

河川流の非定常拡散解析における数値誤差の評価

EVALUATION OF NUMERICAL ERRORS OF UNSTEADY
DISPERSION ANALYSIS IN RIVER

村岡 浩爾*・中辻 啓二**
By Kohji Muraoka and Keiji Nakatsuji

1. 緒 言

感潮部を含む市街地河川、およびそれが接続する沿岸海域での水質汚染は、最近深刻な社会問題となっているが、それに対処してこのような汚染水域において対象となる汚濁示標についての的確な予測計算法を確立することが重要である。従来から河道での濃度推定には、一次元非定常拡散方程式を基礎式として差分解析による方法が用いられているが、濃度のように空間的勾配が大きい場合には得られた差分計算結果が解として有用かどうか、しばしば疑義が生ずることがある。すなわち、差分計算の初期値・境界値問題としての安定性および収束性の吟味のみならず、差分方程式の微分方程式に対する近似性の論議が特に非定常解析においては必要であり、洪水追跡のような水理計算では問題とならない差分誤差が濃度計算では無視できず、解は振動しなくとも異常な誤差を含むため、その有限次の差分打ち切り誤差の評価が重要となる。

濃度解析に関する従来からの多くの差分計算では、上述のように安定性とはうらはらの関係にある近似性・収束性の討議が乏しく、著者らは“差分計算すれば微分方程式の解を得る”と即断する誤りを排斥する意味で、いま一度その近似性を検討する必要が感ずるものである。すなわち、一次元非定常拡散方程式のごく簡単な数値モデルを用いて explicit な手法での差分誤差を各差分法について定量的に把握し、Fourier 解析によって理論的に考察すると同時に、差分間隔の合理的な選定および初期濃度分布との関連性などを検討するものとする。

2. 差分化に伴う誤差評価

流水中に含まれる汚濁物質などの物質濃度の挙動を規制する式は、その物質収支を一次元的に考えた保存則より次のような拡散方程式（実際には乱流拡散より移流分散のほうが卓越するから、物理的には移流分散方程式と呼ぶべきであろう）で表わされる。

$$L[c] \equiv \frac{\partial c}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(AD \frac{\partial c}{\partial x} \right) + K \cdot c = 0 \quad \dots \quad (2.1)$$

ここに、 $L[c]$ は微分演算子、 $c(x, t)$ は物質濃度、 $U(x, t)$ は流速、 $A(x, t)$ は流水断面積、 $D(x, t)$ は移流分散係数、 $K(x, t)$ は一般に流れとは独立に濃度に増減をもたらす係数である。式 (2.1) は流速、流水断面積や移流分散係数が時間的・空間的に変動し、かつ複雑な境界を有する場合には、解析的に解くことは困難であり、通常は差分近似で解くことになる。この手法によって従来から数多くの実用計算が行なわれているが、誤差の評価について詳細な検討を加えたものは少なく、分散項を除いた対流方程式の差分誤差に関する若干の評価があるにすぎない。

一般に拡散型方程式は安定性がよく、Richtmyer¹⁾ が示すようにその差分化においては空間変数に関する低次の差分項の有無が安定性に影響をおよぼすことはないが、低次項の差分化に伴う近似誤差が差分間隔によっては物理現象としての分散量をうわまわる結果となる。

Bella-Grenney²⁾ はこの誤差に原因する分布の拡がりを疑似分散係数 D_p で表示し、 $F = U \cdot \Delta t / \Delta x$ を制御することにより D_p を最小にし得ることを示している。また、Robert-Weiss³⁾ は微分方程式の近似から、 $F = 1.0$ にするか、あるいは人為的分散項として $-D_p \cdot \partial^2 c / \partial x^2$ を加えることにより誤差の最小化を計っている。さらに、Fox⁴⁾ は Fourier 級数展開して微分解との対

* 正会員 工博 大阪大学助教授 工学部土木工学科

** 学生会員 大阪大学大学院工学研究科修士課程学生

比から、差分誤差を数値的減衰と数値的分散とに分類し、Bella の指摘した F 値では特別な場合を除いてすべての誤差を覆うことができないことを示唆している。しかしながら、時々刻刻変動する流速に対して差分間隔 Δx あるいは Δt を選ぶことはむずかしく、数値的分散効果が移流項を伴った拡散方程式の適切な数値解析を困難ならしめている。

explicit な差分法においては、従来、時間に関し前進差分、空間に関し中心差分を用いて式 (2.1) は次のような差分式で表わされる（ただし、簡単化のために A , U , D および K は一定とする）。

$$L_{dt}[c]_i^n \equiv \frac{c_i^{n+1} - (c_{i+1}^n + c_{i-1}^n)/2}{dt}$$

$$+ U_i^n \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$- D_i^n \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$- K_i^n \cdot c_i^n = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2.2)$$

ここに, i, n はそれぞれ空間および時間格子点を示す整数である。また, L_{dt} は微分演算子 L の近似差分演算子であると定義するならば, c を十分滑らかな関数として Taylor 展開することにより, 差分方程式 (2.2) の微分方程式 (2.1) に対する差分近似誤差 E は式 (2.3) で表わされる。

$$\begin{aligned}
 E &\equiv L[c] - L_{At}[c] i^n \\
 &= \frac{\Delta t}{2!} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^2}{3!} \cdot \frac{\partial^3 c}{\partial t^3} + \frac{(\Delta t)^3}{4!} \cdot \frac{\partial^4 c}{\partial t^4} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot \Delta t} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + U \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^3} \\
 &\quad + D \cdot \frac{(\Delta x)^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} + O(\Delta t^4, \Delta x^4) \\
 &\qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \cdots (2,3)
 \end{aligned}$$

差分方程式 (2.2) は $G = D \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$ として、 $0 < G \leq 1/2$ の範囲で von-Neumann の安定条件を満足し解は安定であるが、 $\Delta t / (\Delta x)^2 = (\text{一定})$ なる関係を保ちつつ差分間隔が 0 に漸近するならば、式 (2.3) の第 4 項 $(\Delta x)^2 / 2 \Delta t \cdot \partial^2 c / \partial x^2$ が誤差として残り分散を促がす効果を果たす結果、微分方程式の解へ収束しなくなる。また、 $\Delta t / \Delta x = (\text{一定})$ にするならば、 Δt の 0 への漸近にしたがって差分誤差 E も消滅するが安定条件が常に満たされているわけではない。このように、差分間隔 Δx 、 Δt の選び方によっては意図したところの差分解を得られない場合もあるので注意しなければならない。

また、 Δt が有限である限りは常に近似誤差が残ることになり、その近似度との関連性において差分演算子を考えてみる必要がある。いま、十分小さな Δt に対して

$$\|E\| = \|L[\zeta] - L_{eff}[\zeta]\|_n \leq (A t)^{\nu} \cdot M \quad \dots \dots (2.4)$$

ここに, $\| \cdot \|$ はノルムを示し, M は $4t$ によらない定数

のとき、 $L_{4t}[c]_i''$ を正確度 ν の差分近似と定義するならば、式 (2.2) は一次の正確度 ($4t$)¹ に対してのみ近似性を満たしているわけで、2 次微係数以下の微分項が誤差として分散効果を及ぼすことになり、実際の物理現象である分散項との対比においてその誤差を評価すべきであろう。

すなわち、Bella-Grenney のいう疑似分散係数 D_b は近似誤差式(2.3)中の2次微係数項の時間増分を定量的に把握するものであり、Taylor の change of moment method を用いるならば、

$$D_p = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\begin{array}{c} \int_{-\infty}^{\infty} c \xi^2 d\xi \\ \int_{-\infty}^{\infty} c \xi d\xi \end{array} \right), \quad \xi; \text{ 空間パラメータ} -$$

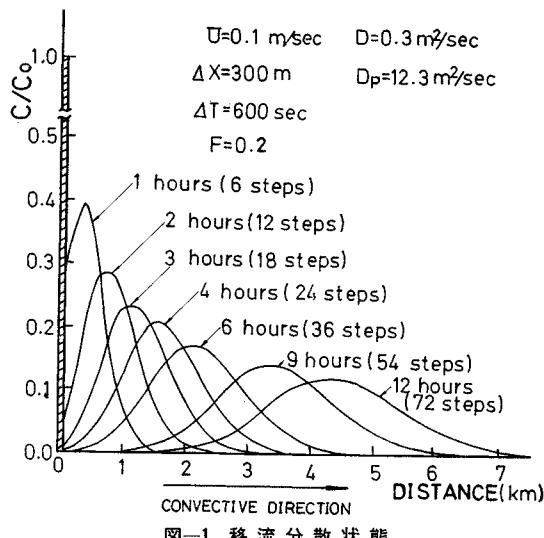
.....(2,5)

で表わされ、分散状況を示す指標となり得る。

いま、流速 $U=0.1 \text{ m/sec}$ 、分散係数 $D=0.3 \text{ m}^2/\text{sec}$ の場合の長方形濃度分布の移流分散状態を、 $x=300 \text{ m}$ $t=600 \text{ sec}$ の後方差分で求めたのが 図-1 であり、時間経過とともに著しい分散が見られ、その分散係数 D_p は式 (2.5) から $12.3 \text{ m}^2/\text{sec}$ と求められる。この値は実際の現象において過大の分散を示しており、その原因は上述の差分誤差の結果みかけ上あらわれてきたことがわかる。

疑似分散係数 D_p は各差分法について、式 (2.5) を離散的に計算することにより求められ、図-2 に示す。ここに、 Δx , Δt は 図-1 と同じ値を用い、また流速 U は 0 から有限値まで変動するので、 D_p は U および $F=U \cdot \Delta t / \Delta x$ の関数で表わされる。

D_p が負となる中心差分および前進差分は、負の分散



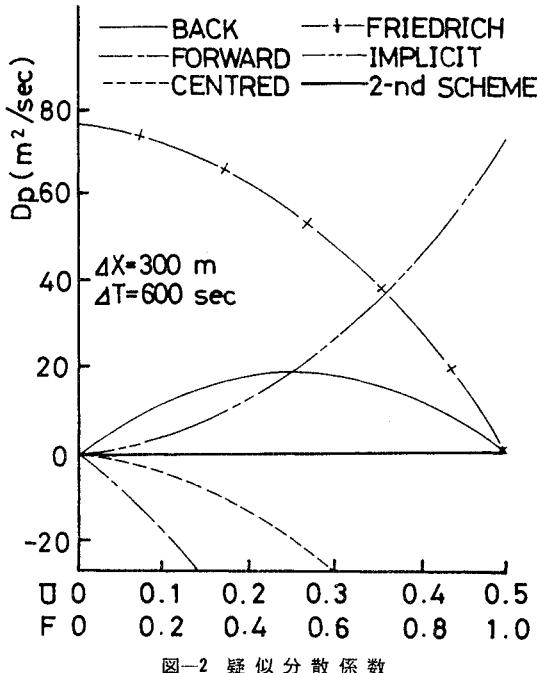


図-2 疑似分散係数

係数を有する拡散方程式を近似していることになり、時間とともに解は対数的に増大する不安定な差分法といえる。また、 D_p が有限値であることは各演算時間ごとに分散が常に増大することを意味し、 D_p が 0 になるように Δx , Δt を合理的に流速 U に対して選ぶか、Robert らのいう人為的分散項 $-D_p \cdot \partial^2 c / \partial x^2$ を加算することにより、 U の値にかかわらず疑似分散係数が 0 となる 2 次微係数項まで考慮した差分方程式を導くかの二つの方法が考えられるが、それでもなお差分近似誤差は $(\Delta t)^2$ 以下の項で残り分散は存在し、定量的に評価する必要がある。

3. 差分法の解析的考察

(1) Fourier 解析

移動分散方程式 (2.1) を Fourier 変換して、 $x-t$ 平面を $k-t$ 平面（波数-時間平面）に写像することによって、解析解と差分解との誤差を比較することが可能となる。

差分近似法は微分商を差分商で置き換えるという着想のもとに、有限個の既知関数による線形連立方程式に微分方程式を変換する手法である。すなわち、その一般形は explicit な差分法では次のように表わされる⁵⁾。

$$c(x, t + \Delta t) = \sum_{|\alpha| \leq n} Q_\alpha(\Delta x) \cdot c(x + \alpha \Delta x, t) \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

いま、Fourier 変換

$$\hat{c}(k, t) = \mathcal{F}[c(x, t)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot c(x, t) dx \dots \dots \dots (3.2)$$

を行なうと、式 (3.1) は次のようになる。

$$\hat{c}(k, t + \Delta t) = \hat{Q}(\Delta x, k \Delta x) \cdot \hat{c}(k, t) \dots \dots \dots (3.3)$$

ここに、

$$\hat{Q}(\Delta x, k \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leq n} Q_\alpha(\Delta x) \cdot \exp[i \alpha k \Delta x]$$

すなわち、濃度分布 $c(x, t)$ は $k-t$ 平面で表わされる種々の波数成分で構成され、增幅因子 \hat{Q} で各波数別に伝達されるから、計算ステップでの濃度分布形状の変動は增幅因子の概念を導入して、各波数成分の増減ならびに位相のずれを知ることにより把握できる。

この增幅因子 $\hat{Q}(\Delta x, k \Delta x)$ は各差分法に対して、波数 k および空間差分間隔 Δx の関数として求められ、計算ステップあたりの增幅因子 $|\hat{Q}|$ 、ならびに位相のずれ ϕ はそれぞれ次のように表わされる。

$$|\hat{Q}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[\hat{Q}] + \operatorname{Im}^2[\hat{Q}]} \dots \dots \dots (3.4)$$

$$\phi = \arctan\{\operatorname{Im}[\hat{Q}] / \operatorname{Re}[\hat{Q}]\} \dots \dots \dots (3.5)$$

ただし、 $\operatorname{Re}[\hat{Q}]$, $\operatorname{Im}[\hat{Q}]$ はそれぞれ \hat{Q} の実数部、虚数部を示す。

差分方程式 (3.1) を逐次近似計算することにより、時刻 $t + n \Delta t$ における濃度分布を初期値問題として解くわけであるが、空間差分間隔 Δx の 0 への漸近にしたがって微分方程式の解に近づくか否かの収束性、および計算の繰り返し過程における安定性は、この增幅因子 \hat{Q} が全波数成分にわたって有界にとどまるとき満足されることになる。

次に、微分方程式 (2.1) で $K \cdot c$ 項を省略した式の Fourier 変換を簡単にするために、 U, D, A を一定とするならば、式 (2.1) は式 (3.6) に変換される。

$$\frac{d\hat{c}(k, t)}{dt} + U \cdot ik \hat{c}(k, t) = -D \cdot k^2 \cdot \hat{c}(k, t) \dots \dots \dots (3.6)$$

式 (3.6) は波数 k をパラメーターとする常微分方程式の初期値問題であり、初期条件 $\hat{c}(k, 0) = \hat{f}(k)$ のもとで解けば、式 (3.7) が得られる。

$$\hat{c}(k, t) = e^{(-k^2 D - i k U)t} \cdot \hat{f}(k) \dots \dots \dots (3.7)$$

すなわち、解析解は固有速度 U により移流し、その分布形状は移流分散係数 D で拡散することになる。そしてその解析解の增幅因子 \hat{Q}_{anal} は次のように表わされる。

$$\hat{Q}_{\text{anal}} = e^{-k^2 D \Delta t} \cdot \exp[-i k U \Delta t] \dots \dots \dots (3.8)$$

したがって、 n 回演算を繰り返したのちの差分による誤差 Δ_k^n は、式 (3.3) および式 (3.8) から各波数に対して式 (3.9) のように求められる。

$$\Delta_k^n = \left\{ 1.0 - \frac{|\hat{Q}|^n}{e^{-nk^2 D \Delta t}} \cdot \exp[in(\phi + k U \Delta t)] \right\} \cdot \hat{Q}_{\text{anal}} \dots \dots \dots (3.9)$$

すなわち、差分法に伴う誤差は (i) 数値的減衰・振動 (増幅係数 $|\hat{Q}|^n/e^{-nk^2Dt}$ が 1.0 より小さいために生じる数値的減衰、また大きいために生じる安定性の欠如), (ii) 数値的分散 (各波数別の位相差 $\phi - kU \Delta t$ による分散効果、およびその結果としての分布形状の変形) に分類でき、各差分法の増幅因子を比較検討することにより、その差分法の有用性を論議できる。

(2) 対流方程式における増幅因子と位相誤差

前述のように移流項の差分化に伴う誤差が分散項の差分近似に対比して重要となり、その誤差の定量的な把握が必要である。したがって、それぞれの差分誤差の特色を明確にするため、ここでは分散項を除いた対流方程式の各種の差分化について述べておこう。

a) 一次正確度差分法

$$c_i^{n+1} = c_i^n + F \cdot \{(1-\tau) \cdot c_{i-1}^n + \tau \cdot c_i^n\} - F \cdot \{(1-\tau) \cdot c_i^n + \tau \cdot c_{i+1}^n\} \quad \dots \dots (3.10)$$

ここで、 $\tau=1.0$ のときは後方差分法 (1st-Backward 法)、 $\tau=0.5$ のときは中心差分法 (1st-Centred 法) を示す。前述の近似誤差としての分散項が不安定性を覆い隠しており、 $F \leq 1.0$ の条件下では安定な差分法であり、その誤差は $O(\Delta t, \Delta x)$ である。

b) 二次正確度差分法

① 中心差分法 (2nd-Centred 法)

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \frac{F}{2} \cdot (c_{i+1}^n - c_{i-1}^n) + \frac{F^2}{2} \cdot (c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n) \quad \dots \dots (3.11)$$

式 (2.3) 中の時間に関する 2 次微係数誤差を $c_{tt} = U^2 c_{xx}$ なる関係を用いて、空間的に 3 点挿間で近似することにより精度・安定度ともに高めた差分法で $E = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ である。したがって、疑似分散係数 D_p は F の値にかかわらず常に 0 となる。

② Leap-Frog 法 (L-F 法)

$$c_i^{n+1} = c_i^{n-1} - F(c_{i+1}^n - c_{i-1}^n) \quad \dots \dots (3.12)$$

時空間とともに中心差分をとる手法で $E = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ となるが、偶数奇数時間 step での解が結合しないため、弱い不安定性が生じる可能性があり平滑化を行なう必要があるが、増幅因子は常に 1.0 で数値減衰はない。

③ Crank-Nicolson 法 (C-N 法)

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \frac{F}{2} \cdot \left\{ \frac{c_{i+1}^{n+1} + c_{i+1}^n}{2} - \frac{c_{i-1}^{n+1} + c_{i-1}^n}{2} \right\} \quad \dots \dots (3.13)$$

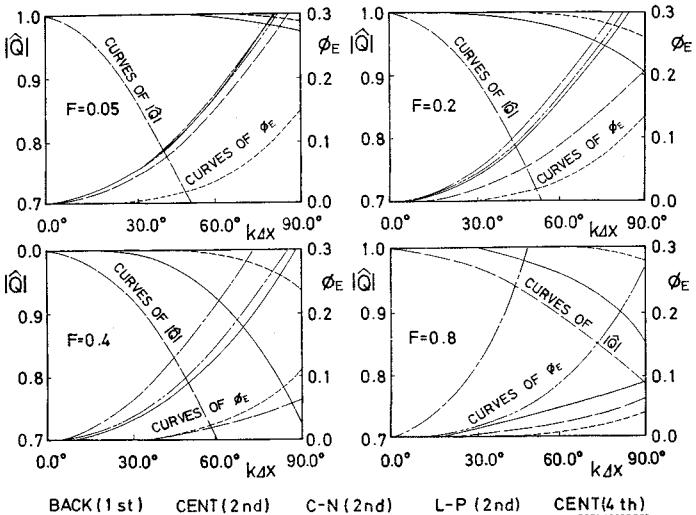


図-3 数値的減衰と位相誤差 (対流方程式の場合)

implicit な方法であり差分間隔の選定が安定条件の拘束から除かれるが、多元連立一次方程式を解く必要があり、演算時間が増大する。また、多次元場への拡張がむずかしい。

c) 四次正確度差分法 (4th-Centred 法)

$$\begin{aligned} c_i^{n+1} = & c_i^n - \frac{F}{2} \cdot (c_{i+1}^n - c_{i-1}^n) \\ & + \frac{F^2}{2} \cdot (c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n) \\ & + \frac{F - F^3}{12} \cdot (c_{i+2}^n - 2c_{i+1}^n + 2c_{i-1}^n - c_{i-2}^n) \\ & - \frac{F^4}{24} \cdot (c_{i+2}^n - 4c_{i+1}^n + 6c_i^n - 4c_{i-1}^n - c_{i-2}^n) \end{aligned} \quad \dots \dots (3.14)$$

分散項の四次正確度差分の対比から、式 (2.3) 中の三次微係数までの時間差分誤差を空間差分に展開して $O(\Delta t^4, \Delta x^4)$ の誤差まで精度を高めたものである。

以上、対流方程式の各差分法を表記したが、各差分法に対する Δx 距離移流される間での増幅因子 \hat{Q} 、位相誤差 $\phi_E = (\phi + kU \Delta t)/kU \Delta t$ は、各波数をパラメーターとして求められ 図-3 のように表わされる。この図によって、以下に差分誤差の特性を検討する。

(A) 増幅因子について

$F = (U \cdot \Delta t / \Delta x)$ が 1.0 に、あるいは $k \Delta x (= 2\pi \cdot \Delta x / L)$ が 0.0 に漸近するにつれ、増幅因子は 1.0 に、また位相誤差は 0.0 になり安定条件内で近似度は増進されるが、波長が差分法で表わされる限界波長 (すなわち、空間差分間隔の 2 倍) 近くで、最大となる数値的減衰が生じる。

特に、一次差分法における増幅因子の減少は顕著であ

り急激な数値的減衰をもたらし、 F を 1.0 に選ばない限りは精度を必要とする計算には不適当な差分法であるといえる。

また、L-F 法、C-N 法では増幅因子は波数に関係なく、常に 1.0 で数値減衰なしに伝播されるが、境界条件などのほかの要因に由来する高波数成分まで伝達することになり、弱い振動・発散の原因となるおそれがある。こういった面からみれば、二次あるいは四次の中心差分法は高波数成分ではある程度の数値的減衰はあるが、安定性の点から有用であるといえる。しかも、 F が 0.05 のように小さくなるにつれ、増幅因子の近似度が増大し、 Δx の間隔を十分大きくとれる利点がある。

(B) 位相誤差について

有限差分法においては、限界波長以下の短い波長成分は打切り誤差として考慮されないが、波長が $2\Delta x$ よりも大きい場合においても固有速度 U により移流される波長成分は低波数成分に限られ、限界波長では全く移流されない。そのため位相誤差として分散現象を生じ、その結果数値的減衰をもたらすことになる。この効果が疑似分散係数 D_p が 0 であるにもかかわらず、二次差分法で分散が生じる原因であり、その位相誤差は四次差分法の場合に比べて数倍大きい。

L-F 法、C-N 法では、この全く移流されない限界波長成分をも増幅因子 $|\hat{Q}|=1.0$ で伝播することになり、計算進行に伴って位相誤差が集積し振動する可能性がある。

特に、式 (3.9) より明らかなように、数値的減衰の差分誤差への影響は演算繰り返し回数の累乗で表わされるのに対し、数値的分散の影響はその積で表わされる。したがって、低波数成分の卓越するガウス曲線濃度分布の計算では、数値的分散の効果が、より支配的な要素となり、図-3 から判断して $k\Delta x$ が約 $\pi/4$ より小さな波数成分で F 値に関係なく位相誤差が非常に小さい四次中心差分法が有用であるといえる。

このように四次中心差分法において、一次あるいは二次差分の場合の F 値より小さな F 値を選んでも、すなわち Δx を数倍にとっても、同程度の近似性を満たせることは、数値計算の多次元場への拡散を考えるとき、記憶容量および演算時間の点からも経済的で有用である。すなわち、時間差分間隔を $1/2$ にとり計算するには 2 倍の演算を必要とするが、空間差分間隔を $1/2$ とすると少なくとも 2^n 倍（ただし、 n は次元数）の演算時間、記憶容量を必要とするからである。

(C) 変動流場での誤差について

流速 $U(t)$ が時間的に変動する場合の誤差特性を考える。波数 k に対する N 回演算後の誤差は、式 (3.9) の類推から、

$$\begin{aligned} \Delta_k^N &= \{1.0 - H |\hat{Q}_n| e^{-Nk^2 D \Delta t} \\ &\quad \cdot \exp[i \sum_{n=1}^N (\phi_n + k \cdot U(t) \Delta t)]\} \cdot \hat{Q}_{\text{anal}} \end{aligned} \quad \dots \quad (3.9 \text{ a})$$

で表わされる。これが誤差をもたないためには、各演算時において $|\hat{Q}_n|=1$ および $\phi_n = -k \cdot U(t) \cdot \Delta t$ であることが必要であるが、 \hat{Q}_n および ϕ_n はともに $F = U(t) \cdot \Delta t / \Delta x$ の関数であることを考えれば誤差をなくすることは不可能である。

$U(t)$ が正弦振動のように周期性がある場合には、ちょうど一周期目の時刻では見かけ上誤差が生じないことがある。これに必要な条件はまず各演算時で $|\hat{Q}_n|=1$ であることで、これは C-N 法、L-F 法の差分法を適用することで満足できる。次に位相に関しては任意の時刻の位相差 $(\phi_n + k \cdot U(t) \cdot \Delta t)$ の正負が $U(t)$ のそれと対応するため、一周期後の累積誤差が消滅するわけである。しかし、これは $U(t)$ の周期パターンが正負の領域で同じ形である場合に限られ、実際の潮汐河川では複雑な周期性と変断面効果があるため、実計算では個々の演算で数値誤差を小さくする高精度の計算法を適用すべきであることはいうまでもない。

(3) 初期濃度分布と空間差分間隔との関連性

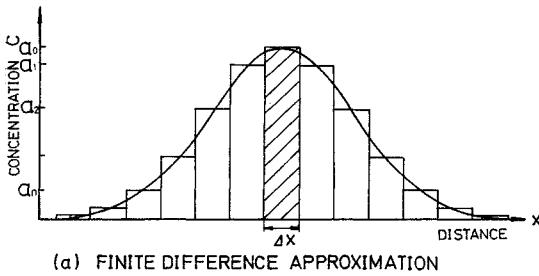
差分法における差分間隔は、分布形状の波数帯における限界波長との関連において適切かどうかで決定される。したがって、このためには初期分布形状に対応する空間差分間隔 Δx の選定を合理的に行なうことが重要となる。すなわち、式 (3.3) を変形すると、

$$\hat{c}(k, n \Delta t) = \hat{Q}^n(\Delta x, k \Delta x) \cdot \hat{f}(k) \quad \dots \quad (3.15)$$

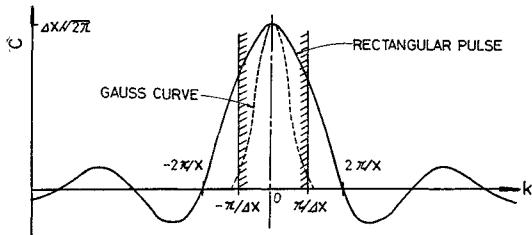
が得られる。式 (3.15) は、初期状態で $\hat{f}(k)$ なる波数成分を有する分布形状は、増幅因子 \hat{Q} の n 乗で伝達されて $n \Delta t$ 時間後には $\hat{c}(k, n \Delta t)$ なる波数成分で表わされる分布形状となることを示している。すなわち、 $x-t$ 平面での分布形状は Fourier 変換され $k-t$ 平面上に写像され、増幅因子で伝播された後、再び逆変換して $x-t$ 平面上に分布を得ることとなる。この際 Δx にかかる filter 作用が増幅因子を乱して誤差を生ずる原因となる。

前項に述べたように、差分方程式において伝達される最小波長は $2\Delta x$ であり、それ以下の波長成分は全く考慮されず、初期分布とは少し異なった分布を計算していくことになる。これを $k-t$ 平面で考えるならば、限界波長 $2\Delta x$ に対応する波数帯 $(-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x)$ （これを有効波数成分領域と称する）を越える高波数成分が逆変換で考慮されないことになり、これによって高波数成分に基づく振動・不安定性は取り除けるが、その波数打切り誤差に原因するひずみや減衰が増大することになる。

例 1 ガウス分布の場合：



(a) FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION



(b) FOURIER TRANSFORM OF INITIAL CURVES

初期分布形状として低波数成分の卓越する次式で示されるガウス曲線を選び、 Δx の選定法を一般的に検討してみよう。

$$c(x) = a_0 \cdot e^{-Ax^2} \dots \dots \dots (3.16)$$

有限差分では、この曲線は長方形パルス $P(x)$ の結合として、

$$c(x) = a_0 \cdot P(x) + \sum_{m=\pm 1}^{\pm \infty} a_m \cdot P(x+m\Delta x) \dots \dots \dots (3.17)$$

ここに、

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x+\Delta x/2) - P(x-\Delta x/2) \\ &= \begin{cases} 0, & |x| > \Delta x/2 \\ 1, & |x| \leq \Delta x/2 \end{cases} \end{aligned}$$

によって表わされる。この状態を 図-4(a) に示す。ガウス曲線の Fourier 変換はまたガウス曲線となるが、式 (3.17) の Fourier 変換は、

$$\hat{c}(k) = \frac{2 \sin(k \Delta x/2)}{k} \left\{ a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2 a_m \cos(mk \Delta x) \right\} \dots \dots \dots (3.18)$$

となり、 Δx を十分小さくすれば、前述の有効波数成分領域に含まれる形でガウス曲線 (図-4(b) 破線) に近づいていく。これより Δx の選定に当たって満足すべき条件として、次の二点が考えられる。すなわち、(i) 長方形パルス結合が十分にガウス曲線を近似していること、(ii) 長方形パルス結合の Fourier 変換後の波数曲線が十分な精度で有効波数成分領域 $|k| < \pi/\Delta x$ に含まれることである。前者はパルス結合による分布の尖度がガウス分布の 3.0 程度になることが要求されるが、計算結果ではこれは多くの場合緩い条件となる。したが

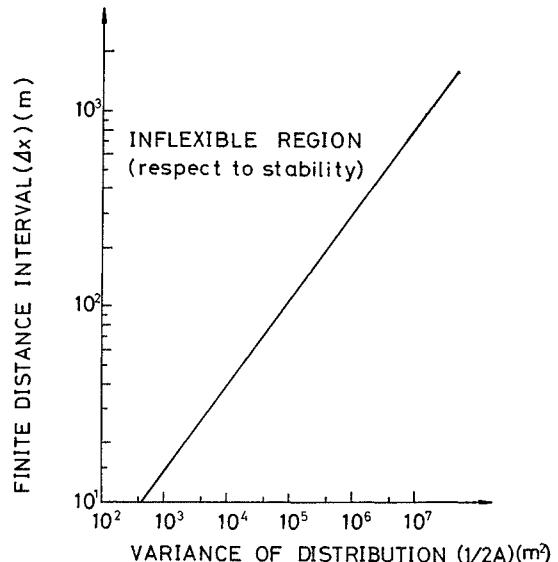


図-5 初期濃度分布と最適差分間隔との関係

って Δx の選定には (ii) の条件が支配的となる。

增幅因子を考慮して精度高く差分計算するには、図-4(b) の破線で表わす曲線の分布 $\hat{c}(k)$ のうちピーク値 $\hat{c}(0)$ の 1/10 以上の波数成分が $\pm \pi/4 \Delta x$ 以内の有効領域 (3.2) で述べた四次差分法で $k \Delta x \equiv \pi/4$ が数値的減衰・分散とともに許容誤差範囲であることにに基づいて得られる領域) 内に収まる必要があり、これを条件とすれば Δx の限界値が規定される。

図-5 はガウス曲線式 (3.16) における分散 $1/2A$ に対する Δx の限界値 (最大値) を示すもので、直線の左側領域の条件下では解が振動し数値誤差が増大することを意味する。実用計算に当たっては、与えられた初期分布形状の最も波数の高い曲線部分に着目し、それをガウス曲線で近似して 図-5 を用いればよい。

例 2 長方形パルスの場合 :

初期分布形状が長方形パルスで与えられる場合を考えよう。長方形パルス形状は式 (3.17) の右辺第1項までで表わされ、これは 図-4(a) の斜線を施した長方形で示される。これを Fourier 変換すれば式 (3.18) の右辺第1項で表わされる 図-4(b) の実線で示す曲線となる。このように長方形分布では Δx をいかに小さく選んでも有効波数成分領域を越える波数成分が常に存在し、これを逆変換するとき高波数成分の省略に基づく負の値を含む分布形状が得られることになり、図-4(a) の長方形パルスには戻らない。

このことは長方形パルス分布を事実上差分計算することは、変動する流速に対して常に F 値が 1.0 となるように Δx , Δt を選ぶ場合を除いて不可能であることを意味し、実際問題として拡散物質の瞬間投入などを数値計

算することは不適当であるといえる。ただ瞬間投入といえども実際には一次元近似の河道ではある程度の空間的分布を有すると考えてよく、曲線分布近似におきかえて差分計算を進めるか、もしくは流れを等流近似して解析解を重ね合わせ、ある程度分散が進んだ後、差分計算に含ませるというような工夫を講ずることが必要となろう。

(4) 各差分法による濃度分布計算

以上述べた増幅因子および有効波数成分領域の効果が $x-t$ 平面での濃度分布形状にどのように影響をおよぼすかを対流方程式を用いて検討する。

a) 長方形濃度分布(図-6)

初期分布形状として長方形濃度分布を与えて、各差分法により計算した分布形状を比較する。ここで、差分間隔はこの種の実用計算では一般的と考えられる値として $\Delta x=300 \text{ m}$ を採用し、また流速 U は 0.1 m/sec としてある。ただ移流するだけで分布形状は変化しないはずの対流方程式の計算にもかかわらず、数値減衰は非常に大きく、12 時間後の分布では 1 次後退差分の場合 $F=0.2$ のとき 12.5% 、 $F=0.6$ のとき 16.5% 程度にピーク濃度は減少し、計算ステップごとにそれぞれ疑似分散係数 $12, 6 \text{ m}^2/\text{sec}$ で拡がる。

二次、四次差分ではピーク濃度はそれぞれ 27% 、 37.5% 程度に減衰はおさえられるが、人為的分散項の加算

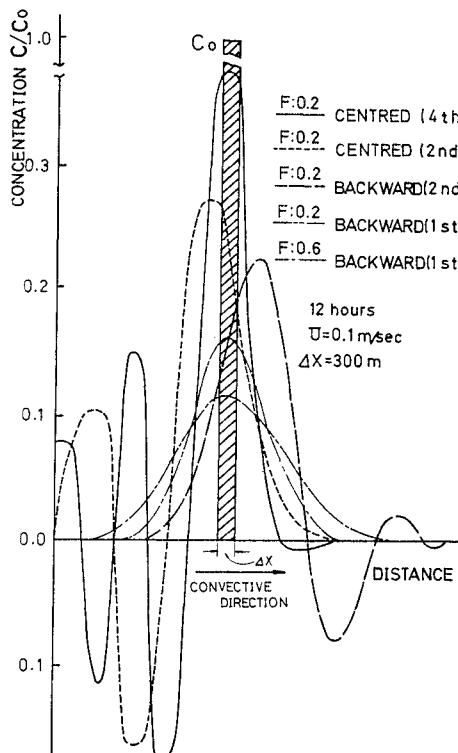


図-6 濃度変化(長方形分布の場合)

に原因する負の濃度が初期計算段階で発生するのは物理的に矛盾することであり、またこの負の濃度は振動の原因ともなる。これは前述の打切り波数誤差に原因するもので、各波数成分の濃度分布への貢献度が比較的大きい高波数成分を省略して計算したためであろう。このように、長方形分布形状の差分計算は異常な減衰・分散で表わされる誤差を含み近似計算できないといえる。

また、一次中心差分法では解は発散し、C-N 法では振動するため、図-6 には併記していないが、前者は負の拡散係数をもつ微分方程式を近似しているからであり、また後者は implicit な方法で多元連立一次方程式 $[a][c^{n+1}] = [c^n]$ を解く場合に、右辺行列に 0 要素を含むために早期計算段階で濃度 c が負となる場合が生じる結果、分布形状がひずみ、それが繰り返され振動するものと思われる。

b) ガウス状濃度分布(図-7)

次に、低波数成分の卓越するガウス分布形状を初期条件として与えた場合の各差分法の有用性について検討する。

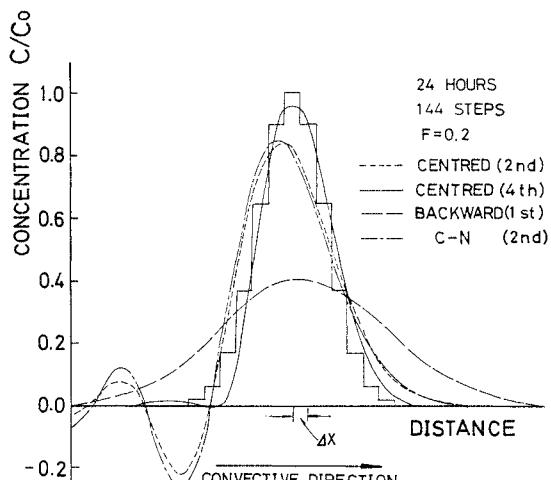


図-7 濃度変化(ガウス分布の場合)

一次差分近似は二次差分近似に比較して、減衰度および分散度は非常に大きく、ピーク濃度は 24 時間後の分布では 40% 程度に減少するが、これは図-3 の増幅因子 $|Q|$ の減衰より明らかであり、一次差分近似では $F=1.0$ としない限りは正しく計算されない。

また、二次差分と四次差分との濃度分布形状の相違から増幅因子よりもむしろ位相誤差がより支配的な要素となり得ることがわかる。このことは増幅因子が 1.0 で減衰が全くない C-N 法と、その減衰が $k \Delta x > \pi/4$ なる領域で存在する二次中心差分とを比較した場合、その分布形状がほぼ相似していることから理解できる。

したがって、位相誤差をできるだけ最小にし得る高次

差分法を考える必要があり、図中の実線で示される四次中心差分では数値的分散および位相誤差に伴う減衰は非常に小さく、演算の繰り返しにおいても十分な精度で近似できる。ただ、濃度が負となる場合がなお生じるが、二次差分に比較して c_{\max}^-/c_{\max}^+ の値は非常に小さく、空間差分間隔 Δx を初期濃度分布形状を考慮して適切に定めることにより、誤差の容認範囲で解決できるであろう。

c) 空間差分間隔の濃度分布への影響(図-8)

四次中心差分法を用いて、空間差分間隔 Δx の選定が濃度分布へ与える影響を調べたのが図-8である。

初期ガウス分布の標準偏差 6.36×10^2 m より図-5を用いて得られる限界適用値 $\Delta x = 300$ m 以下では、差分解の近似度は非常に多く分散はみられないが、 $\Delta x = 600$

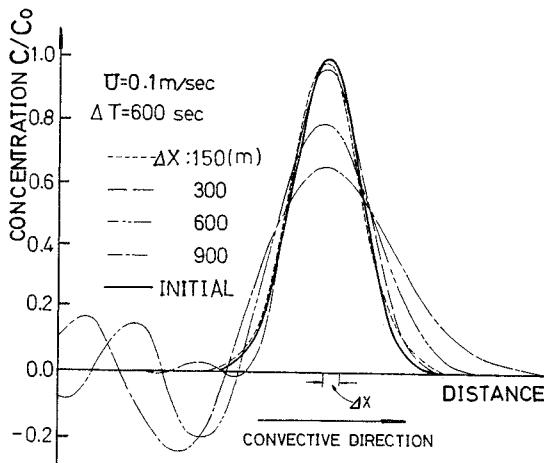


図-8 空間差分間隔の濃度分布への影響

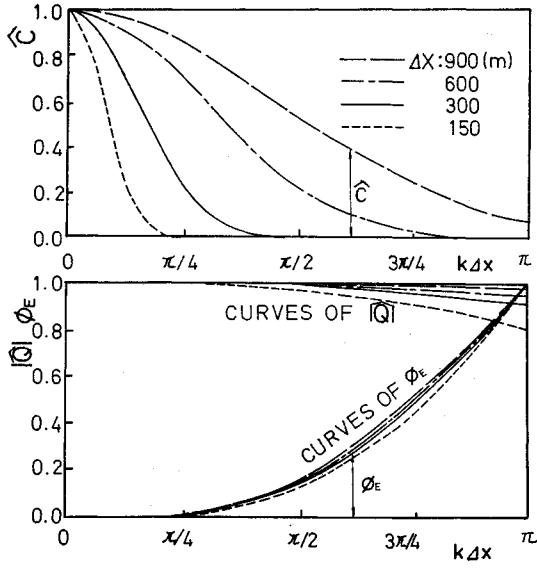


図-9 空間差分間隔と \hat{c} , $|\hat{Q}|$, ϕ_E との関係

m あるいは 900 m の場合には負の濃度が増大する結果、濃度分布形状は上流側で振動してひずむことになる。

いま、横軸に $k \Delta x$ を、縦軸に Δt 時間あたりの增幅因子 $|\hat{Q}|$ 、位相誤差 ϕ_E および初期濃度分布の係数関数 \hat{c} を Δx をパラメーターとして示したのが図-9である。これは有効波数成分領域 ($|k \Delta x| \leq \pi$) 内での \hat{c} の拡がりを表わし、たとえば Δx を 300 m 以下に選んだ場合の波数成分は $|k \Delta x| \leq \pi/3$ の範囲にあり、 $|\hat{Q}|$, ϕ_E で表わされる誤差は非常に小さく伝達されるのに対して、 Δx が 300 m 以上の場合の波数成分の拡がりは大きく、 $\Delta x = 900$ m では $\hat{c} = 0.4$ である波数成分は、增幅因子 $|\hat{Q}| = 0.98$ および位相誤差 $\phi_E = 0.28$ の誤差を伴って伝達される。したがって、図-8 の分布のひずみは增幅因子による伝達誤差よりもむしろ、Fourier 変換された波数成分の有効波数領域内での拡がりに原因すると思われる。

4. 移流分散方程式の差分化

移流分散方程式において移流項に基づく差分誤差を除去するように、すなわち F 値を 1.0 にとり分散項を中心差分すれば、式 (2.2) は差分法に関係なく explicit な場合には次のようになる。

$$c_i^{n+1} = c_{i-1}^n + G(c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n) \dots \dots (4.1)$$

ここに、 $G = D \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$

增幅因子は Fourier 変換して求められて、

$$\begin{aligned} \hat{Q}(k \Delta x) &= 1 - (1 + 2G) \cdot (1 - \cos k \Delta x) \\ &\quad - i \cdot \sin k \Delta x \end{aligned} \dots \dots (4.2)$$

であり、 $k \Delta x$ が $[0, \cos^{-1}\{G/(G+1)\}]$ 内にあれば、 $|\hat{Q}| \leq 1.0$ で安定であるが、それ以外の領域では G が拡散方程式の安定条件 $|G| \leq 1/2$ 内にあっても発散現象を呈する不安定な差分法となる。ことに、移流分散係数 D は流体力学的な運動に基づく係数であり、河川形状の規模や平均流速の横断面分布特性などの影響をも考慮して定義されるのでその値は広範囲に及び、差分化の安定性を脅かす重要な要因となり得る。

従来は疑似分散係数の最小化を計るため、Bella ら^{5), 6)} の唱えるように、移流項と分散項とを分離しておのおのの安定条件内で解く多段階手法や、分散項のみを implicit な手法あるいは後方差分法で解く試みが提唱されているが、実河川への適用は計算機の演算時間や記憶容量の点から、その近似度を高めて計算するには困難である。

いま、3. での対流方程式の高次差分法の有用性を考慮して安定性ならびに近似性を満たす差分法を考えてみる。基本式 (2.1) は線形で重ね合わせられることより、その安定性は各項の安定性の最も厳しい条件に拘束されるはずである。たとえば、 K が十分大きな値であれば、

式(2.1)は常微分方程式 $dU/dt \approx K \cdot U$ で近似されることになり、 U が x の関数であるにもかかわらず急激に変化することから、 Δt をより小さな値にする必要がある。また、対流方程式、拡散方程式の安定条件は、それぞれ $F \leq 1.0$, $G \leq 1/2$ ($G=1/6$ で誤差は $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$) であり、各項の安定性を満たすためには、 U , D および K の値により差分間隔を選ぶ必要がある。

一般には、 U は 10^{-1} (m/sec), D は $10^{-2} \sim 10^0$ (m 2 /sec), K は対象とする濃度を BOD 値とした場合には 10^{-6} のオーダーの値であり、移流分散方程式の安定性は D の値が小さいときには対流方程式の安定条件で、大きいときには拡散方程式の安定条件で定まる。したがって、変動する U や D に対して $F=1.0$ および $G=1/6$ が同時に満足されることはなく、近似誤差が常に存在することになる。その誤差の増大は対流方程式で示したように Taylor 展開した場合の高次微係数項の切断誤差によるものであり、基礎式(2.1)を分散項の 2 次微分の差分化にあわせて 4 次正確度まで近似を高めて差分化を計るならば、その差分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} c_i^{n+1} = & (1 + K \cdot \Delta t) \cdot \delta^{(0)} c_i^n \\ & + \left(-\frac{1}{2} F - F \cdot K \cdot \Delta t \right) \cdot \delta^{(1)} c_i^n \\ & + \left(G + \frac{1}{2} F^2 + G \cdot K \cdot \Delta t + \frac{1}{2} F^2 \cdot K \cdot \Delta t \right) \cdot \delta^{(2)} c_i^n \\ & + \left(\frac{1}{6} F - F \cdot G - \frac{1}{6} \cdot F^3 - F \cdot G \cdot K \cdot \Delta t \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{6} \cdot F^3 \cdot K \cdot \Delta t \right) \cdot \delta^{(3)} c_i^n \\ & + \left(-\frac{1}{12} \cdot G + \frac{1}{2} G^2 + \frac{1}{2} F^2 \cdot G + \frac{1}{2} G^2 \cdot K \cdot \Delta t \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{24} F^4 + \frac{1}{2} F^2 \cdot G \cdot K \cdot \Delta t \right) \cdot \delta^{(4)} c_i^n \\ & + \left(-\frac{1}{2} F \cdot G^2 - \frac{1}{6} F^3 \cdot G - \frac{1}{2} \cdot F^2 \cdot K \cdot \Delta t \right) \\ & \quad \cdot \delta^{(5)} c_i^n + \left(\frac{1}{6} G^3 + \frac{1}{4} F^2 \cdot G^2 + \frac{1}{6} \cdot G^3 \cdot K \cdot \Delta t \right) \\ & \quad \cdot \delta^{(6)} c_i^n - \frac{1}{6} \cdot F \cdot G^3 \cdot \delta^{(7)} c_i^n + \frac{1}{24} \cdot G^4 \cdot \delta^{(8)} c_i^n \\ & + O(\Delta x^4, \Delta t^4) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここに、 $\delta^{(m)}$ は c に関する m 次空間微係数の中心差分を表わし、たとえば $\delta^{(2)} \cdot c_i^n = c_{i+1}^n - 2 \cdot c_i^n + c_{i-1}^n$ である。

式(4.2)における $\delta^{(m)} c_i^n$ の係数は、 U , D および K の値により定まり、いま Δx , Δt を同じオーダーの値に選ぶならば D の値の変動が近似誤差ならびに安定性に大きく影響を及ぼすことになる。市街地河川でみられる $D=0.3$ m 2 /sec 程度の場合には、式(4.2)において四次微係数項までを考慮すれば精度高く計算でき、その場合の增幅因子 $\hat{Q}(\Delta x, k \Delta x)$ の実数部 $\text{Re}[\hat{Q}]$ と虚数部

$\text{Im}[\hat{Q}]$ とを求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}[\hat{Q}] = & 1 + K \cdot \Delta t - 2 \left(G + \frac{1}{2} F^2 \right) \{1 - \cos(k \Delta x)\} \\ & + 2 A \{3 - 4 \cos(k \Delta x) + \cos(2 k \Delta x)\} \\ \text{Im}[\hat{Q}] = & -(F + 2 F \cdot K \cdot \Delta t) \cdot \sin(k \Delta x) \\ & + 2 B \{\sin(2 k \Delta x) - 2 \sin(k \Delta x)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A = & -\frac{1}{12} G + \frac{1}{2} G^2 + \frac{1}{2} F^2 G + \frac{1}{24} F^4 \\ B = & \frac{1}{12} \cdot F - \frac{1}{2} F \cdot G - \frac{1}{12} \cdot F^3 \end{aligned} \right.$$

增幅因子 $|\hat{Q}|$ および位相差 ϕ は式(4.3)を式(3.4), (3.5)に代入することにより求まり、その結果を表-1 に示す。

表-1 増幅因子 $|\hat{Q}|(\Delta x, k \Delta x)$

$k \Delta x$	$F=0.2$			$F=0.5$			$F=1.0$		
	$G=0.1$	$G=0.3$	$G=0.5$	$G=0.7$	$G=0.1$	$G=0.5$	$G=0.1$	$G=0.5$	$G=0.5$
18°	0.9902	0.9705	0.9508	0.9310	0.9903	0.9509	0.9906	0.9511	
54°	0.9137	0.7401	0.5665	0.3931	0.9165	0.5706	0.9242	0.5681	
90°	0.7804	0.3530	0.1213	0.5286	0.7703	0.2384	0.8009	0.4998	
126°	0.6359	0.1056	0.7170	1.3837	0.5297	0.9390	0.9170	1.7226	
162°	0.5350	0.2572	1.0410	1.8272	0.2105	1.4318	1.3236	2.8241	
180°	0.5201	0.2799	1.0800	1.8799	0.1001	1.4999	1.3999	2.9999	

拡散方程式の安定条件 $|G| \leq 1/2$ を満たす場合には、 $F=1.0$ の場合を除き各波数にわたって、von-Neumann の弱安定条件

$$|\hat{Q}| = \sqrt{\text{Re}^2[\hat{Q}] + \text{Im}^2[\hat{Q}]} \leq 1.0 + O(\Delta t) \quad (4.4)$$

を満たしている。また、数値的減衰 $|\hat{Q}|/\hat{Q}_{\text{anal}}$ 、および位相誤差 ϕ_E の F 値ならびに G 値が変化した場合の各波数に対する変化の様子を表-2 に示す。

次に解析解との比較を行なってみよう。一般には K

表-2 数値的減衰と位相誤差
(a) amplification factor ($|\hat{Q}|/\hat{Q}_{\text{anal}}$)

$k \Delta x$	$F=0.2$				$F=0.4$		$F=0.6$	
	$G=0.001$	$G=0.01$	$G=0.1$	$G=1.0$	$G=0.1$	$G=0.1$	$G=0.1$	$G=0.1$
18°	1.0000	1.0000	1.0000	0.9949	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
36°	1.0002	1.0002	0.9996	0.9013	1.0002	1.0011	1.0002	1.0011
54°	1.0005	1.0006	0.9985	0.3270	1.0003	1.0031	1.0003	1.0031
90°	0.9961	0.9985	0.9987	13.8454	0.9898	0.9837	0.9898	0.9837
126°	0.9692	0.9809	1.0312	300.4702	0.9144	0.8364	0.9144	0.8364
162°	0.9251	0.9713	1.3951	8909.2625	0.7512	0.3220	0.7512	0.3220

(b) phase error ϕ_E

18°	-0.0003	-0.0003	-0.0001	0.0022	-0.0001	-0.0001
36°	-0.0049	-0.0046	-0.0015	0.0492	-0.0017	-0.0021
54°	-0.0232	-0.0219	-0.0082	1.0099	-0.0082	-0.0085
90°	-0.1453	-0.1400	-0.0732	-0.6306	-0.0567	-0.0317
126°	-0.4197	-0.4123	-0.3001	-0.7423	-0.2602	-0.0212
162°	-1.0000	-1.0000	-0.9999	-1.0000	-1.0000	-1.0003
180°	-1.0000	-1.0000	-0.9999	-1.0000	-1.0000	-1.0003

はおおよそ 10^{-6} の値であり、増減項を省略するならば式(2.1)は、

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \dots \dots \dots (4.5)$$

となり、 U および D を一定として変数変換 $X=x-Ut$, $T=t$ を行なうならば、次のようになる。

$$\frac{\partial c}{\partial T} = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \dots \dots \dots (4.6)$$

式(4.6)の解析解は、

$$c(T, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi DT}} e^{-(X-X')^2/4DT} c(X') dX' \quad \dots \dots \dots (4.7)$$

で与えられ、離散化することにより計算できる。

表-3 解析解と差分解との比較

(a) c/c_0 value after 2 days

Distance (km)	$D=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$		$D=1.0 \text{ m}^2/\text{sec}$	
	Numerical		Numerical	
	Analytical	(-) direction	(+) direction	Analytical
±0.0	0.9599	0.9309		0.7346
±0.3	0.8665	0.8409	0.8698	0.6640
±0.6	0.6374	0.6110	0.7019	0.5780
±1.2	0.1866	0.0588	0.3024	0.2815
±1.8	0.0241	-0.0703	0.0698	0.0849
±2.4	0.0014	0.0617	0.0036	0.0158
±3.0	0.0000	0.0053	-0.0022	0.0018

(b) c/c_0 value after 6 days

	$D=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$	$D=1.0 \text{ m}^2/\text{sec}$	$D=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$	$D=1.0 \text{ m}^2/\text{sec}$
±0.0	0.8925	0.8407	0.5301	0.5299
±0.3	0.8169	0.7940	0.7863	0.5138
±0.6	0.6265	0.6405	0.6605	0.4679
±1.2	0.2167	0.1524	0.3455	0.3217
±1.8	0.0369	-0.1601	0.1181	0.1723
±2.4	0.0031	-0.0517	0.0207	0.0719
±3.0	0.0001	0.1238	-0.0022	0.0233
±3.6	0.0000	0.0282	-0.0023	0.0059

移流分散係数 D が $0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ および $1.0 \text{ m}^2/\text{sec}$ の場合の差分解と解析解との比較を示したのが表-3である。 Δx を 300 m , Δt を 600 sec と選んだ結果, $D=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ の場合には有効波数成分内の高波数成分が位相誤差を伴って伝達されるゆえ、分布形状が多少ひずみ時間とともに負の濃度が増大するが、6日後の分布形状は二次中心差分での1日後に相当する分布形状であり、その近似度が理解できる。また、この負の濃度は Δx の選定条件を少し厳しくすることにより、 $D=1.0 \text{ m}^2/\text{sec}$ の場合のように上流側での弱い振動でおさえられるであろう。 $D=1.0 \text{ m}^2/\text{sec}$ の尖度は 3.170 (2日後), 3.138 (6日後) であり、かつ保存性は常に満たされている。

5. 結 語

本研究は放物型偏微分方程式である一次元非定常移流

分散方程式の差分化に伴う安定性・近似性について、種々考察を加えた。得られた結論を要約すれば、次のようになる。

(1) 差分近似誤差は Fourier 解析して增幅因子 $\hat{Q}(\Delta x, k \Delta x)$ の概念を導入することにより、数値的減衰と位相誤差に基づく数値的分散とに分類でき、一次正確度差分法は数値的減衰が大きく流速の変動する感潮河川の汚濁予測には適用できない。

(2) 低波数成分の卓越するガウス曲線濃度分布に対しては、演算回数との積で影響をおぼす数値的分散は累乗の形で影響を示す数値的減衰よりも支配的であり、そのため数値的分散の小さい高次正確度差分の適用が望ましい。

(3) 増幅因子は filter 効果をなし伝播される成分は低波数成分に限られ、空間差分間隔の2倍で表わされる限界波長成分でその誤差は最大となり、全く移流されない。したがって、初期濃度分布に対して適切な空間差分間隔を定める必要があり、四次中心差分に対してその推定法を図-5に示した。

(4) この四次中心差分を移流分散方程式に適用することにより、 $F=U \cdot \Delta t / \Delta x = 1.0$ なる疑似分散を最小とする差分間隔の拘束から離れて広範囲な移流分散係数に対して十分な安定条件内で精度高く計算できる。

なお、使用した計算機は大阪大学大型計算センター NEAC-2200 であることを付記する。

最後に、本論文は市街地河川や河口流の拡散問題に対処する研究の一環として取りあげた課題であり、これらに関し、本学の室田 明教授ならびに樋木 亨教授から多くの示唆を得たことを付記し、ここに深く謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Richtmyer, R.D. and K.W. Morton : Difference Methods for Initial Value Problems, 2nd Ed., Interscience Publisher (1967)
- 2) Bella, D.A. and W.J. Grenney : Finite-Difference Convection Errors, Proc. of A.S.C.E., Vol. 96, SA 6 (1970)
- 3) Roberts, K.V. and N.O. Weiss : Convective Difference Schemes, Mathematics of Computation, Vol. 20 (1966)
- 4) Fox, D.G. : Discussion of "Finite-Difference Convection Errors", Proc. of A.S.C.E., Vol. 97, SA 5 (1971)
- 5) 山口昌哉・野木達夫：数値解析の基礎、共立出版 (1968)
- 6) Bella, D.A. and W.E. Dobbins : Difference Modeling of Stream Pollution, Proc. of A.S.C.E., Vol. 94, SA 5 (1968)
- 7) Dresnack, R. and W.E. Dobbins : Numerical Analysis of BOD and DO Profiles, Proc. of A.S.C.E., Vol. 94, SA 5 (1968)

(1972.11.6・受付)