $S=0$ となるように ΔN を減少させる。

ル) 次式により $\Delta \theta^n$ を求める。

$$\Delta \theta^n = - \left\{ \frac{\partial H^n}{\partial \theta^n} - \frac{\partial (HN^n)^T}{\partial \theta^n} \cdot I_{NN}^{-1} \cdot I_{N\phi} \right\} \cdot \left\{ \frac{(\Delta p)^2 - \Delta N^T \cdot I_{NN}^{-1} \cdot \Delta N}{I_{\phi\phi} - I_{N\phi}^T \cdot I_{NN}^{-1} \cdot I_{N\phi}} \right\}^{1/2} + \frac{\partial (HN^n)^T}{\partial \theta^n} \cdot I_{NN}^{-1} \cdot \Delta N \dots\dots\dots (56)$$

オ) 次式により θ_k^n を修正する。

$$\theta_{k+1}^n = \theta_k^n + \Delta \theta_k^n \dots\dots\dots (57)$$

ワ) 計算停止基準を満たすまでロ)~オ)を繰返す。

4. こう配法による最適化

(1) Kelley の方法の適用^{49),59)~65)}

a) こう配法の適用

① 状態変数と状態方程式:式 (39),(40) を目的関数に組み込むために次の状態変数と状態方程式を新たに導入する。

$$PI^n = PI^{n-1} + \sum_i \{W[q_i^{n-1} + u_i^n - QMAX_i] + W[-q_i^{n-1} - u_i^n] + W[\sum_j (h_{ij} \cdot v_j^n - q_i^{n-1} - u_i^n)]\} + \sum_j \{W[r_j^{n-1} + W_j^n \cdot v_j^n - TC_j]\} \dots\dots\dots (58)$$

$$PE^n = PE^{n-1} + \sum_j \{(v_j^n)^2 \cdot \sum_{k \in P_j} (r_k^{n-1} - TC_k)^2\} \dots\dots\dots (59)$$

$$PE^0 = PI^0 = 0 \dots\dots\dots (60)$$

ここで, PI^n, PE^n がそれぞれ不等式,等式制約条件に対するペナルティ項に相当する。また $W[x] = x^2 \cdot H[x]$ とする。次に,外点法において q_i^n が極端な負値をとり最適解から大きくはずれるのを防ぐために,式 (17) を次式のように変換する。

$$x_2^n = x_2^{n-1} + \sum_j \{RCD_j \cdot \Delta T \cdot V[q_i^{n-1} + u_i^n] + RCIM_i \cdot V[u_i^n] + RCEX_i \cdot V[-u_i^n]\} + \sum_j (CW_j^n \cdot v_j^n) \dots\dots\dots (61)$$

② 修正目的関数:式 (29) を次式のように変換し,かつ外点法におけるペナルティ項を加える。

$$J_{EXP} = x_2^N + \sum_i (RCEX_i \cdot V[q_i^N]) + \lambda_1 \cdot PI^N + \lambda_2 \cdot PE^N + \lambda_3 \cdot \sum_j \{(r_j^N - TC_j)^2\} \rightarrow \min \dots\dots\dots (62)$$

ただし、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ はそれぞれのペナルティ項に対するペナルティ係数とする。

式 (61), (62) において、式 (18) で定義した $V[x]$ を用いる q_i^n に関する変換は数値計算において重要である。つまり資源存置数量 q_i^n の負の値は意味をもたないにもかかわらず、式 (17), (29) のままでは q_i^n が負になると目的関数 J が減少するため、式 (62) におけるペナルティ係数 λ_1 が小さいときは q_i^n が極端な負値をとる。したがって、式 (61), (62) のように目的関数において q_i^n の負値を評価しないことは、ペナルティ係数 λ_1 をより有効に評価することになり数値計算上効果的な処置である。

③ ハミルトニアン $H^n, (n=1, \dots, N)$

$$H^n = \sum_i (z_{q_i}^n \cdot q_i^n) + \sum_j (z_{r_j}^n \cdot r_j^n) + z_{x_2}^n \cdot x_2^n + z_{PI}^n \cdot PI^n + z_{PE}^n \cdot PE^n \dots\dots\dots (63)$$

④ 共変変数 $z^n, (n=1, \dots, N)$
 $z_{x_2}^n = 1, z_{PI}^n = \lambda_1, z_{PE}^n = \lambda_2 \dots\dots\dots (64)$

$$z_{q_i}^N = \partial J_{EXP} / \partial q_i^N = H[q_i^N] \cdot RC EX_i, (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (65)$$

$$z_{q_i}^{n-1} = \partial H^n / \partial q_i^{n-1} = z_{q_i}^n + RCD_i \cdot \Delta T \cdot H[q_i^{n-1} + u_i^n] + 2 \lambda_1 \cdot \{V[q_i^{n-1} + u_i^n] - QMAX_i\} - V[-q_i^{n-1} - u_i^n] - V[\sum_j (h_{ij} \cdot v_j^n) - q_i^{n-1} - u_i^n], (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (66)$$

$$z_{r_j}^N = \partial J_{EXP} / \partial r_j^N = 2 \lambda_3 \cdot (r_j^N - TC_j), (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots (67)$$

$$z_{r_j}^{n-1} = \partial H^n / \partial r_j^{n-1} = z_{r_j}^n + 2 \lambda_1 \cdot V[r_j^{n-1} + W_j^n \cdot v_j^n - TC_j] + 2 \lambda_2 \cdot (r_j^{n-1} - TC_j) \cdot \sum_{k \in S_j} (v_k^n)^2, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots (68)$$

ただし、 S_j : アクティビティ j の後続アクティビティの集合とする。

⑤ こう配関数 $\partial H^n / \partial \theta^n, (n=1, \dots, N)$

$$\partial H^n / \partial u_i^n = z_{q_i}^n + RCD_i \cdot \Delta T \cdot H[q_i^{n-1} + u_i^n] + RCIM_i \cdot H[u_i^n] - RC EX_i \cdot H[-u_i^n] + 2 \lambda_1 \cdot \{V[q_i^{n-1} + u_i^n] - QMAX_i\} - V[-q_i^{n-1} - u_i^n] - V[\sum_j (h_{ij} \cdot v_j^n) - q_i^{n-1} - u_i^n], (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (69)$$

$$\partial H^n / \partial v_j^n = z_{r_j}^n \cdot W_j^n + CW_j^n + 2 \lambda_1 \cdot \{ \sum_i [h_{ij} \cdot V[\sum_k (h_{ik} \cdot v_k^n) - q_i^{n-1} - u_i^n]] + W_j^n \cdot V[r_j^{n-1} + W_j^n \cdot v_j^n - TC_j] \} + 2 \lambda_2 \cdot \{v_j^n \cdot \sum_{k \in P_j} (r_k^{n-1} - TC_k)^2\}, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots (70)$$

b) 凸性の検討

式 (62), (63) が $u_i^n, v_j^n, q_i^{n-1}, r_j^{n-1}$ に関する広義凸関数の和として与えられるから、ハミルトニアン、目的関数ともに広義凸関数である^{30)~33)}。式 (62), (63) に $H[x], V[x]$ などの特異関数が含まれるためにハミルトニアンが狭義の凸性を失い、全体的最小値を与える最適解が一意的には定まらない。すなわち同じ目的関数値をもつ最適解が複数個存在しうるわけであり、目的関数を極小にする解が唯一の最適解とはいえない。こう配法のように逐次的に最適解に近づく方法を用いると複数個の最適解のうちの1つに収束する。しかし、このようにして求められた最適解のどれもが、与えられた条件の下で同じ値に費用を最小にする解であることはもちろんであり、これらの解のどれを選択するかは業務担当者の判断などの別の評価基準によらなければならない。上述のことは本報で述べているすべての手法について適用される。また以上のことから、こう配法における試行の初期値の選択が重要な意味をもつ。ただし本報の数値計算においては試行の初期値としてすべて次の値を選ぶ。

$$u_0^n = v_0^n = 0, (n=1, \dots, N) \dots\dots\dots (71)$$

e) スケール変換

式 (16), (21) における出来高と、式 (17) における実際に要する費用との間のスケールの差が大きく、収束性が悪くなる恐れがあるため、実際に要する費用を次式のようにスケール変換する^{13), 14), 40)}。

$$1 \text{円} \Leftrightarrow 100(\%) / \text{見積り金額} (CT) \dots\dots\dots (72)$$

なお、工事の進行を式 (16) で定義される出来高で表現することも数値計算上からは、作業数量に作業数量当り単価を用いた一種のスケール変換を行なっていることになる。

d) 数値計算結果

筆者らはこう配法における前述の最急降下法、単純降下法の適用をそれぞれ試みた。これらの結果を式(62)における $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.1$ の場合について 図—4 に示す。ただし計算停止基準としては次式を用いた^{14), 39)}。

$$| \{ (J_{EXP})_k - (J_{EXP})_{k-1} \} / (J_{EXP})_k | \leq 10^{-4} \dots\dots\dots (73)$$

最急降下法においては佐山らによる1次元探索を行なった^{14), 39)}。単純降下法においては式 (47) における α_k の適当な初期値を与えて、 $(J_{EXP})_k > (J_{EXP})_{k-1}$ (失敗の試行) の場合は元の試行点に戻り、 α_k の値を 1/2 に減少させて計算を繰返した。また、1回の試行ごとに次式を用いて逐次的に α_k を減少させる方法は、たとえば $c=0.9$ の場合を 図—4 に示すように最適点に到達する以前に見かけ上収束する可能性が強い。

$$\alpha_k = c \cdot \alpha_{k-1} \dots\dots\dots (74)$$

最急降下法と単純降下法を比較してみると、一般的に試行回数あまり変わらないにもかかわらず(したがっ

て計算量は最急降下法の方が多し), 最終的には単純降下法がより最小値に到達する場合が多かった。以上のことから筆者らの問題については, 単純降下法において式(74)の $c=1.0$ とする方法が最も有効のようである。ただし $\lambda_1 \sim \lambda_3$ の値を増加させた場合, これらのどの方法も最適解に近づくにつれて収束速度がきわめて遅くなるという,

1階収束こう配法における前述の欠点が顕著になり, 収束速度の改善については検討の余地が多い。たとえば $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.0$ とした場合, 単純降下法において約 600 回の試行を繰返しても式 (73) を満たす解が得られなかった。そこで1回の収束計算で 300 回の試行を繰返しても式 (73) を満たす解が得られない場合は収束計算を打ち切り, 便宜的にその点を最小点とみなし, ペナルティ係数の値を増加させて次の収束計算を行なった。

常に $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ とし, 逐次的にペナルティ係数を 10 倍ずつ増加させて収束計算を行なった結果を図-5 に示す。またペナルティ係数の各値に対応する工事経路を図-6 に示す。これらの結果から明らかなように, 制約条件違反量 PE^N , PI^N および最終出来高 x_1^N の値から

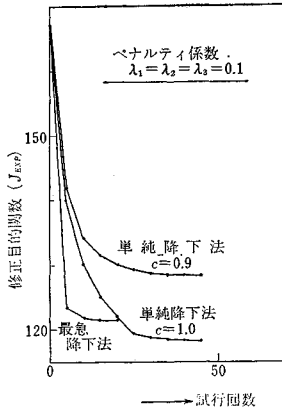


図-4

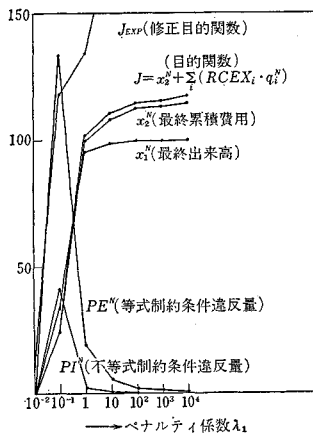


図-5

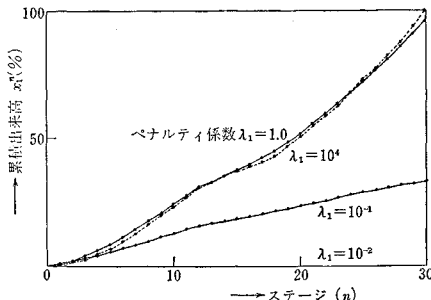


図-6

判断して, $\lambda_1 = 10^4$ の場合に最適解が得られていると推定される。またペナルティ係数の値をこれ以上増加させても有効桁数の関係から, より厳密な解が得られる可能性は少ない。ただし, ペナルティ係数の各値に対する収束計算において, 前述のように収束計算停止基準として便宜的方法をとるにしても, 式 (73) における目的関数相対誤差のどの程度の値を計算停止基準とするかは, 計算時間や計画の精度などを考慮して今後さらに検討すべき課題である。

(2) Bryson・Denham の方法の適用^{50), 59)~65)}

等式制約条件 (27) 式を式 (59) のように表わすと次式に示す終端拘束条件と考えることができる。

$$PE^N = 0 \dots\dots\dots (75)$$

Kelley の方法では, このように終端拘束条件とみなしても同じ処理を行なうことになるが, Bryson・Denham の方法では処理が異なる。ただし Bryson・Denham の方法においては終端拘束条件式の個数が増加すると ZN^N , $\partial(HN^N)^T / \partial \theta^N$ など記憶させる変数の個数が増加し, また式 (56) における逆行列の計算も無視できなくなる。したがって終端拘束条件式の選定には計算効率, 記憶容量などに関する配慮が必要である。筆者らは以下の3つの場合に対して計算を行なった。

a) ケース I

① 終端拘束条件

$$N_j = r_j^N - TC_j = 0, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots (76)$$

② 修正目的関数

$$J_{EXP} = x_2^N + \sum_i (RCEX_i \cdot V[q_i^N]) + \lambda_1 \cdot PI^N + \lambda_2 \cdot PE^N \rightarrow \min \dots\dots\dots (77)$$

③ ハミルトニアン H^N , 共変変数 z^N , こう配関数 $\partial H^N / \partial \theta^N$

式 (67) を次式で置き換える以外は Kelley の方法におけるのと同じである。

$$z_{r_j}^N = \partial J_{EXP} / \partial r_j^N = 0, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots (78)$$

④ HN^N , ($n=1, \dots, N \cdot k=1, \dots, L$)

$$HN_k^N = \sum_i \{ (ZN_{kq_i}^N \cdot q_i^N) + \sum_j (ZN_{kr_j}^N \cdot r_j^N) \} + ZN_{kx_2}^N \cdot x_2^N + ZN_{kPI}^N \cdot PI^N + ZN_{kPE}^N \cdot PE^N \dots\dots\dots (79)$$

⑤ ZN^N , ($n=1, \dots, N \cdot k=1, \dots, L$)

$$ZN_{kx_2}^N = ZN_{kPI}^N = ZN_{kPE}^N = 0 \dots\dots\dots (80)$$

$$ZN_{kq_i}^N = 0, (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (81)$$

$$ZN_{kr_j}^N = \delta_{kr_j}, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots (82)$$

ここで, δ_{kj} : クロネッカーのデルタとする。

⑥ $\partial(HN^N)^T / \partial \theta^N$, ($n=1, \dots, N \cdot k=1, \dots, L$)

$$\partial HN_k^N / \partial u_i^N = 0, (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (83)$$

$$\partial HN_k^N / \partial v_j^N = W_j^N \cdot \delta_{kj}, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots (84)$$

すなわち次式が成立する。

$$\frac{\partial(HN^n)^T}{\partial\theta^n} = \begin{bmatrix} W_1^n & & 0 \\ & W_2^n & \\ 0 & & W_L^n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(85)$$

⑦ $\Delta\theta^n, (n=1, \dots, N)$: $\partial(HN^n)^T/\partial\theta^n$ が式 (85) に示したように対角行列で与えられるので, 式 (56) が次式のように簡単に求まる。

$$\Delta u_i^n = -C \cdot \partial H^n / \partial u_i^n, (i=1, \dots, M) \dots(86)$$

$$\Delta v_j^n = -C \cdot \left\{ \frac{\partial H^n}{\partial v_j^n} - W_j^n \cdot \sum_{n=1}^N \left(W_j^n \cdot \frac{\partial H^n}{\partial v_j^n} \right) / \sum_{n=1}^N (W_j^n)^2 \right\} + W_j^n \cdot \Delta N_j / \sum_{n=1}^N (W_j^n)^2, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(87)$$

$$C = \left[\frac{(4p)^2 - \sum_j \left\{ \Delta N_j^2 \right\}}{\sum_{n=1}^N \left\{ \sum_i \left(\frac{\partial H^n}{\partial u_i^n} \right)^2 + \sum_j \left(\frac{\partial H^n}{\partial v_j^n} \right)^2 \right\} + \sum_{n=1}^N (W_j^n)^2} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{\sum_{n=1}^N (W_j^n)^2}{-\sum_j \left[\left\{ \sum_{n=1}^N \left(W_j^n \cdot \frac{\partial H^n}{\partial v_j^n} \right) \right\} / \sum_{n=1}^N (W_j^n)^2 \right]} \right] \dots\dots\dots(88)$$

⑧ 数値計算結果: 式 (55) における $4p$ の選択には佐山らによる方法を用いた^{14), 16)}。ペナルティ係数 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$ とした場合の収束の様子を 図-7 に示す。ただし 図-7 において失敗の試行は含まれていない。また計算停止基準としては式 (73) と次式が同時に満足されることを用いた。

$$|N_j| = |r_j^N - TC_j| \leq 10^{-1}, (j=1, \dots, L) \dots(89)$$

常に $\lambda_1 = \lambda_2$ として, ペナルティ係数を逐次的に 10 倍ずつ増加させて収束計算を行なった結果を 図-8 に示す。またペナルティ係数の各値に対応する工事径路を 図-9 に示す。Kelley の方法においてこう配法を適用した場合と異なり, ペナルティ係数の各値に対する収束計算は 100 回前後の試行で式 (73), (89) を満足した。

b) ケース II

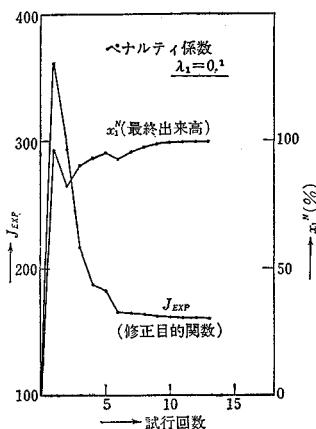


図-7

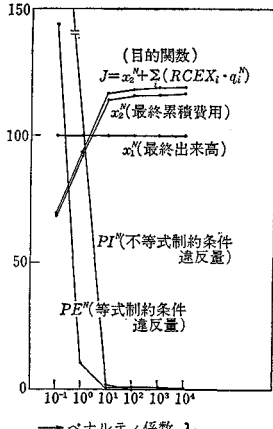


図-8

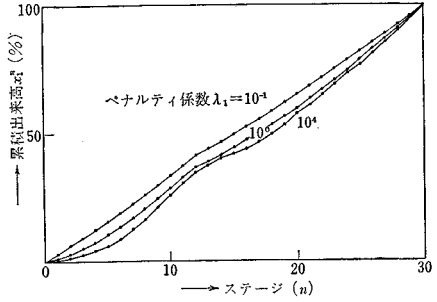


図-9

① 終端拘束条件

$$N_j = r_j^N - TC_j = 0, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(90)$$

$$N_{(L+1)} = PE^N = 0 \dots\dots\dots(91)$$

② 修正目的関数

$$J_{EXP} = x_2^N + \sum_i (RCEX_i \cdot V[q_i^N]) + \lambda_1 \cdot PI^N \rightarrow \min \dots\dots\dots(92)$$

③ $z^n, \partial H^n / \partial \theta^n, (n=1, \dots, N)$: 式 (64)~(70) のうち対応する式を次式で置き換える。

$$z_{PE}^n = 0 \dots\dots\dots(93)$$

$$z_{r_j}^n = 0, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(94)$$

$$z_{r_j}^{n-1} = z_{r_j}^n + 2\lambda_1 \cdot V[r_j^{n-1} + W_j^n \cdot v_j^n - TC_j], (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(95)$$

$$\partial H^n / \partial v_j^n = z_{r_j}^n \cdot W_j^n + CW_j^n + 2\lambda_1 \cdot \left[\sum_i \{ h_{ii} \cdot V[\sum_k (h_{ik} \cdot v_k^n) - q_i^{n-1} - u_i^n] \} + W_j^n \cdot V[r_j^{n-1} + W_j^n \cdot v_j^n - TC_j] \right], (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(96)$$

④ $ZN^n, (n=1, \dots, N)$: ケース I の式 (80)~(82) に次式を付け加える。

$$ZN_{(L+1)x_1}^n = ZN_{(L+1)PI}^n = 0 \dots\dots\dots(97)$$

$$ZN_{(L+1)q_i}^n = 0, (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots(98)$$

$$ZN_{(L+1)r_j}^n = 0, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(99)$$

$$ZN_{(L+1)r_j}^{n-1} = ZN_{(L+1)r_j}^n + 2(r_j^{n-1} - TC_j) \cdot \sum_{k \in S_j} (v_k^n)^2, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(100)$$

⑤ $\partial(HN^n)^T / \partial \theta^n, (n=1, \dots, N)$: ケース I の式 (83), (84) に次式を付け加える。

$$\partial HN_{(L+1)}^n / \partial u_i^n = 0, (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots(101)$$

$$\partial HN_{(L+1)}^n / \partial v_j^n = ZN_{(L+1)r_j}^n \cdot W_j^n + 2v_j^n \cdot \sum_{k \in P_j} (r_k^{n-1} - TC_k)^2, (j=1, \dots, L) \dots\dots\dots(102)$$

すなわち次式が成立する。

$$\frac{\partial(HN^n)^T}{\partial\theta^n} = \begin{bmatrix} W_1^n & & 0 & \frac{\partial HN_{(L+1)}^n}{\partial v_1^n} \\ & W_2^n & & \vdots \\ 0 & & W_L^n & \frac{\partial HN_{(L+1)}^n}{\partial v_L^n} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(103)$$

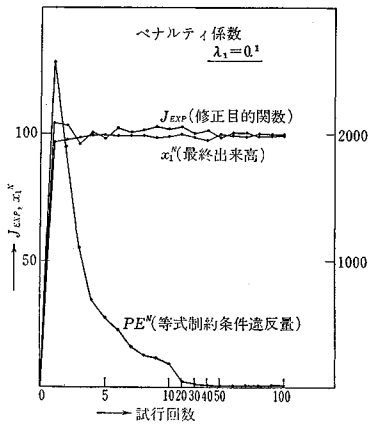


図-10

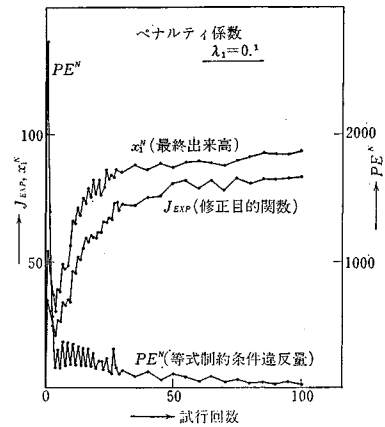


図-11

⑥ $4\theta^n$: ケース I におけるように式 (86)~(88) の形で表現することもできるが、この場合は式 (56) の行列演算を行なう方が簡便である。ただし $\partial(HN^n)^T/\partial\theta^n$ が式 (103) に示すような特殊な形であるため、詳細は略すが逆行列 I_{NN}^{-1} が分割法を用いて簡単に求められる。

⑦ 数値計算結果：計算停止基準としては式 (73)、(89) と次式が同時に満足されることを用いた。

$$N_{(L+1)} = PE^N \leq 2.5 \times 10^{-1} \dots\dots\dots(104)$$

$\lambda_1 = 0.1$ の場合についての収束の様子を 図-10 に示す。ただし、失敗の試行は含まず、また試行回数 10 回目以降は 10 回目ごとの値のみプロットした。 $\lambda_1 = 0.1$ の場合に式 (104) を満たす解を得るために約 300 回の試行が必要であった。ケース II においてもペナルティ係数 λ_1 を逐次的に増加させる必要があるから、式 (75) を終端拘束条件とする方法はあまり効率がよくないようである。

c) ケース III

① 終端拘束条件

$$N = \sum_j (r_j^N - TC_j)^2 + PE^N = 0 \dots\dots\dots(105)$$

② 修正目的関数

$$J_{EXP} = x_2^N + \sum_j (RC EX_j \cdot V[q_j^N]) + \lambda_1 \cdot PE^N \rightarrow \min \dots\dots\dots(106)$$

③ $z^n, \partial H^n/\partial\theta^n$: ケース II と同じである。

④ $ZN^n, \partial(HN^n)^T/\partial\theta^n, (n=1, \dots, N)$: 終端制約条件式が式 (105) に示した 1 つだけなので、 $ZN^n, \partial(HN^n)^T/\partial\theta^n$ が簡単に求められるから省略する。

⑤ 数値計算結果：ペナルティ係数 $\lambda_1 = 0.1$ の場合についての収束の様子を 図-11 に示す。ただし、失敗の試行は含まず、また試行回数 30 回目以降は 5 回目ごとの値のみをプロットした。計算停止基準としては式 (73) と次式が同時に満足されることを用いた。

$$N = \sum_j (r_j^N - TC_j)^2 + PE^N \leq 10^{-1} \dots\dots(107)$$

図-11 から推察されるように、約 500 回の試行を繰返しても式 (107) を満たす解が得られなかった。ケース III は記憶する変数の個数の少なさ、1 回の試行に要する計算時間の少なさ、という点では優れているが、計算効率の面からはケース I, II に比べてかなり劣っている。また、ケース II, III の結果から、 PE^N を終端拘束条件に組み込むことは好ましくないようである。

(3) 各手法の比較

各手法の適用に際して述べたことをまとめると以下のようになる。終端拘束条件の処理に Kelley の方法を適用する場合には、こう配法における単純降下法が最も有効であるが、収束速度が遅く、共役こう配法などによる検討が必要である^{53), 54)}。Bryson・Denham の方法を適用する場合にはケース I が最も有効であり、 PE^N を終端拘束条件に組み込むことは良い結果を得なかった。しかし、ペナルティ係数の値に応じてケース I とケース II を組み合わせたり、制約条件式に適当な重みづけを行なうなど、数値計算上のより詳細な検討が必要である。筆者らが定式化した工程計画管理最適化問題にこう配法を適用するには、本報で述べた手法以外にも種々の数値計

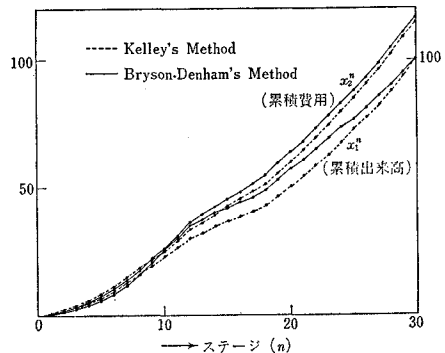


図-12

算法がある。本報では、こう配法の適用可能性の検討を主な目標としたため、計算効率などについては上述のように多くの問題が残されている。

また、Kelley の方法、Bryson・Denham の方法により前述のようにして得られた最終結果の比較を 図-12 に示す。図-12 から明らかなように、目的関数 J の値がほぼ同値であるにもかかわらず工事径路および操作変数 u^n, v^n にはかなりの差がある。これは、筆者らが定式化した工程計画管理最適化問題が前述のように広義凸計画であるために異なる最適解（曲線）に収束した結果と解釈される。つまり 図-6、図-9 から明らかなように Kelley の方法においては下方から、Bryson・Denham の方法においては上方から最適解に近づいている。したがって、この問題は試行の初期点の選定とあわせて検討を要する課題であるが、現段階では収束に要する時間が大きいために十分な検討を行なうことが困難であり、収束性の改良とともに稿を改めて述べる。

5. 施工計画に対する応用

最適制御問題としての工程計画管理最適化問題の解は、操作変数である資源搬入出数量 u_i^n （したがって資源存置数量 q_i^n ）および各アクティビティにおける作業グループ投入数量 v_j^n の値により与えられる。実際には q_i^n, v_j^n が整数値として与えられる必要があるが、こう配法の適用に際しては、この制約を考慮することができず、 q_i^n, v_j^n が実数値として求まる。たとえば、Kelley の方法により求めた結果を 表-7 に示す。したがって実際の施工計画に応用するためには、表-7 のように求められた実数解を何らかの方法で整数解に改めなければならない。しかし、この作業を自動化することは整数計画法 (Integer Programming) の発展段階からみて未だ制約が多い^{33), 66)}。そこで式 (23) 以下の制約条件を考慮しながら、計画業務担当者が整数解への変換を行なうほうが現段階ではより現実的であろう。この作業において実際の施工計画管理に対する経験的判断が必要なことも明らかである。たとえば筆者らは、表-7 に基

表-7

ステージ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
資源搬入数量 u_i^n	1	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
資源存置数量 q_i^n	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
作業グループ投入数量 v_j^n	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
採掘日数	0.68	0.75	0.69	0.62	0.67																									

表-8

ステージ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
資源搬入数量 u_i^n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
資源存置数量 q_i^n	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
作業グループ投入数量 v_j^n	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
採掘日数	0.68	0.75	0.69	0.62	0.67																									

づいて表-8 に示す工程計画表を作成した。表-8 がいわゆる機械工程計画表、労務工程計画表、作業工程計画表に相当する。

本報で述べた操作をステージ数 N (工期) を変えて行なうことにより工期-費用曲線が得られ、筆者らの主張する動の見積り作業が現実的に可能になる²⁾。すなわち、筆者らの得た結果において強調されるべきことは、計算の条件として与えるデータ（時間当り作業能力、資源費用成分その他）が標準化しやすい性格のものだけであり、計画作業中にたとえば PERT 系手法におけるように、各アクティビティに対する投入資源数量（すなわちアクティビティ・タイム）や存置資源数量などの、在庫管理問題、スケジューリング問題などを含む面倒な最適化問題に関する意志決定を業務担当者自身が行なう必要がないことである。したがって業務担当者が各建設工事個有のデータ（作業数量、施工順序関係その他）と蓄積された標準的データ（時間当り作業能力、資源費用成分その他）を与えることにより、その条件のもとでの最小費用の施工段取に裏づけられた施工計画案が自動的に得られる。この計画案を業務担当者の経験により評価し、かつ前述のように施工条件を変えて最適化計算を繰返すことにより最適施工計画を決定できる。このような操作がいわゆる定量的評価に基づく施工計画管理の最適化（動の見積り）であり、施工計画管理業務のシステム化に寄与することができるであろう²⁾。

また上述の作業を工程管理と結びつけることにより、最適工事径路とバナナ曲線などの実測データとの対比、および、その工学的意味づけを行なうことなども興味ある課題である。一方、前述の動の見積りの結果として得られる工程計画に対して PERT/TIME 計算を行ない、時間的にクリティカルなアクティビティを把握することは十分に意味をもつことであるが、山積み・山崩し計算などを行なうことが意味をもたないことは明らかである。

6. 結 論

得られた主な結果は次のとおりである。

(1) 先に筆者らは機械化土工における工程計画管理最適化問題を多段決定過程モデルを用いて定式化した。この問題を離散型最適制御問題とみて最適制御理論における各手法の適用可能性について検討し、こう配法(こう配関数法)の適用が有効であることを示した。

(2) (1)の結果に基づき、状態変数制約条件に対してペナルティ関数法(SUMT)における外点法を、また終端拘束条件に対して Kelley の方法、Bryson・Denham の方法をそれぞれ用いた各場合について、こう配法を適用するための計算式と各場合の数値計算結果を示した。

(3) 終端拘束条件に Kelley の方法を適用する場合はこう配法における単純降下法が有効であり、Bryson・Denham の方法を適用する場合は本文中のケース I が有効であることを明らかにした。ただし、これらの方法についても収束を速めるための検討が必要である。

(4) (1)~(3)の結果から、費用の評価に基づく最適施工計画の選定(動の見積り)が現実的に可能なことを示した。すなわち、従来は別々にとり扱われてきた在庫管理問題やスケジューリング問題を含む多段決定過程としての工程計画管理最適化問題の数値解が得られたことから、工程計画と見積りを関連づけた動の見積りが実際に可能であることを明らかにした。この結果、前述の在庫管理、スケジューリングに関する複雑な意志決定を業務担当者自身が行なわなくても、基本的なデータを与えるだけで、その条件のもとでの最小費用の施工段取に裏づけられた工程計画案が自動的に得られることになり、施工計画管理業務の合理化に寄与しうると推察される。

本報では機械化土工工事を対象として上述の定式化と最適化計算を行なったが、必要に応じて定式化に多少の修正を加えることにより、工程上の資源操作が施工計画管理における支配的な要素となる一般的な建設工事に対しても、本報で述べた手法が適用できることが明らかである。

7. あとがき

施工計画管理業務の合理化が早くから要請されながらも、その工学的アプローチについて顕著な発展があったとはいえない。その原因の1つとして、施工計画管理の内容がきわめて多面的であるために一般的な工学的モデルを想定することが困難であり、部分的な問題の検討にとどまっていたことがあげられる。しかし、施工計画管

理業務の合理化における基本的目標は前述のスケジューリング問題、在庫管理問題などを含む複雑な計画管理の内容を全体的に評価する手段を得ることであり、部分的コストダウンを行なうことではない。この観点から、筆者らは機械化土工における工程計画管理の動的な面に着目して、多段決定過程モデルを用いた問題の定式化と、こう配法を用いた数値解析を行なった。これらの結果により、従来は工学的表現が困難であった施工計画管理の最適化に関する1つの手がかりが得られたと考える。ただし、筆者らの施工計画管理業務に対する経験が十分でないため問題の定式化については多くの疑問点があると想像される。また本文中でも触れたように数値解析上で検討が必要な問題も多く残されている。これらについては今後の組織的研究が必要である。

最後に、本研究の遂行に際して御指導と御助力をいただいた京都大学土木工学教室 島昭治郎教授、同太田秀樹助教授、鹿島建設(株) 多田義雄常務取締役をはじめとする同土木見積部、同電子計算センター、同技術研究所企画調査室の諸氏に感謝の意を表します。

記号一覧

- A_l : オペレーション l に属するアクティビティの集合,
- COG_l : 作業グループ l の 1 作業グループ・時間当り費用,
- COH_l : 作業グループ l の 1 作業グループ・時間当り稼働費用,
- CT : 見積り金額,
- CW_j^n : 第 n ステージ・アクティビティ j における 1 作業グループ当り稼働費用,
- h_{il} : 作業グループ l における資源 i の必要存置数量,
- J : 目的関数,
- L : 総アクティビティ数,
- M : 資源総種類数,
- N : 総ステージ数,
- NA_l : オペレーション l に属するアクティビティの個数,
- P_j : アクティビティ j の先行アクティビティの集合,
- q_i^n : 第 n ステージにおける資源 i の存置数量,
- $QMAX_i$: 資源 i の利用可能最大数量,
- QR_{ik} : 作業グループ k における資源 i の資源数量,
- QRG_{kl} : 作業グループ l における資源グループ k の数量,
- r_j^n : 第 n ステージにおけるアクティビティ j の

累積出来高,

RCD_i : 資源 i の固定費用 (円/日),

RCH_i : 資源 i の稼働費用 (円/時間),

$RCEX_i$: 資源 i の搬出費用 (円/回),

$RCIM_i$: 資源 i の搬入費用 (円/回),

RH_j^n : 第 n ステージ・アクティビティ j における
1 日当り実稼働時間,

T : 工期,

TC_j : アクティビティ j の総出来高,

TOQ_l : オペレーション l の総作業数量,

TQ_j : アクティビティ j の総作業数量,

u_i^n : 第 n ステージにおける 資源 i の搬入 ($u_i^n > 0$) または搬出 ($u_i^n < 0$) 数量,

U^n : 第 n ステージにおける外乱,

UC_j : アクティビティ j の作業数量当り単価,

UD_j^n : 第 n ステージ・アクティビティ j における
(月当り) 稼働日数率,

UOC_l : オペレーション l の作業数量当り単価,

UR_{ik} : 資源グループ k における資源 i の稼働時間
率,

v_j^n : 第 n ステージ・アクティビティ j における
1 作業グループ投入数量,

$VMAX_j^n$: 第 n ステージ・アクティビティ j における
最大投入作業グループ数,

W_j^n : 第 n ステージ・アクティビティ j における
1 作業グループ当り出来高,

WH_j^n : 第 n ステージ・アクティビティ j における
1 作業グループ・時間当り作業能力,

WR_{il} : 作業グループ l における 資源 i の 稼 働 数
量,

x^n : 第 n ステージにおける状態変数,

x_1^n : 第 n ステージにおける全累積出来高,

x_2^n : 第 n ステージにおける全累積費用,

ΔT : 工期単位,

θ^n : 第 n ステージにおける操作変数。

参 考 文 献

- 1) 畠・荒井: 土工機械の待合せに関する基礎的考察, 土木学会論文報告集, No. 194, pp. 127~140 (1971)
- 2) 庄子・荒井: 機械化土工における工程計画管理最適化問題の定式化, 土木学会論文報告集, No. 214, pp. 57~70 (1973)
- 3) JACOBS ASSOCIATES ESTIMATING SYSTEM USER'S MANUAL (1970).
- 4) 鬼頭: 変分法と最適化問題, ダイヤモンド社 (1969)
- 5) I.M. Gelfand・S.V. Fomin (関根訳): 変分法, 総合図書 (1970)
- 6) L.T. Fan・C.S. Wang (高松他訳): 離散型最大原理, コロナ社 (1972)
- 7) L.T. Fan (中谷他訳): 最大原理とその応用, コロナ社 (1968)
- 8) J.T. Tou (中村他訳): 現代制御理論, コロナ社 (1966)
- 9) L.S. Pontryagin, et al. (関根訳): 最適過程の数学的理論, 総合図書 (1967)
- 10) A.R.M. Noton (菊池訳): 現代制御工学入門, コロナ社 (1967)
- 11) 辻: 最適制御概論, 養賢堂 (1967)
- 12) 市川: システム理論と最適制御, 朝倉書店 (1970)
- 13) 志水: システム制御と数理計画法, コロナ社 (1970)
- 14) 高松編: プロセスシステム工学, 日刊工業新聞社 (1972)
- 15) A.P. Sage: Optimum Systems Control, Prentice Hall (1968)
- 16) A.E. Bryson・Y.C. Ho: Applied Optimal Control, Ginn (1969)
- 17) M.M. Denn: Optimization by Variational Methods, McGraw-Hill (1969)
- 18) E. Polak: Computational Methods in Optimization, A Unified Approach, Academic Press (1971)
- 19) P. Dyer・S.R. Mcreynolds: The Computation and Theory of Optimal Control, Academic Press (1970)
- 20) M.D. Canon・D. Cullum・E. Polak: Theory of Optimal Control and Mathematical Programming, McGraw-Hill (1970)
- 21) D. Tabak・B.C. Kuo: Optimal Control by Mathematical Programming, Prentice-Hall (1971)
- 22) 坂和: 最適制御理論, 日本機械学会誌, Vol. 69, No. 569, pp. 67~74 (1966)
- 23) 畑中: 近代制御理論, 日本機械学会誌, Vol. 72, No. 607, pp. 84~92 (1969)
- 24) 増淵・嘉納: 変分法と最適制御理論, 計測と制御, Vol. 9, No. 10, pp. 750~762 (1970)
- 25) 田村: 問題向きの最適化理論と技術について (DP と最大原理), 電気学会雑誌, Vol. 87-9, No. 948, pp. 1681~1689 (1967)
- 26) 吉川: 最適化手法, 土木学会誌, Vol. 57-6, pp. 77~86 (1972)
- 27) B. Paiewonsky: Optimal Control: A Review of Theory and Practice, AIAA Journal, Vol. 3, No. 11, pp. 1985~2006 (1965)
- 28) M.M. Denn・R. Aris: Green's Functions and Optimal Systems, I & EC Fundamentals, Vol. 4, No. 1, pp. 7~16, Vol. 4, No. 2, pp. 213~222, Vol. 4, No. 3, pp. 249~257 (1965)
- 29) M.M. Denn・R. Aris: Second Order Variational Equations and the Strong Maximum Principle, Chem. Eng. Sci., Vol. 20, pp. 373~384 (1965)
- 30) J. Kowalik・M.R. Osborne (山本他訳): 非線形最適化問題, 培風館 (1970)
- 31) 片岡: 数理計画法, 東洋経済 (1971)
- 32) O. L. Mangasarian (関根訳): 非線形計画法, 培風館 (1972)
- 33) C. McMillan (前田他訳): 数理計画入門 (上・下), 東京図書 (1972)
- 34) D.J. Wield: Optimum Seeking Methods, Prentice-Hall (1964)
- 35) G. Hadley: Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley (1964)
- 36) G.S.G. Beveridge・R.S. Schechter: Optimization: Theory and Practice, McGraw-Hill (1970)
- 37) D.M. Himmelblau: Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill (1972)
- 38) 佐山・大井: 非線形計画法とその応用例, 制御工学, Vol. 11, No. 11, pp. 565~573 (1967)
- 39) 佐山: グラジエント法によるプロセスの最適化, 化学機

- 械技術, 第 21 集, pp. 133~157, 丸善 (1969)
- 40) D.E. Johansen : Convergence Properties of the Method of Gradient, Advance in Control Systems Vol. 3 (1966)
- 41) A.V. Fiacco-G.P. McCormick : Nonlinear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Techniques, John Wiley (1968)
- 42) R. Bellman : Dynamic Programming, Princeton Univ. Press (1957)
- 43) 北森 : 最大原理とその計算法, 計測と制御, Vol. 8, No. 7, pp. 465~473 (1969)
- 44) 市川・田村 : こう配法による最適制御問題の解法, 計測と制御, Vol. 8, No. 11, pp. 761~771 (1969)
- 45) 市川 : 最適制御, 特にその計算アルゴリズム, 計測と制御, Vol. 9, No. 2, pp. 112~118 (1970)
- 46) 佐山・大井 : こう配法のプロセス最適化への応用, 計測と制御, Vol. 9, No. 10, pp. 725~739 (1970)
- 47) 市川 : 最適制御のシンセシスと計算, 計測と制御, Vol. 10, No. 6, pp. 22~31 (1971)
- 48) 市川 : 最適制御の計算アルゴリズム, 日本機械学会誌, Vol. 74, No. 631, pp. 1026~1035 (1971)
- 49) H.J. Kelley : Gradient Theory of Optimal Flight Paths, ARS J., Vol. 30, pp. 947~954 (1960)
- 50) A.E. Bryson-W.F. Denham : A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems, J. Applied Mechanics, Vol. 29, pp. 247~257 (1962)
- 51) E.S. Lee : Optimization by a Gradient Technique, I & EC Fundamentals, Vol. 3, No. 4, pp. 373~380 (1964)
- 52) K. Okamura : A Simplified Steepest-Ascent Method, Trans. ASME, Vol. 33, pp. 452~454 (1966)
- 53) L.S. Lasdon-S.K. Mitter-A.D. Waren : The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-12, No. 2, pp. 132~138 (1967)
- 54) B. Pagurek-C.M. Woodside : The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems with Bounded Control Variables, Automatica, Vol. 4, pp. 337~349 (1968)
- 55) 黒田 : 状態に制限のある制御系の最適制御, システムと制御, Vol. 15, No. 3, pp. 73~79 (1971)
- 56) A.E. Bryson-W.F. Denham-S.E. Dreyfus : Optimal Programming Problems with Inequality Constraints I, II, AIAA Journal, Vol. 1, No. 11, pp. 2544~2550 (1963), Vol. 2, No. 1, pp. 25~34 (1964)
- 57) J. Mcintyre-B. Paiewonsky : On Optimal Control with Bounded State Variables, Advance in Control Systems, Vol. 5, pp. 389~419 (1967)
- 58) M.M. Lele-D.H. Jacobson : A Proof of the Convergence of the Kelley-Bryson Penalty Function Technique for State-Constrained Control Problems, J. Mathematical Analysis and Applications, Vol. 26, pp. 163~169 (1969)
- 59) 呉 : 電力系統の経済運用計算に対する離散系の最大原理の適用, 電気学会雑誌, Vol. 87-4, No. 943, pp. 737~746 (1967)
- 60) 高松・佐山・外池 : 管型反応装置の最適設計と感度解析, 制御工学, Vol. 9, No. 9, pp. 485~492 (1965)
- 61) 高松・佐山・外池 : グラジエント法による回分式反応プロセスの最適化制御, 制御工学, Vol. 11, No. 2, pp. 83~89 (1967)
- 62) G.S. Tracz : A Selected Bibliography on the Application of Optimal Control Theory to Economic and Business Systems, Management Science and Operations Research, J. ORSA, Vol. 16, pp. 174~185 (1968)
- 63) V.N. Burkov : Application of Optimal Control Theory to the Problems of Resource Distribution, Deterministic Optimal Control, Session 19, Paper 19. C, 6 pp, IFAC Congress, London England, June (1966)
- 64) E.S. Lee : Optimization of Complex Chemical Plants by a Gradient Technique, AIChE J., Vol. 15, No. 3, pp. 393~400 (1969)
- 65) E.S. Lee-M.A. Shaikh : Optimal Production Planning by a Gradient Technique I. First Variations, Management Sci., Vol. 16, No. 1, pp. 109~117 (1969)
- 66) H. Greenberg : Integer Programming, Academic Press (1971)

(1972.11.21・受付)