

## 有限要素法による PC 格納容器の粘弾性解析

### VISCOELASTIC ANALYSIS OF P C CONTAINMENT USING FINITE ELEMENT METHOD

赤木 知之\*・大野 大明\*\*・色部 誠\*\*\*

By Tomoyuki Akagi, Taimei Ohno and Makoto Irobe

#### 1. 緒 言

コンクリートが粘弾性的挙動を示すことは古くから知られていたが、その特性を明らかにしようとしたのは Davis<sup>1)</sup>, Whitney<sup>2)</sup>, Glanville<sup>3)</sup> らが初めてである。その結果は、いわゆる線形粘弾性に通ずる Davis-Glanville の法則、さらに Whitney の法則として、その重要性を保持しており、コンクリート構造物の設計施工などの基本的指針となっている。しかし、それらクリープを考慮した応力解析手法は、粘弾性基礎式をそのまま解析的あるいは数値的に、直接解く方法で、ほとんどが“はり”などの単軸クリープを対象<sup>4)~6)</sup>にしたものである。これを多軸問題まで取りあつかえる一般的なものにしようとする努力は徐々になされており、スラブなどの 2 次元クリープを取り扱った論文<sup>7)</sup> などが見られる。しかし、3 次元まで拡張したものは皆無に近く、その可能性を秘めたものとして、弾性-粘弾性の対応原理<sup>8)</sup> を利用したもの<sup>9)</sup> があるだけである。しかし、この手法も逆変換の困難さ、さらに境界条件などに関連して適用範囲が非常に限定されており、結局、コンクリート構造物の粘弾性解析は、きわめて限られたものにしか適用されず、その拡張は非常にむずかしいものとされている。

しかし、最近の PC 構造物の普及、さらにその巨大化に伴い、コンクリートのクリープに関する認識が高まっており、材料的研究とともに、一般的な粘弾性解析法の確立は重要な問題である。

本論文は、近時発達を遂げた有限要素により、一般的な粘弾性解析法を示し、解法の PC 格納容器への一適用を行なったものである。計算例としては、1971 年関西電力(株)が行なった大型実験模型を用い、コンクリート

のクリープによるプレストレスの緩和、さらに PC 鋼材のレラクセーションなどを解析した。

#### 2. 緩和関数による応力ひずみ関係式

線形粘弾性材料の応力ひずみ関係式は、Boltzmann の記憶積分で表示するのが、最も一般的であり次式で表わせる。

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \dots \dots (1)$$

$E(t)$  を緩和関数 (relaxation function) または緩和弾性率 (relaxation modulus) という。式 (1) を 3 次元連続体に用いるものへ一般化するには、テンソルの応力ひずみ関係に置きかえればよい。直角座標系における応力およびひずみテンソルを  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  とし、それらテンソルの対称性を考え、かつ材料を等方等質体と仮定すれば、3 次元連続体における応力ひずみ関係は次式となる。

$$\sigma_{rr}(t) = 3K(t)\varepsilon_{rr}(0) + 3 \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{rr}(\tau)}{d\tau} d\tau \dots \dots (2)$$

$$\sigma_{ij}'(t) = 2G(t)\varepsilon_{ij}'(0) + 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{ij}'(\tau)}{d\tau} d\tau \dots \dots (3)$$

ここに、 $\sigma_{ij}'(t)$  と  $\varepsilon_{ij}'(t)$  は偏差応力および偏差ひずみの成分である。

$$\sigma_{ij}'(t) = \sigma_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{rr}(t) \dots \dots (4)$$

$$\varepsilon_{ij}'(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{rr}(t) \dots \dots (5)$$

関数  $K(t)$ ,  $G(t)$  をそれぞれ緩和関数 (あるいは緩和弾性率) の体積成分、せん断成分とよぶ。 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。

式 (4) を式 (3) に代入し式 (2) を用いれば、その結果は次式となる。

\* 正会員 工修 秋田大学助手 鉱山学部土木工学科

\*\* 正会員 関西電力(株)建設部長

\*\*\* 正会員 工博 秋田大学教授 鉱山学部土木工学科

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \left[ K(t)\varepsilon_{rr}(0) + \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{rr}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] + 2G(t)\varepsilon_{ij}'(0) + 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{ij}'(\tau)}{d\tau} d\tau \dots (6)$$

緩和関数  $E(t)$ ,  $K(t)$ ,  $G(t)$  は熱力学的制約を受けて、非常に限定され、減衰指数形で表わすのが最も一般的である。

$$E(t) = E_0 + \sum_{\alpha=1}^n E_{\alpha} e^{-t/T_{R\alpha}} \dots (7)$$

$$K(t) = K_0 + \sum_{\alpha=1}^n K_{\alpha} e^{-t/T_{K\alpha}} \dots (8)$$

$$G(t) = G_0 + \sum_{\alpha=1}^n G_{\alpha} e^{-t/T_{G\alpha}} \dots (9)$$

これらは、材料特性をばね要素とダッシュポット要素の結合とした力学モデルで表示することと対応しており、図-1 の一般化 Maxwell モデルにおいて、単位ステッ

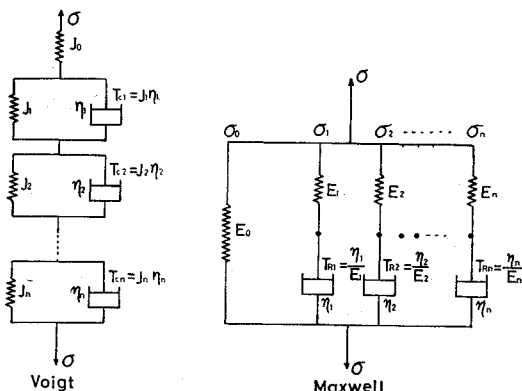


図-1 Generalized Model

プ入力  $\varepsilon(t) = 1(t)$  を与えたときに得られる応答である。式 (7) は単軸の場合、式 (8), (9) はそれぞれ、ある点での平均応力  $\{1/3 \cdot \sigma_{rr}(t)\}$  と体積ひずみ  $\{\varepsilon_{rr}(t)\}$ 、偏差応力と偏差ひずみとの関係に用いた場合に対応する。 $E_0, K_0, G_0, E_{\alpha}, K_{\alpha}, G_{\alpha}, T_{R\alpha}, T_{K\alpha}, T_{G\alpha}$ , ( $\alpha=1, 2, \dots, n$ ) はモデル各要素の定数パラメータを表わし、 $T_{R\alpha}, T_{K\alpha}, T_{G\alpha}$  などは時間の次元をもつもので緩和時間と呼ばれる。これらは後述するようにクリープ実験等から、曲線のあてはめにより決定することができる。

式 (8), (9) を式 (2), (3) に代入すれば、次の関係が得られる。

$$\sigma_{rr}(t) = \sigma_{rr0}(t) + \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{rr\alpha}(t) \dots (10)$$

$$\sigma_{ij}'(t) = \sigma_{ij0}'(t) + \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{ij\alpha}'(t) \dots (11)$$

ここで、 $\sigma_{rr0}(t)$ ,  $\sigma_{rr\alpha}(t)$ ,  $\sigma_{ij0}'(t)$ ,  $\sigma_{ij\alpha}'(t)$  は次式のよ

$$\sigma_{rr0}(t) = 3K_0\varepsilon_{rr}(t) \dots (12)$$

$$\sigma_{rr\alpha}(t) = 3K_{\alpha}\varepsilon_{rr}(0)e^{-t/T_{K\alpha}} + 3 \int_0^t \dot{\varepsilon}_{rr}(\tau) K_{\alpha} e^{-(t-\tau)/T_{K\alpha}} d\tau \dots (13)$$

$$\sigma_{ij0}'(t) = 2G_0\varepsilon_{ij}'(t) \dots (14)$$

$$\sigma_{ij\alpha}'(t) = 2G_{\alpha}\varepsilon_{ij}'(0)e^{-t/T_{G\alpha}} + 2 \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}'(\tau) G_{\alpha} e^{-(t-\tau)/T_{G\alpha}} d\tau \dots (15)$$

また、式 (13), (15) において  $t=0$  とすれば、

$$\sigma_{rr\alpha}(0) = 3K_{\alpha}\varepsilon_{rr}(0), \sigma_{ij\alpha}'(0) = 2G_{\alpha}\varepsilon_{ij}'(0) \dots (16)$$

となり、これは初期条件を与えるものであるから、式 (10)~(15) は 図-1 の力学モデルに対応することは直観的に理解できる。

また、式 (6) に式 (8), (9) を用いれば、陽な形で応力ひずみ関係を表示できる。

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \left[ K_0\varepsilon_{rr}(t) + \sum_{\alpha=1}^n K_{\alpha}\varepsilon_{rr}(0)e^{-t/T_{K\alpha}} + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{rr}(\tau) \sum_{\alpha=1}^n K_{\alpha} e^{-(t-\tau)/T_{K\alpha}} d\tau \right] + 2 \left[ G_0\varepsilon_{ij}'(t) + \sum_{\alpha=1}^n G_{\alpha}\varepsilon_{ij}'(0)e^{-t/T_{G\alpha}} + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}'(\tau) \sum_{\alpha=1}^n G_{\alpha} e^{-(t-\tau)/T_{G\alpha}} d\tau \right] \dots (17)$$

### 3. 粘弾性解析法の定式化

粘弾性問題の有限要素法への適用において、弾性問題と異にする基礎式は、応力ひずみ関係式のみで、他に変わるはない。したがって、粘弾性問題で得られる剛性方程式は、式 (6) の右辺第 2 項、第 4 項から生ずる履歴積分が付加項として加わった連立積分方程式となる。これを、任意の境界条件のもとに解けば節点変位が求まり、さらに物体内の応力状態が定まる。しかし、実際問題としては、山田らも指摘<sup>10)</sup>しているように、この履歴積分の評価に膨大な労力を必要とし、単純な問題を除いてはほとんど計算不可能に近い。そこで、この種の問題の解決のために本論文では増分理論を適用している。

増分理論は最初塑性力学の分野で発達したもので、各変形段階における法則あるいは支配方程式を区分的に線形とするものである。この理論の利点は山田が指摘<sup>11), 12)</sup>しているように、線形問題と非線形問題あるいは静的問題と動的問題を問わず、すべての力学分野の統一的な取扱いに適していることである。つまり、基礎方程式がすべて増分形で表示されるならば、非線形問題も弾性問題と同一の手法を適用して解を求めることができ、ただ一つの違いは、変形段階の分割による計算の繰返しのみとなる。

いま、式 (13), (15) において、初期時刻を  $(t-dt)$

にとり、かつひずみ速度を微小時間内  $[(t-\Delta t) \sim (t)]$  で、一定と仮定すれば、

$$\dot{\varepsilon}_{rr}(t) = \frac{d\varepsilon_{rr}(t)}{dt}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}(t) = \frac{d\varepsilon_{ij}(t)}{dt} \dots (18)$$

と表わせ、定積分の演算が可能となる。式 (13), (15) は結局次のように変形される。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr\alpha}(t) &= \sigma_{rr\alpha}(t-\Delta t)e^{-\Delta t/T_{K\alpha}} \\ &+ 3 \frac{d\varepsilon_{rr}(t)}{dt} K_{\alpha} T_{K\alpha} (1 - e^{-\Delta t/T_{K\alpha}}) \dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij\alpha}(t) &= \sigma_{ij\alpha}(t-\Delta t)e^{-\Delta t/T_{G\alpha}} \\ &+ 2 \frac{d\varepsilon_{ij}(t)}{dt} G_{\alpha} T_{G\alpha} (1 - e^{-\Delta t/T_{G\alpha}}) \dots (20) \end{aligned}$$

また

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr\alpha}(t) &= \sigma_{rr\alpha}(t-\Delta t) + \Delta\sigma_{rr\alpha}(t) \\ \sigma_{ij\alpha}(t) &= \sigma_{ij\alpha}(t-\Delta t) + \Delta\sigma_{ij\alpha}(t) \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

なることを考慮すれば、式 (19), (20) から次のような増分応力と増分ひずみの関係式が誘導される。

$$\Delta\sigma_{rr\alpha}(t) = 3 K_{v\alpha} d\varepsilon_{rr}(t) - A_{K\alpha} \sigma_{rr\alpha}(t-\Delta t) \dots (22)$$

$$\Delta\sigma_{ij\alpha}(t) = 2 G_{v\alpha} d\varepsilon_{ij}(t) - A_{G\alpha} \sigma_{ij\alpha}(t-\Delta t) \dots (23)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} K_{v\alpha} &= \frac{1}{\Delta t} K_{\alpha} T_{K\alpha} A_{K\alpha}, \quad A_{K\alpha} = 1 - e^{-\Delta t/T_{K\alpha}} \\ G_{v\alpha} &= \frac{1}{\Delta t} G_{\alpha} T_{G\alpha} A_{G\alpha}, \quad A_{G\alpha} = 1 - e^{-\Delta t/T_{G\alpha}} \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

さらに、式 (12), (14) からは

$$\Delta\sigma_{rr0}(t) = 3 K_0 d\varepsilon_{rr}(t) \dots (25)$$

$$\Delta\sigma_{ij0}(t) = 2 G_0 d\varepsilon_{ij}(t) \dots (26)$$

を得る。

また、式 (4), (5) の関係は、増分応力および増分ひずみに対しても成立すると考えてよいから、それらを式 (22)~(26) に使い、普通の応力増分とひずみ増分の関係マトリックス表示すると、次式で表わされる。

$$\{\Delta\sigma(t)\} = \{\Delta\sigma_0(t)\} + \sum_{\alpha=1}^n \{\Delta\sigma_{\alpha}(t)\} \dots (27)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta\sigma_0(t)\} &= [D_0] \{\Delta\varepsilon(t)\} \\ \{\Delta\sigma_{\alpha}(t)\} &= [D_{v\alpha}] \{\Delta\varepsilon(t)\} - \{\Delta\sigma_{v\alpha}\} \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

であり、それぞれのベクトルやマトリックスの具体的な内容を示せば、

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta\sigma(t)\}^T & \\ &= \{\Delta\sigma_x(t) \Delta\sigma_y(t) \Delta\sigma_z(t) \Delta\tau_{xy}(t) \Delta\tau_{xz}(t) \Delta\tau_{yz}(t)\} \\ \{\Delta\varepsilon(t)\}^T & \\ &= \{\Delta\varepsilon_x(t) \Delta\varepsilon_y(t) \Delta\varepsilon_z(t) \Delta\gamma_{xy}(t) \Delta\gamma_{xz}(t) \Delta\gamma_{yz}(t)\} \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

ただし、 $\Delta\gamma_{xy}$ ,  $\Delta\gamma_{xz}$ ,  $\Delta\gamma_{yz}$  は工学ひずみである。

$$[D_0] = \begin{bmatrix} K_0 + \frac{4}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ & K_0 + \frac{4}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ & & K_0 + \frac{4}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & G_0 & 0 \\ & & & & & G_0 \end{bmatrix} \dots (30)$$

$$[D_{v\alpha}] = \begin{bmatrix} K_{v\alpha} + \frac{4}{3}G_{v\alpha} & K_{v\alpha} - \frac{2}{3}G_{v\alpha} & K_{v\alpha} - \frac{2}{3}G_{v\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{v\alpha} + \frac{4}{3}G_{v\alpha} & K_{v\alpha} - \frac{2}{3}G_{v\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ & & K_{v\alpha} + \frac{4}{3}G_{v\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{v\alpha} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & G_{v\alpha} & 0 \\ & & & & & G_{v\alpha} \end{bmatrix} \dots (31)$$

$$\{\Delta\sigma_{v\alpha}\} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} A_{K\alpha} + 2A_{G\alpha} & A_{K\alpha} - A_{G\alpha} & A_{K\alpha} - A_{G\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ & A_{K\alpha} + 2A_{G\alpha} & A_{K\alpha} - A_{G\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{K\alpha} + 2A_{G\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3A_{G\alpha} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & 3A_{G\alpha} & 0 \\ & & & & & 3A_{G\alpha} \end{bmatrix} \times \{\sigma_{\alpha}(t-\Delta t)\} \dots (32)$$

次に、有限要素内のひずみ増分  $\{\Delta\varepsilon(t)\}$  と節点変位増分  $\{\Delta\delta(t)\}$  とが次の関係で結ばれているものと仮定する。

$$\{\Delta\varepsilon(t)\} = [B] \{\Delta\delta(t)\} \dots (33)$$

式 (33) を式 (28) に用いて、次式を得る。

$$\{\Delta\sigma_0(t)\} = [D_0][B] \{\Delta\delta(t)\} \dots (34)$$

$$\{\Delta\sigma_{\alpha}(t)\} = [D_{v\alpha}][B] \{\Delta\delta(t)\} - \{\Delta\sigma_{v\alpha}\} \dots (35)$$

結局、これらの諸式を仮想仕事の原理に適用すれば、増分形で表わされた剛性方程式が次のように得られる。

$$\{\Delta F\} = [K] \{\Delta\delta\} - \{\Delta F_i\} - \{\Delta F_p\} \dots (36)$$

ここで

$$[K] = \int_V [B]^T [D_v] [B] dV, \quad [D_v] = [D_0 + \sum_{\alpha=1}^n D_{v\alpha}] \dots (37)$$

$$\{\Delta F_v\} = \int_V [B]^T \{\Delta\sigma_v\} dV, \quad \{\Delta\sigma_v\} = \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \Delta\sigma_{v\alpha} \right\} \dots (38)$$

$$\{\Delta F_p\} = \int_V [N]^T \{\Delta P\} dV \dots (39)$$

であり、それぞれ剛性マトリックス、粘弾性変形によるみかけの節点力および物体力による等価節点力を表わす。ただし、 $[N]$  は形状関数である。構造系全体の剛性方程式は全要素について式 (36) を重ね合わせて完成する。

#### 4. 計算手順

任意時刻の粘弾性解を得るには、まず  $t=0$  の初期条件を定める必要がある。それは式 (16) からわかるように弾性解である。つまり、図-1 の各 Maxwell 要素のばねのみが、ひずんだ状態と考えてよい。いまこの解を式 (27) の形、つまり  $\{\sigma_0(0)\}$ 、 $\{\sigma_\alpha(0)\}$ 、 $(\alpha=1, 2, \dots, n)$  それぞれの和として定めておく。以下次の手順にしたがって、段階的に粘弾性解を得ることができる。

- (i) 定まっている応力  $(\sigma_\alpha, \alpha=1, 2, \dots, n)$  を式 (32), (38) に用いて  $\{\Delta F_p\}$  を全要素について計算する。
- (ii) 式 (37) より、全要素の剛性マトリックスを定め、式 (36) を重ね合わせた剛性方程式を解

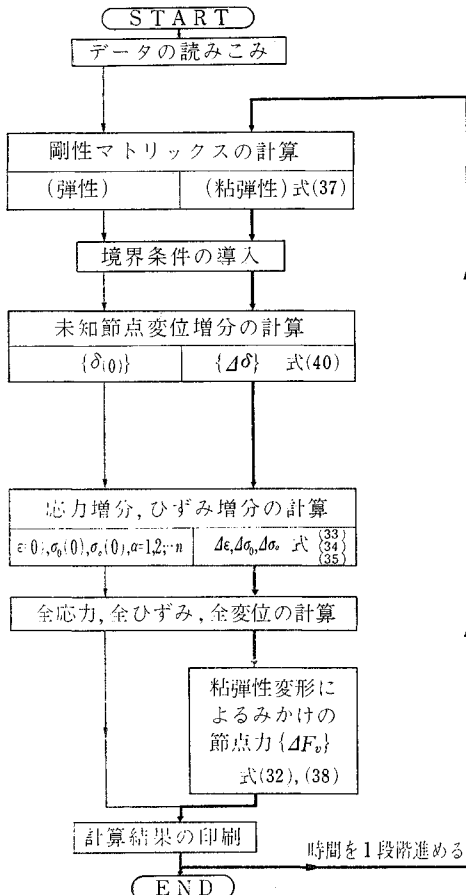


図-2 流れ図

く。

(iii) 式 (34), (35) より、全要素の応力増分  $\Delta\sigma_\alpha$ 、 $\Delta\sigma_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, n$ ) を計算する。

(iv) 前の応力に応力増分をたしこんで新しい応力  $\sigma_0, \sigma_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, n$ ) を得る。

以上 (i)~(iv) の手順を繰返せばよい。また、計算手順の流れをモジュール化して示せば図-2 のとおりである。図からわかるように、粘弾性計算は弾性問題のそれと全く同じ過程を経ており、ただ1つ粘弾性変形によるみかけの節点力計算が付加しているにすぎない。なお、図において細線が弾性計算、太線が粘弾性計算の流れを示している。

#### 5. コンクリートの粘弾性定数

コンクリートの粘弾性的性質は、配合、使用骨材、セメント、含水量ならびに温度、湿度などによって非常に異なる。特にプラスチックなどの粘弾性と違う最大の特徴は材令によって異なることである。これらの影響因子を緩和関数のなかにかに評価するか、それは不可能といっても過言ではない。

本研究では、実験模型に使われたのと同じ材料に対し、クリープ試験ならびに諸々の材料試験が行なわれた。供試体寸法は直径 15 cm、長さ 60 cm とし、配合は水セメント比 0.39、砂-骨材比 0.36、普通ポルトランドセメント 400 kg/m<sup>3</sup> とした。その他諸値を示せば、表-1 のとおりである。

表-1 コンクリート供試体の諸試験値

供試体	スラブ (cm)	材令 (日)	静弾性係数 (kg/cm <sup>2</sup> )	動弾性係数 (kg/cm <sup>2</sup> )
No. 1	9.8	150	296×10 <sup>3</sup>	395×10 <sup>3</sup>
2	11.5	100	279×10 <sup>3</sup>	391×10 <sup>3</sup>
3	7.3	86	283×10 <sup>3</sup>	380×10 <sup>3</sup>

なお、材令とはクリープ試験における載荷日までの日数である。また、載荷後実験終了まで 10°C 前後の温度変化があった。

これら 3 組の試料に関する 100 日間のクリープ測定ひずみ値を乾燥収縮値とともに図-3 に示す。

これらクリープ試験データから緩和関数の各定数パラメータを定めるには、図-1 の一般化 Maxwell モデルと一般化 Voigt モデルが力学的に全く等価である<sup>14)</sup> ことから導かれる。

一般化 Voigt モデルに対応するクリープ関数 (クリープコンプライアンスともいう) は、

$$J(t) = J_0 + \sum_{\alpha=1}^n J_\alpha (1 - e^{-t/\tau_\alpha}) \dots \dots \dots (40)$$

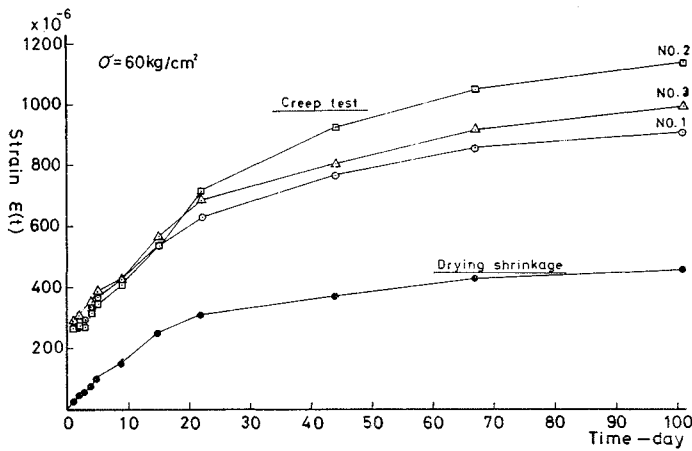


図-3 Creep test & Drying Shrinkage

と表わされ、式(40)を実験クリープ曲線にあてはめることにより、 $J_0, J_n, T_{Ca}$  ( $\alpha=1, 2, \dots, n$ ) が決定される。また、 $J(t), E(t), K(t), G(t), \nu(t)$  は次の関係式で結ばれているから<sup>15), 16)</sup>,

$$\bar{E}(s) \cdot \bar{J}(s) = \frac{1}{s^2} \dots\dots\dots (41)$$

$$\bar{E}(s) = \frac{9\bar{G}(s) \cdot \bar{K}(s)}{3\bar{K}(s) + \bar{G}(s)} \dots\dots\dots (42)$$

$$\bar{\nu}(s) = \frac{3\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)}{6\bar{K}(s) + 2\bar{G}(s)} \dots\dots\dots (43)$$

いま、有効ポアソン比  $\nu(t)$  を一定値  $\nu$  と仮定すれば、 $J(t)$  を得ることにより式(41), (42), (43) より  $K(t), G(t)$  が定められる。ここで  $s$  は変換パラメータ、—はラプラス変換を表わしている。

クリープ関数  $J(t)$  の決定に際しては、実際問題  $n=2$  まで定めれば良いほうであり、またそこまでの実験曲線と十分に良い一致をみることができる。図-3の実験値 No. 1 から乾燥収縮値を除去し、曲線のあてはめにより定められた実験式を示せば、図-4 のとおりである。

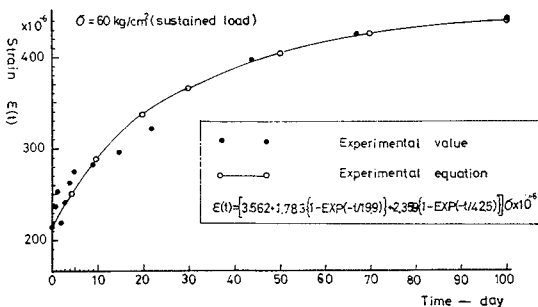


図-4 Creep Test & Curve Fitting

\* I.J. Jordaan & J.M. Illston は厳密な多軸クリープ試験の結果コンクリートの有効ポアソン比がクリープの間変化しなかったと報告している<sup>18)</sup>。

結局、解析に用いる  $K(t), G(t)$  は、 $\nu=0.17$  とし、次のように定められる。

$$K(t) = K_0 + K_1 e^{-t/T_{K1}} + K_2 e^{-t/T_{K2}}$$

$$G(t) = G_0 + G_1 e^{-t/T_{G1}} + G_2 e^{-t/T_{G2}}$$

ここで

$$K_0 = 59\,800 \text{ kg/cm}^2 \quad G_0 = 50\,600 \text{ kg/cm}^2$$

$$K_1 = 61\,100 \quad G_1 = 51\,700$$

$$K_2 = 20\,900 \quad G_2 = 17\,700$$

$$T_{K1} = 10.8 \text{ day} \quad T_{G1} = 10.8 \text{ day}$$

$$T_{K2} = 32.9 \quad T_{G2} = 32.9$$

## 6. PC格納容器の粘弾性解析

### (1) 軸対称体の剛性マトリックス

容器の形状、寸法ならびに構造の概要を 図-5 に示す。実験値と比較するために、物体力を無視し、外力はプレストレスのみを考えた。

容器は、構造ならびに外力の作用状態から、軸対称構造物として解析される。対称性により、容器の対称軸を含む平面内の2つの変位成分だけで、完全にひずみ状態を決定でき、物理的にみれば、平面ひずみ問題とほとんど同じである。特に注意を要する点を列挙すれば、

- (i) 要素の体積は、図-6 に示した generatrix の回転体の体積であるから、すべての積分にこれを考慮する。
- (ii) 4個のひずみ成分、つまり平面ひずみ+円周方向のひずみを考慮する。したがって  $[B]$  は次式で与えられる。

$$[B] = \frac{1}{2J} [B_i \ B_j \ B_m] \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \dots (44)$$

$$[B_i]^T = \begin{bmatrix} 0 & b_i & \frac{a_i}{x} + b_i + \frac{c_i y}{x} & c_i \\ c_i & 0 & 0 & b_i \end{bmatrix}$$

ただし、 $J$  は要素 generatrix の面積。  $a, b, c$  は節点座標値で与えられる。

- (iii) 外力は、要素節点を形成している円の全周にそって作用している力の組み合わせ効果と考える。
- (iv) 結局、剛性方程式は物体力を無視し、増分形で表わせば次式となる。

$$2\pi R \{ \Delta F \} = 2\pi \iint [B]^T [D_v] [B] x dx dy \{ \Delta \delta \} - 2\pi \iint [B]^T \{ \Delta \sigma_v \} x dx dy \dots\dots\dots (45)$$

しかし、本式において、 $[B]$  が座標値  $(x, y)$  の関数となっているため、積分が非常に面倒である。本論では、最も簡単な近似法として、重心点

$$\bar{x} = (x_i + x_j + x_m)/3, \quad \bar{y} = (y_i + y_j + y_m)/3$$

に対する  $[B]$  を計算する手法をとった。剛性方程式は、簡単な次式に変形される。

$$R\{\Delta F\} = [B]^T [D_v] [B] \bar{\alpha} \{ \Delta \delta \} - [B] \{ \Delta \sigma_v \} \bar{\alpha} \Delta \dots \dots \dots (46)$$

(2) 実験模型および計算モデル

模型は実物の 1/5 大のもので、高さ 14 m、直径 8 m。断面構造は 図-5 に示すように、内壁には厚さ 5 mm の

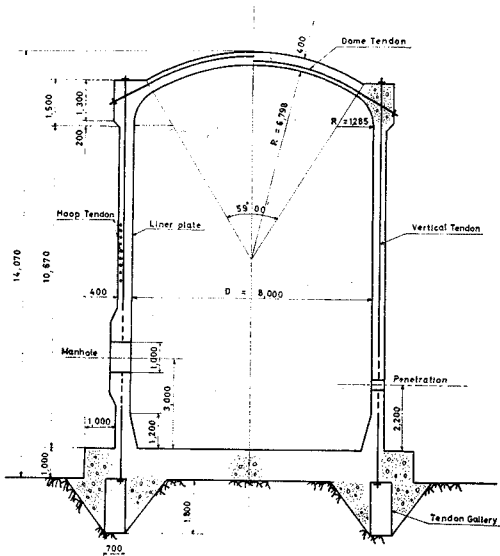


図-5 Experimental Model

ライナープレートがとりつけられており、これは放射性物質の漏洩を完全に防ぐこと、およびコンクリート打設の内型枠の役をなすものである。また、要所にペネトレーションがあり、直径 1 m の開口部が 2 箇所設けられている。

プレストレスを導入するための P C 鋼材は、S.E.E.E.F. 50 型を用い、同筒部鉛直方向が 20 cm ピッチ 132 本。同フープ方向が 6 個のバットレスで支え、120° 交角、平均 15 cm ピッチ、35 段。ドーム部は 30 cm ピッチ鉛直断面内 60° 互相、5 層の配置となっている<sup>17)</sup>。

しかし、実際の計算にこれらの条件をすべて考慮することは不可能であり、またクリープ解析の可能性をテーマとする本論の段階では必要ない。本報告の計算モデルでは以下のような単純化を行なった。

- (i) ライナープレートは考えない。
- (ii) 局所的な縁引張応力を除去するために鉄筋が多量に使われたが、これらを見捨てる。
- (iii) 開口部、ペネトレーションは考えない。
- (iv) 図-5 に示した tendon ギャラリーは無視し、容器は剛な岩盤の上に支えられているものとする。

(v) P C 鋼材を弯曲して配置した場合、シースに圧接されるため、かなり大きな摩擦抵抗力が発生し、その分だけ張力は減少する。それは、 $\alpha$  を弯曲角、 $x$  を長さ、 $\mu, \lambda$  を係数として次式で表わせる

$$T_x = T_0 e^{-\mu\alpha - \lambda x} \dots \dots \dots (47)$$

$\mu, \lambda$  は実験より定められ、 $\lambda = 0.004/m, \mu = 0.250$

(vi) したがって、プレストレスとしての外力は、導入箇所の  $T_0 = 30 t$  のほかに、分布力として  $N_x = T_x d \alpha$  が考えられる。これらを容器外壁面に作用するものとして、各節点に等値させる。

(vii) バットレスは考慮しない。したがって、フーププレストレスは各 P C 鋼材の平均張力が一様に作用した結果と考える。

(viii) 実際のプレストレス導入は、レラクセーション防止のため、区間をいくつかに分け、緊張も何段階かに分けて徐々に行なわれるが、計算ではこれらを一斉にすべての P C 鋼材に加えるものとする。

(ix) P C 鋼材の緊張緩和は、コンクリートのクリープによる節点変位の効果と考える。

以上を考慮した計算モデルを、要素分割して 図-6 に示す。

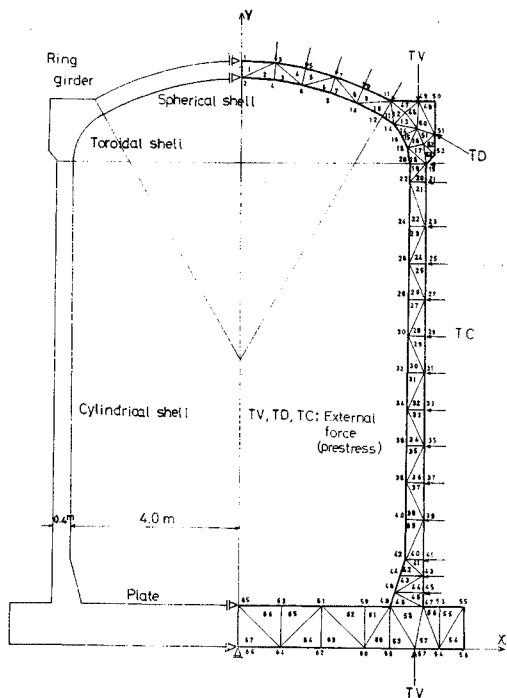


図-6 Idealization of Containment

(3) 実験結果および計算結果

本実験は構造の安全性を検証することに主題があった

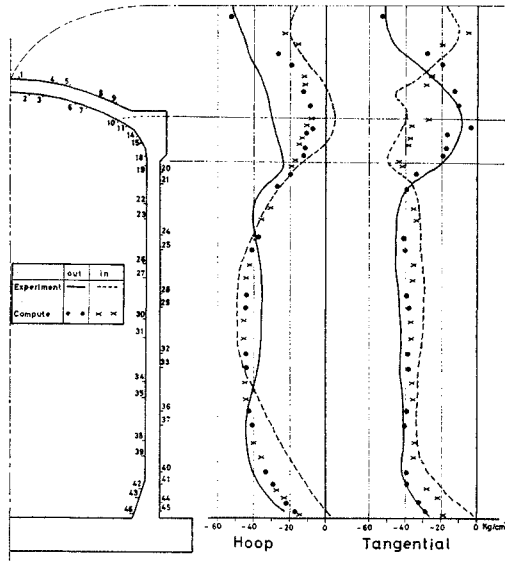


図-7 Distribution of Elastic Stress

こめ、粘弾性挙動に関する測定データは得られていない。したがって実験値、計算値に関する比較は弾性解に良られ、それを図-7に示す。応力分布の傾向に関しては、かなり良い一致を示している。しかしプレストレス導入は、前述のようにかなり細かな段階に分けて行なわれており、全プレストレス導入までは相当の期間を要している。したがって、厳密には図-7の実験値は何らかのクリープ挙動を含んだ数値であることを考慮して考察す

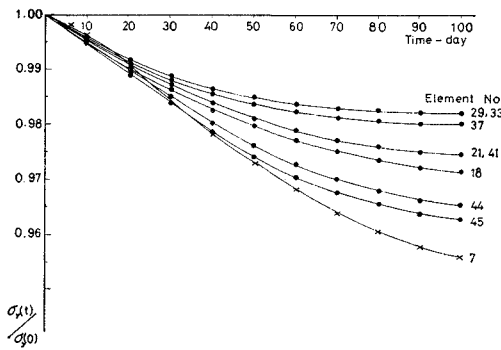


図-8 (a) Tangential Stress Relaxation

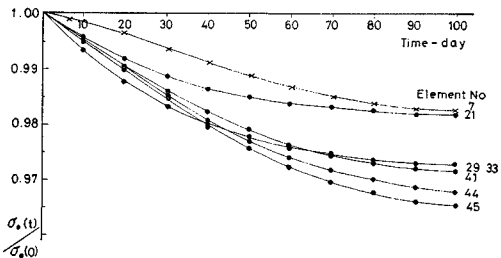


図-8 (b) Hoop Stress Relaxation

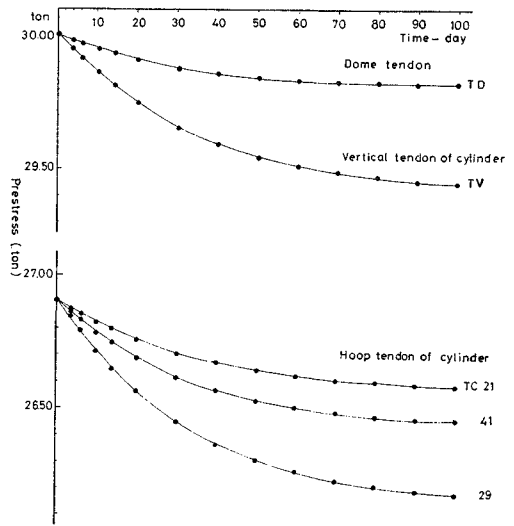


図-9 Loss of Prestress due to Creep of Concrete

る必要がある。

図-8、図-9は粘弾性数値解を図化したもので、それぞれ各要素のプレストレス緩和およびPC鋼材のリラクゼーションを示したものである。これらの結果によれば、応力緩和は、ドーム部に特異な傾向がみられる。シリンダー部に関しては底板に近接する部分ほど大きく、中央部では小さい。さらに、フープ方向応力の緩和パターンが、基礎拘束部と中央部と異なっていることも注目される。PC鋼材のリラクゼーションは、円筒中央部のフープ方向が最も大きく3.0%、円筒垂直方向のもので2.0%、ドームは他に比べ著しく小さい。

普通、単純なプレストレスコンクリート構造物のコンクリートのクリープによるプレストレスロス3~5%とされているから、これらの結果はほぼ妥当なものと考えられる。

## 7. 結 言

線形粘弾性理論の範囲内において、増分形の応力ひずみ関係式さえ得られれば、あとは弾性問題における有限要素法の計算プログラムを用い、きわめて簡単に一般構造物の粘弾性解を得ることを示した。

PC格納容器に対する有限要素法の適用は、数多く試みられているが、粘弾性解析まで応用した例は非常に少ない。またこの種の構造物の厳密な解を得ることは、ほとんど不可能ゆえ、結果に対する考察までは触れなかった。しかし弾性解については実験との比較がなされ、粘弾性解も含め興味ある貴重な結果といえよう。

コンクリート構造物の粘弾性解析には、いまだ多くの問題点が残されている。温度変化、湿度変化、材令、さ

らには非線形性まで含めた一般的な構成方程式の確立は計算技術がここまで進歩した昨今、非常に急がれる問題である。また本論の計算モデルになされた多大の簡略化を、今後いかに評価していくか、鉄筋比とクリープの関係、ライナープレートの効果、等今後の研究課題となっている。

終りに本研究を遂行するにあたり、日本大学教授 関慎吾博士には終始有益なるご助言を頂いた。またクリープ試験に関しては新日本技術コンサルタントのご協力を頂いた。記して、ここに感謝の意を表す。

なお、本論文の数値計算には、東北大学大型計算機センターの NEAC-2200 モデル 700 を使用したことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) Davis, R.E. & H.E. Davis : Flow of Concrete under the Action of Sustained Loads, Jour. of ACI. Vol. 27, March 1931
- 2) Whitney, C.S. : Plain and Reinforced Concrete Arches, Proc. of ACI. Vol. 28, March 1932
- 3) Glanville, W.H. : Creep of Concrete under Load, The Structural Engineer, Vol. 11, Feb. 1933
- 4) Miller, C.A. : Creep Deflection of Reinforced Concrete Beams, Proc. of ASCE, No. ST 12, pp. 2625~2638, Dec. 1970
- 5) 岡田 清 : 鉄筋コンクリート梁のクリープ応力近似解, 土木学会誌, 第 36 卷, 第 5 号, 1951-5
- 6) Neville, A.M. : Creep of Concrete, plain, reinforced and prestressed, north-holland, 1970
- 7) 山崎徳也・彦坂 照 : 鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープ解法, 土木学会論文報告集, No. 167, 1967-7
- 8) Schapery, R.A. : A method of viscoelastic stress analysis using elastic solutions, Jour. of Franklin Ins. Vol. 279, No. 4, pp. 268~289, April, 1965
- 9) Arutyunyan, N. KH. : Some problems in the Theory of Creep, Pergamon Press. 1966
- 10) 山田嘉明・岩田耕司 : 熱粘弾性問題の有限要素法解析, 日本鋼構造協会 第 5 回研究会, マトリックス構造解析講演論文集 1971-6
- 11) 山田嘉明 : 非線形問題解析法の現状と展望, 生産研究, 22 卷, 1 号, 1970-1
- 12) 山田嘉明 : 塑性, 粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館
- 13) Jordaan, I.J., J.M. Illston : The creep of sealed concrete under multiaxial compressive stress, Mag. of Concrete Research, Vol. 21, No. 69, Dec., 1969
- 14) 色部 誠・赤木知之 : Maxwell 材料の粘弾性定数の一決定法, 土木学会論文報告集, No. 213, 1937-5
- 15) 牟岐鹿楼 : 線形粘弾性理論の最近の進歩, 日本機械学会誌, Vol. 64, No. 513, pp. 34~43, 1961-10
- 16) 国尾 武, M.L. Williams : 粘弾性体の力学的挙動, 日本機械学会誌, Vol. 68, No. 552, pp. 83~92, 1967-1
- 17) 大野大明・渡辺 威・長野秀二郎・松井 豊 : プレストレスト コンクリート原子炉格納容器の実験報告, 土木学会誌 Vol. 57, No. 11, 1972-10
- 18) Malone, D.W. & J.J. Conner : Finite elements and dynamic viscoelasticity, Proc. of ASCE, No. EM 4, pp. 1145~1158, Aug., 1971

(1972.10.13・受付)