

有限要素法によるクイックサンド現象の解析

ANALYSIS OF QUICK SAND PHENOMENON BY FINITE ELEMENT METHOD

山 上 拓 男*

By Takuo Yamagami

1. まえがき

構造分野における電子計算機を応用したいわゆるマトリックス解析の急激な進展に伴い、有限要素法の土質力学、流体力学方面へのアプローチにも目をみはるものがある。ここでわれわれが問題とする多孔体中の浸透流解析への適用もその一端であって、“場の問題”としてよく知られたものである。これは、最初 Zienkiewicz ら¹⁾が、熱伝導、一様断面棒のねじり、浸透流問題そのほかにあらわれる quasi-harmonic type の偏微分方程式の境界値問題に応用したものであり、Rayleigh-Ritz あるいは Galerkin 法の拡張としての汎関数の直接法の一種とみなしえるものである。ついで、同じく Zienkiewicz ら²⁾によって、異方性浸透流問題に応用されたが、彼らはその論文においてポテンシャル分布のみならず、流線の決定方法についてもその可能性を示唆している。また、Finn³⁾および Taylor ら⁴⁾は浸透流に関する最も困難な問題の一つである自由水面を有する流れについての解析を試みている。一方、わが国においても、川本ら⁵⁾、飯田ら⁶⁾、および筆者ら⁷⁾によって種々の問題に適用されているが、これらのうち大部分の研究はいずれも流れをダルシー則に従うものとしている。他方、いわゆる非ダルシー流れに応用したものとしては、Volker⁸⁾、McCorquodale ら^{9),10)}の研究があり、さらに最近、定常、非定常流れにわたって幅広く概説した単行本¹¹⁾も出版されるにいたっている。これら多方面において応用されている有限要素法の大きな特徴としては、解析領域の形状によらないこと、および構成材料の特性にほとんど無関係であること、また、対象とする現象をシミュレートするのにきわめて好都合であることなどが考えられるが、本文はこの利点を生かして、地盤が浸透流によって破壊

する現象（クイックサンド現象）を解析するための新しい解析過程の定式化についての報告である。

このクイックサンド現象の解析法としてよく知られているものに限界動水勾配の概念を用いるものがある。これは流れの場における土の有効重量とポテンシャル分布より定まる流体圧との間の单なる力のつり合いのみに注目したもので、その結果を左右する要因は、土粒子の比重、間隙比、および水の単位重量などの物理的定数のみである。また、Scott¹²⁾は Polubarinova-Kochina¹³⁾に基づいて任意点の total head potential と buoyant weight potential との和で表わされる new potential function なるものを導入して浸透力としての物体力について議論している。しかし、クイックサンド現象が一種の地盤の破壊現象であるかぎり、これを支配する要因の中には当然土の非線形応力一ひずみ特性が導入されるべきであると考える。さきの限界動水勾配の概念による結果要求される安全率は一般に 4~5 とされている¹⁴⁾が、本来安全率なるものは厳密には 1 で限界状態、これに不確定要素および構造物の重要度に応じて割増量を付加するのが、その目的であることを考えれば、このように大きな安全率はその意味をあいまいなものにしているようである。筆者は水理構造物の設計に際しては、単に物理的定数を用いた土中の水、あるいは水中の土として処理することより一步進めて、水の流れと土粒子構造骨格の相互作用をより明確にとらえるべきことを痛感している。このためには、土中を水が通過するとき、土粒子骨格に及ぼす物体力を定量的に求め、これを土の力学的変形特性と結びつけた解析が必要となる。本研究は以上の主張のもとに行なわれたものである。

2. 有限要素法による浸透流場の解析

定常二次元 浸透流場（領域 G）を支配する 微分方程

* 正会員 工修 徳島大学助手 工学部建設工学科

式は、流体を非圧縮性とすれば次式で示される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $H: G$ 内の任意点における全水頭

k_x : x 方向の透水係数

k_y : y 方向の透水係数

したがって、流れの状態を知るために式 (1) を適当な境界条件のもとに解き、一般化されたダルシーの法則として知られている

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y} \quad \dots \dots \dots (2)$$

を用いて x, y 方向の透水速度 v_x, v_y を計算すればよい。式 (1) を解くにあたって通常われわれが遭遇する境界条件としては、領域 G の境界 Γ の一部 Γ_1 上において、 H が指定された値を有し、残りの部分 Γ_2 上でこれにてて法線方向の速度成分が 0 となる場合である。これらを表示すれば、次のようになる。

$$H = H(s) \text{ on } \Gamma_1 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\begin{aligned} & v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) = 0 \\ \text{or } & k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{on } \Gamma_2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここに $\cos(n, x), \cos(n, y)$ は境界の外側に立てた法線 n の方向余弦、 s は境界 Γ に沿う長さ。

ここで示すような透水係数が非均質異方性であり、かつ境界 Γ の形状が任意である場合、解析的にはもちろんのこと、差分法などの近似計算ですらその解を求ることはほとんど不可能である。

一方、変分学によれば式 (1) を境界条件式 (3), (4) で解くことは、次のような汎関数 $I[H]$ を束縛境界条件式 (3) のもとに極小にすることと等価である¹⁵⁾。

$$I[H] = \frac{1}{2} \iint_G \left\{ k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad \dots \dots \dots (5)$$

なぜなら、いま $I[H]$ の第一変分をとると、

$$\delta I = \iint_G \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \delta H_x + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \delta H_y \right) dx dy \quad \dots \dots \dots (6)$$

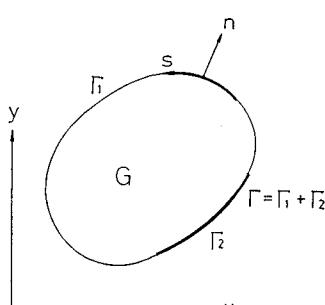


Fig. 1 The flow domain

ただし、変関数は H のみとし、 H_x, H_y はそれぞれ $\partial H / \partial x, \partial H / \partial y$ を意味する。上式に Gauss の公式を用いて部分積分を施せば、Fig. 1 を参照して、

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{\Gamma} \left\{ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \right\} \delta H ds \\ & - \iint_G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right\} \delta H dx dy \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (7)$$

しかるに、式 (3) を $I[H]$ の束縛境界条件とすれば、 Γ_1 上では H の変分 δH が 0 となり、結局、式 (7) の右辺第 1 項の積分は、 Γ_2 上のみを考えればよい。よって、

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{\Gamma_2} \left\{ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \right\} \delta H ds \\ & - \iint_G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right\} \delta H dx dy \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (8)$$

したがって、 δH の任意性より式 (5) に対する Euler の方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \text{ in } G \quad \dots \dots \dots (9)$$

自然境界条件は

$$k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = 0 \text{ on } \Gamma_2 \quad \dots \dots \dots (10)$$

この式 (10) は式 (4) と同じものである。

以上により、式 (1) を式 (3), (4) なる境界条件のもとに解くことは、式 (5) を境界条件式 (3) のもとに極小にするような H の分布を求めることが等価であることが証明された。

有限要素法を適用するにあたっては、式 (5) を直接解いてゆくのである。これは変分問題における直接法に相当し、これが、境界値問題における有限要素解析が Ritz-Galerkin 系の解法に相当するといわれるゆえんである。この場合、さきの境界条件式 (4) は何も考慮する必要のない点に注意されたい。

以上の理論的根拠のもとに、Fig. 2 に示すように、領域 G を多数の三角形要素に分割したとき任意要素 e

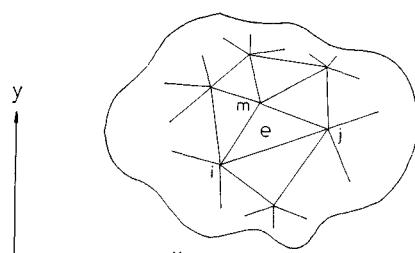


Fig. 2 Division of a two-dimensional region into triangular elements

内の動水勾配は次式で表わされる¹⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \{(y_j - y_m)H_i \\ &\quad + (y_m - y_i)H_j + (y_i - y_j)H_m\} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \{(x_m - x_j)H_i \\ &\quad + (x_i - x_m)H_j + (x_j - x_i)H_m\} \end{aligned} \right\} \dots(11)$$

ここに, A : 三角形要素の面積

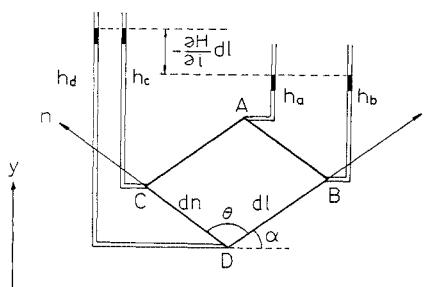
x_i, y_i : その要素の i 節点での座標, 以下同様

H_i, H_j, H_m : 三節点の全水頭

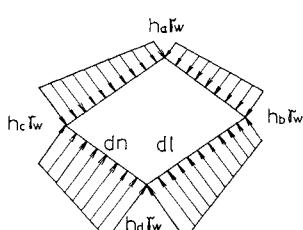
この値は要素内において一定となり, 後述のように, 浸透流による地盤の破壊現象の解析にはこの式 (11) を用いるのである。

3. 浸透力の算定

土中を浸透水が通過するとき土粒子構造骨格に及ぼす力, すなわち浸透力は単位体積当たりの物体力としてとらえることができる。いま Fig. 3 (a) において, きわめて接近した 2 本の流線および等ポテンシャル線で形成される線素 dl, dn なる微小要素 ABCD を考え, l を流線, n を等ポテンシャル線とする。流線 l が x 軸となす角を α , 等ポテンシャル線となす角を θ とし, A, B, C, D 点での圧力水頭をそれぞれ h_a, h_b, h_c, h_d とする。ここで等ポテンシャル線と流線との交角を θ としたのは地盤の非均質異方性を考慮したためである。この微小



(a) A two-dimensional soil element under seepage



(b) Water pressure distributions on the element

Fig. 3

要素に作用する水圧分布から等ポテンシャル線に垂直な方向の不平衡力 P を求めると, Fig. 3 (b) を参照して,

$$\begin{aligned} P &= \frac{r_w}{2} \{(h_d + h_c) - (h_b + h_a)\} dn \\ &= \frac{r_w}{2} \{(h_d - h_b) + (h_c - h_a)\} dn \\ &= r_w \left(-\frac{\partial H}{\partial l} dl + dl \sin \alpha \right) dn \\ &= -r_w \frac{\partial H}{\partial l} dldn + r_w dldn \sin \alpha \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

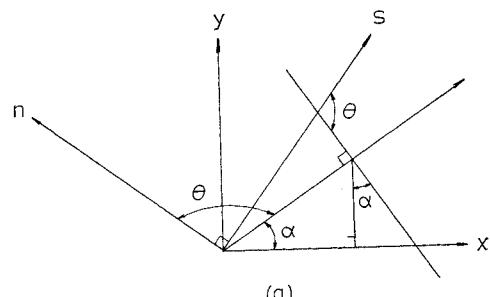
同様に流線に垂直な方向の不平衡力 Q は

$$\begin{aligned} Q &= \frac{r_w}{2} \{(h_d + h_b) - (h_c + h_a)\} dl \\ &= \frac{r_w}{2} \{(h_d - h_c) + (h_b - h_a)\} dl \\ &= r_w dldn \sin(\alpha + \theta) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

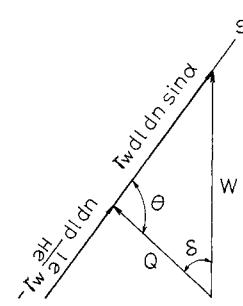
ここで, 式 (12) の一部 $r_w dldn \sin \alpha$ と Q との合力 W を求める。 $r_w dldn \sin \alpha$ は等ポテンシャル線に垂直な方向 (s 方向とする) に作用していることを考慮して, Fig. 4 から余弦定理により

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{(r_w dldn \sin \alpha)^2 + (r_w dldn \sin(\alpha + \theta))^2}^* \\ &= 2(r_w dldn)^2 \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \theta) \cdot \cos \theta \\ &= r_w dldn \sin \theta \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

また, W が Q となす角 δ は上式の結果を用いて, 正弦定理から



(a)



(b)

Fig. 4 Diagram illustrating the derivation of seepage force

したがって W の作用方向は鉛直上方となるが、微小要素の体積が $dldn \sin \theta$ であることからこれは浮力にはかならない。よってこの微小要素に働く浸透水による作用力としては、式(14)で表わされる浮力 W と、 P の残りの部分 $-r_w \frac{\partial H}{\partial l} dldn$ を考えればよいことになる。後者の $-r_w \frac{\partial H}{\partial l} dldn$ はこれを要素の体積で割って

$$f = \frac{-r_w \frac{\partial H}{\partial l} dl dn}{dl dn \sin \theta} = -r_w \cosec \theta \frac{\partial H}{\partial l}$$

これが求める単位体積当たりの物体力としての浸透力であり、等ポテンシャル線に垂直な方向に働いている。すなわち、地盤が流れに関して異方性である場合は、浸透力は流れの方向とは一致せず、 H が最大の変化を示す方向に作用するのである。式 (16) の θ を求めることは一般に困難であるため、これを x, y 方向に分解したものを考える。

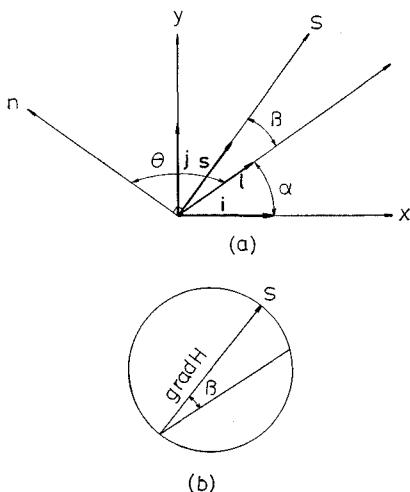


Fig. 5 An application of the theory of scalar field

スカラー場の理論¹⁷⁾によれば Fig. 5 を参照して次式
がなりたつ

$$\frac{\partial H}{\partial s} \mathbf{s} = \text{grad } H = \frac{\partial H}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \mathbf{j} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 $s : s$ 方向 (H の最急変化の方向) の単位ベクトル

ℓ : ℓ 方向の単位ベクトル

i : x 方向の単位ベクトル

j : γ 方向の単位ベクトル

β : s 方向と l 方向とのなす角

上の2式より

よって式(16)の f をベクトル表示したのに、式(19)を用いると、 f は s 方向に作用していることから

$$\begin{aligned} f &= -r_w \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial H}{\partial l} \mathbf{s} \\ &= -r_w \operatorname{cosec} \theta \cdot \cos \beta \frac{\partial H}{\partial s} \mathbf{s} \\ &= -r_w \operatorname{cosec} \theta \cdot \cos \beta \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \mathbf{j} \right\} \dots (20) \end{aligned}$$

したがって f の x, y 方向の成分は

$$\left. \begin{aligned} X &= -r_w \operatorname{cosec} \theta \cdot \cos \beta \frac{\partial H}{\partial x} = -r_w \frac{\partial H}{\partial x} \\ Y &= -r_w \operatorname{cosec} \theta \cdot \cos \beta \frac{\partial H}{\partial y} = -r_w \frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

$\left(\because \beta = \theta - \frac{\pi}{2} \right)$

.....(21)

これにさきの式(11)を代入すれば、要素 e 内の単位体積当たりの物体力が次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{r_w}{2A} \{(y_j - y_m)H_i \\ &\quad + (y_m - y_i)H_j + (y_i - y_j)H_m\} \\ Y &= -\frac{r_w}{2A} \{(x_m - x_j)H_i \\ &\quad + (x_i - x_m)H_j + (x_j - x_i)H_m\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(22)$$

4. 非線形解析

前節の結果、式(22)を用いれば浸透力による応力解析が可能である。すなわち、この物体力(X, Y)による応力分布に関しては、既往の重力場における応力解析のための有限要素プログラムを応用し、式(22)で求められた値に三角形の面積を乗じたものの $1/3$ を各三節点

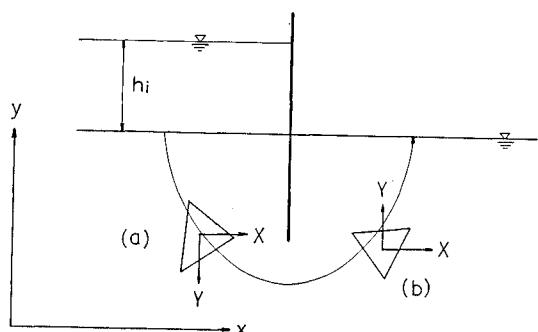


Fig. 6 Diagrammatic representation of the direction of seepage force.

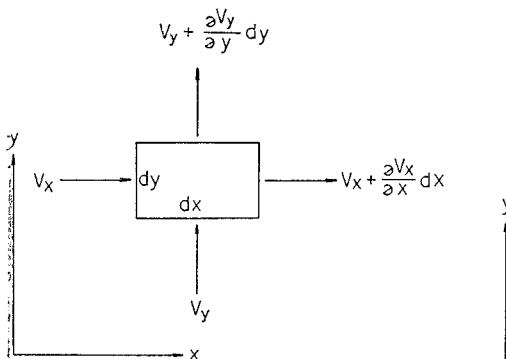


Fig. 7 Two-dimensional flow through an element

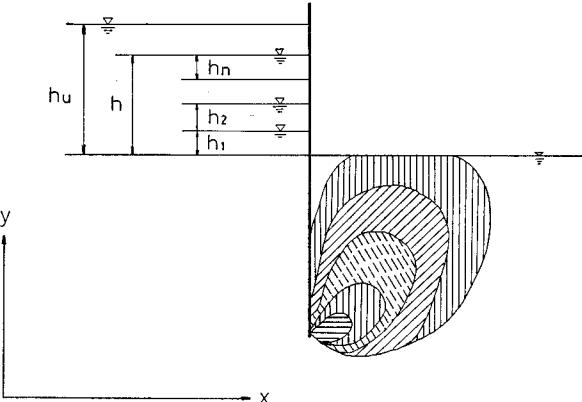


Fig. 8 Spread of plastic zones with increments of total head

に配して、これを節点外力として解析すればよい。このとき問題となるのは応力解析に先立って、式(22)で求められた \$(X, Y)\$ の作用方向が座標 \$(x, y)\$ の正負いすれの向きに働いているかを知る必要のあることである。たとえば Fig. 6 のような矢板のまわりの流れを対象とする場合、要素(a)内の浸透力の成分のうち、\$X\$ は正の向きに、また \$Y\$ は負の向きであるが、要素(b)内では両者はともに正の向きを有している。これらのことと自動的に判定するには式(1)の誘導過程を考慮すればよい。いま Fig. 7において浸透流速 \$v_x, v_y\$ を座標の正の向きを \$\oplus\$ とすれば、ダルシーの法則から

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y} \quad \dots \dots \dots (23)$$

上式の意味は座標の増加方向に対してポテンシャルが減少するとき浸透流速が \$\oplus\$、すなわち座標の正の方向に向いていることを意味している。あるいは \$\partial H / \partial x < 0\$、および \$\partial H / \partial y < 0\$ のとき流れの方向が座標の正の向きであるとしてもよい。したがって、式(21)から明らかなように、式(11)を用いて \$\partial H / \partial x, \partial H / \partial y\$ を計算するかぎり、物体力 \$(X, Y)\$ の符号は自動的に座標の正の向きに作用するものが \$\oplus\$、負の向きに作用するものが \$\ominus\$ となる。なお Fig. 7 を用いて、式(1)の導かれることは周知のとおりである。

以上の所論により水理構造物周辺の地盤が浸透力によって破壊するか否か、また安定である場合はどの程度の安全性を有しているかを評価するには以下の手順を経る。Fig. 8 は水平地表面を有する浸透層に打設した矢板によって上流側の水をせき止めたものを示している。上流側の最終設計水位を \$h\$、下流側は地表面に一致するものとする。このような構造物の安定性を検討する場合、慣用的には上下流側の水頭差 \$h\$ のもとに流線網を描いてポテンシャル分布を求め、矢板背面近傍での単なる鉛直方向の力のつり合いのみに注目した解析がなされ

ている。これに対して筆者はここで非線形応力解析における荷重漸増法の概念を導入する。すなわち、与えられた水頭差 \$h\$ を適当な増分 \$h_1, h_2, \dots, h_n\$ に分割する。解析の第一段階として各三角形要素の重心での浮力を考慮した有効地盤初期応力を算定しなければならないが、これはたとえば静止土圧係数を用いて次式で定め得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y,0} &= \sigma_{z,0} = r_{sub} \cdot z \\ \sigma_{x,0} &= \sigma_{3,0} = K_0 \cdot r_{sub} \cdot z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

ここに、\$r_{sub}\$：水中単位重量

\$K_0\$：静止土圧係数でたとえば

$$K_0 = 1 - \sin \phi \dots \dots \dots (25)$$

\$\phi\$：内部摩擦角

\$\sigma_{1,0}, \sigma_{3,0}\$：初期最大、最小主応力

\$\sigma_{x,0}, \sigma_{y,0}\$：\$x, y\$ 方向初期直応力

\$z\$：地表面から任意要素の重心までの深さ
さらに矢板背後の地表面に安全率を高める目的で押え盛土そのほかを施工する場合は、これを地表面に作用する分布荷重とみなせばその取り扱いは自明であろう。

以上初期応力が定まれば、第二段階として前述の \$h_1\$ のみが上流側水位として与えられたものとし、これによる各節点のポテンシャル分布を、浸透流解析のための有限要素プログラムで求め、これより式(22)を用いて各節点の物体力を算定し、ついで応力解析を行なう。この応力解析に関しては、土の非線形応力—ひずみ特性の表示方法として種々のものが考えられており、少なからず議論の余地を残しているが、現状では、i) 実験結果から適当な数式表示を試みるいわゆる現象論的なもの、たとえば Kondner らの双曲線表示、ii) 塑性論に基づくもの、などであり筆者も後述の解析例では i) の方法を用いている。

こうして求めた応力を、さきに store している初期応力と重ね合わせ、降伏した要素の有無を調べたのち、再び store しておく。以下第3段階として、上流側に水

位 h_2 を与え、同様な解析を行ない step-by-step に最終設計水位に至るまで反復計算を行なう。Fig. 8 はこの過程の模式図であって、矢板背後の斜線部分は塑性化した領域を定性的に表わしたものである。

ところでクイックサンド現象が発生する限界状態をいかに定義するかについては種々の方法があり、既往のものとしては限界動水勾配によるもの、限界流速によるもの、あるいは平均動水勾配（クリープ比）によるものなどであるが、いずれも正確には適用しがたいことが指摘されている¹⁸⁾。一方、ここに主張する解法に基づいたものとして筆者は新しく次のような定義を試みる。すなわち、上述の“塑性領域が上流側の水位増分とともに漸次拡大し、下流側地表面に達したときクイックサンド現象が生ずる”とするものである。この考え方の基礎をなすものは、地盤内部に局部的に塑性域が発生しても、それをとり囲む非破壊領域の拘束のためただちに流動化につながることはなく、ダルシーの法則も適用可能であろうとの考えによるものである。また、実際の水理構造物では、仮に塑性域が地表面に達したのちも部分的な流動化を起こすのみで安定な状態を維持し得る可能性もあるが、この種の構造物はいったん破壊するとその被害が甚大であることを考えれば、上の定義が適切なものといえよう。ただ、不平衡力によって生ずる地盤の容積変化に伴う透水性の変化についてなんらかの考慮が必要ではないかとの疑問があるが、これに関しては以下の解析例において述べることとする。

以上の定義にしたがう場合、増分過程が最終設計水位 h に達したとき、塑性域が地表面に達していなければ一応安定な状態といえるが、どの程度の安全性を有しているかの指標として次のような安全率 F_s を提唱する。

ここに、 h ：最終設計水位

h_u : 最終設計水位を越えたのちも、塑性域が地表面に達するまで増分過程を繰り返えたときの最終水位

この安全率を導入することにより、その意味がより明確なものとなるであろう。

以上で解析過程の定式化が完了したわけであるが、ここで提案した方法によれば、要素分割や水位増分の考え方、さらにまた応力一ひずみ特性にどの種のものを採用するかによって多少個人差の入ることは否めない。しかし、この点に関しては、本来設計なるものは画一化された手法をいついかなる場合でも用いるということではなく、対象とする構造物の重要度と、要求される精度に応じて適宜技術者の判断に待つべき問題であると考える。

また、応力一ひずみ関係については以下各方面において

て精力的に研究が進められており、近い将来必ず解決されるものと確信する。

なお、ここでは漸増荷重として上流側の水位増分の形で与えたが、下流側の水位低減の形で与えることも容易である。

5. 解 析 例

まず始めに以下の解析において用いられている土の非線形応力一ひずみ曲線に関する双曲線表示について簡単にふれておく。これは Duncan ら¹⁹⁾によって開発されたもので、主応力と主ひずみに関する Kondner の双曲線表示、Janbu の初期接線係数と拘束圧の関係を表わす実験的研究²⁰⁾、およびモール・クーロンの破壊規準を結びつけ、任意の応力レベルでの接線係数を求めたもので、その結果は次式で表わされる。

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f(1-\sin\phi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos\phi + 2\sigma_3 \sin\phi} \right]^2 K P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad \dots \quad (27)$$

ここに, σ_1, σ_3 : 最大, 最小主応力

c, ϕ : モール・クーロンの強度定数

K, n : 実験定数

P_a : σ_3 と同じ圧力単位で表わされた大気圧

R_f : 壊壊比 (failure ratio) と呼ばれ、一般に 0.75~1.00 の範囲にある実験定数

E_t : 応力レベル (σ_1, σ_3) での接線係数

この式は荷重漸増型の解析にはきわめて好都合であり、また有効応力、全応力解析いずれにも適用し得るもので、前者に対しては排水試験、後者には非圧密排水試験より強度定数を決定すればよい。

さきの塑性化の判定については次のような方法をとった。まず、モール・クーロンの破壊規準より

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2(c \cos \phi + \sigma_3 \sin \phi)}{1 - \sin \phi} \quad \dots \dots \dots (28)$$

ここに、 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ ：破壊時の主応力差

これと任意の応力レベルでの主応力差との比

$$S = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_2)_c} = \frac{(1 - \sin \phi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2(c \cos \phi + \sigma_1 \sin \phi)} \dots \dots (29)$$

を考え、各増分過程終了時の主応力から上式を用いて S' を求め、 $S' \geq 1$ であれば、その要素はせん断破壊を生じたものとみなす。これとは別に圧縮応力を \oplus としたときの最小主応力 σ_3 の符号を調べ、 $\sigma_3 < 0$ であればその要素は引張り破壊を生じたものとする。これら破壊した要素については、それ以後の増分過程では接線係数をきわめて微小な値に修正している。

Fig. 9 に解析領域の要素分割、断面諸元、および境

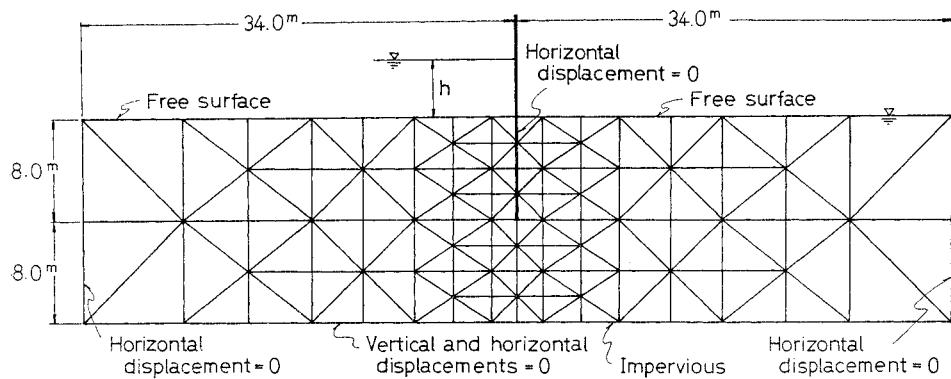
Fig. 9 Numerical example ($S=1/200$)

Table 1 Summary of Stress-Strain Parameters and other Properties

	Angle of internal friction ϕ_d	Cohesion C_d	R_f	K	n	Coefficient of permeability k	Effective unit weight γ_{sub}	Poisson's ratio
A	39.5°	0	0.852	450	0.514	$4.01 \times 10^{-4} \text{ m/sec}$	0.953 t/m³	0.3
B	34.5°	4.5 t/m²	0.753	480	0.266	$4.3 \times 10^{-7} \text{ m/sec}$	1.138 t/m³	0.35

界条件を示す。また、構成材料の応力一ひずみ特性そのほかの物性値は、Table 1 に示すように、性質 A, B の 2 種類である。この領域および物性値に対して、以下の 8 通りの条件のもとでの解析例を示す。

Case 1 : 矢板の打込み深さ = 4.0 m, 構成地盤は性質 A の均質地盤, 水位増分量 = 0.5 m

Case 2 : Case 1 で下流側地表面に、矢板前面 2.0 m にわたって 2.0 t/m^2 なる等分布上載荷重あり

Case 3 : Case 2 の等分布荷重が 3.0 t/m^2 の場合

Case 4 : 矢板の打込み深さ = 8.0 m, 構成地盤は性質 A の均質地盤, 水位増分量 = 0.75 m

Case 5 : Case 4 で水位増分量 = 1.0 m

Case 6 : Case 4 で水位増分量 = 2.0 m

Case 7 : 矢板の打込み深さ = 8.0 m, 構成地盤は厚さ 8.0 m の上層が性質 A, 下層が性質 B の複層, 水位増分量 = 2.0 m

Case 8 : 矢板の打込み深さ = 8.0 m, 構成地盤は性質 B の均質地盤, 水位増分量 = 2.0 m

(1) 水位増分に伴う塑性域の拡大

Fig. 10～Fig. 17 に、Case 1～Case 8 の水位増分に伴う塑性域の拡大状況を示す。図において、黒く塗りつぶした要素はせん断破壊を、また斜線を施した要素は引張り破壊を生じた部分である。ここで引張り破壊としては最小主応力が負となった状態で規定した。これら二つの破壊形式に対して、それ以後の増分過程ではいずれも接線係数を 0.01 t/m^2 (一定) としている。図中、(a) は最初に塑性域が地表面に達した時点を、また (b) は

その次の増分過程終了時の状態を示したものである。さらに、(a) 図の点線は、地表面を水頭の基準線として、10% きざみの等ポテンシャル線を示している。図からわかるように、上載荷重のある Case 2, Case 3 を除いていはずれも最初に塑性域の現われる部分に地表面が含まれているが、このことは、必ずしも浸透力の大きな矢板先端部から破壊が始まるものではないことを示唆している。むしろ、この種の構造物では、地表面に拘束力の作用しない場合、まず地盤表面近傍から破壊が始まり、それが上流側の水位増分とともに漸次下方に向かって拡大する、いわゆる進行性破壊の様相を呈するものと考えられる。これは、玉置ら²¹⁾が室内実験を詳細に追跡した結果、水位増分に伴って最初下流側地表面で砂粒子が不安定状態に移行すると指摘している事実とも一致するものである。

しかしながら、以上の記述はあくまでも定性的なものであり、同じ地表面から破壊する場合でも Case 8 はほかの Case といふん 塑性域の発生箇所が異なっていること、破壊の形式が引張り破壊であること、さらにまた上載荷重のある場合は最初に発生する塑性域が地盤内部に移行していることなどもあり、設計に際しては Case-by-Case で処理すべきである。

ところで、筆者の主張によれば、地表面に塑性域が達した時点、すなわち (a) 図の状態が限界状態となり、これ以上の水位増分のもとでは地盤は流動化し、変位も急激に大きくなることが予想される。この流動化部分に対しては当然、ダルシーの法則やここで用いている微小変位に立脚した有限要素解析が適用できなくなる。しかし、この点を無視し、依然としてダルシーの法則そのほ

かがなりたつものと仮定して計算した結果が (b) 図である。(a) 図に比べ (b) 図の塑性域がかなり広範囲に拡大していることからも、(a) 図の状態を限界状態とすることが妥当なものといえよう。

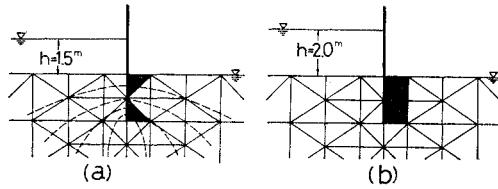


Fig. 10 (Case 1)

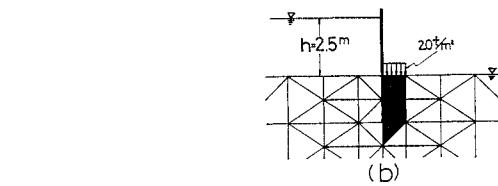


Fig. 11 (Case 2)

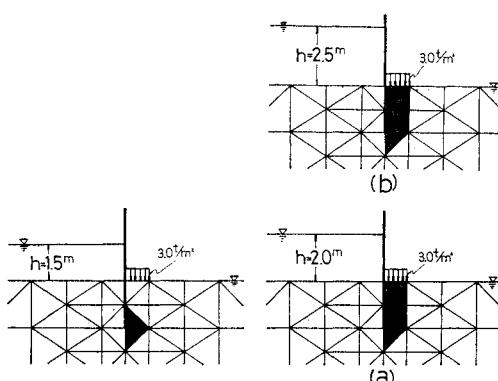


Fig. 12 (Case 3)

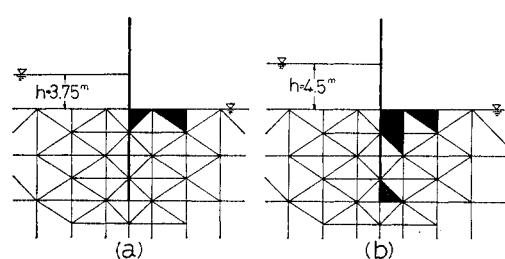


Fig. 13 (Case 4)

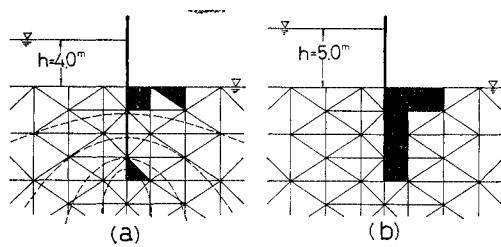


Fig. 14 (Case 5)

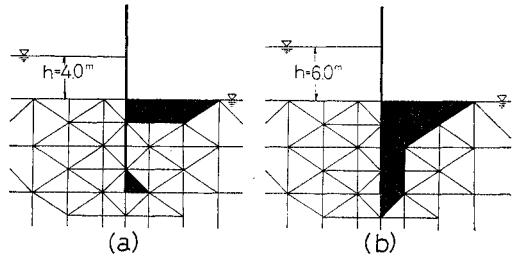


Fig. 15 (Case 6)

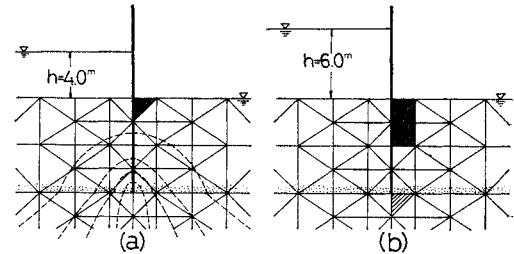


Fig. 16 (Case 7)

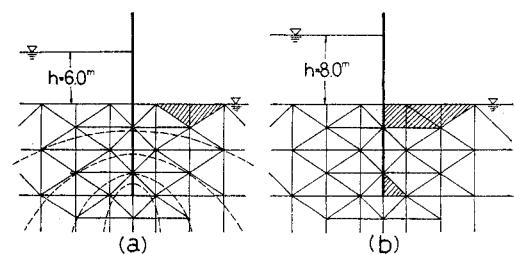


Fig. 17 (Case 8)

(2) 地表面変位

Fig. 18, 19 に限界状態までの水位増分に伴う下流側地表面の鉛直方向変位の一例を示す。図より水位増加に伴って下流側地盤の盛り上る現象がよく追跡されているが、Terzaghi が指摘したような²³⁾矢板の前面で、幅が矢板の打込み深さの $1/2$ までの変位が特に顕著とはいひ難い。また、前述の玉置らの実験において確認された上流側地表面の陥没も、限界状態までの変位からは認められなかった。おそらくこのあと、Fig. 10~Fig. 17 の (b) 図にみられるように、水位の増加があれば、そ

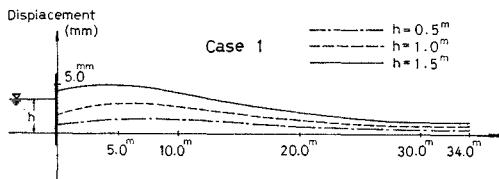


Fig. 18 Displacements along ground surface

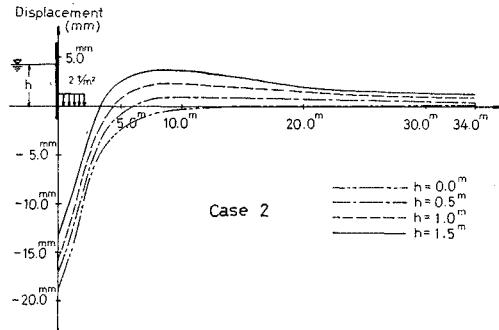


Fig. 19 Displacements along ground surface

れに伴って矢板近傍の土が急激に噴出され、それが矢板に沿って上流側に伝播し、パイピングが生ずるのである。なお、限界状態に達したのちもダルシーの法則その他が成立すると仮定した (b) 図の変位が飛躍的に増大していることを付記しておく。ほかの Case についてもほぼ Fig. 18, 19 と同様な挙動を示している。

(3) 安全率の評価

さきに提唱した安全率, 式 (26) によれば, 塑性域が地表面に達した時点で限界状態となり $F_s=1$ である。これよりたとえば Case 1 では上流側合計水位が 1.5 m で $F_s=1$, Case 2 では 2.0 m で $F_s=1$ となる。**Fig. 20** はこの式 (26) によって上述の各 Case について, 種々の設計水位に対して安全率をプロットしたものである。

一方、慣用法としての Terzaghi の式による安全率算

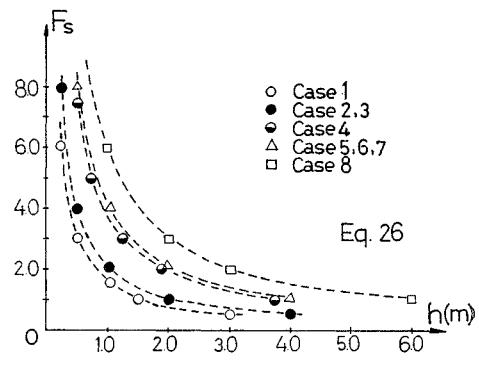


Fig. 20 Factor of safety

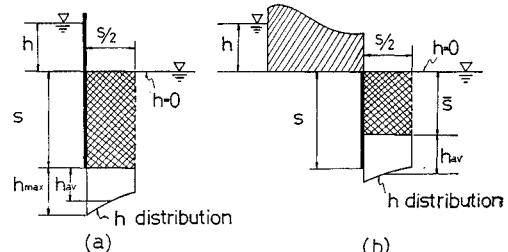


Fig. 21 (After HARR)

定式は次式で表わされる²³⁾。

ここに、Fig. 21 を参照して、

s ：下流側地表面からの深さ

h_{av} : 矢板の打込み深さを s としたとき、深さ \bar{s} で

幅 $s/2$ にわたっての水頭の平

p : フィルター材の有効上載荷重

I_{cr} : 限界動水勾配

G_s : 土粒子

e ：隙間比
この式はまた、矢板に沿う水頭の最大値 h_{\max} を用いて次のようにならざれることもあつて²⁴⁾

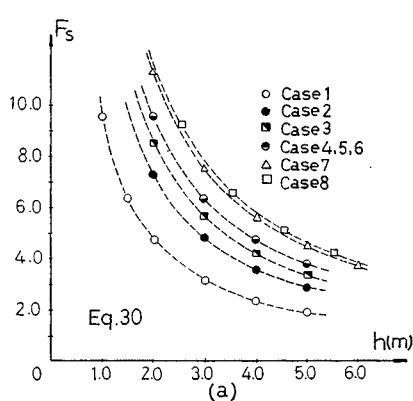


Fig. 22 Factor of safety by conventional methods

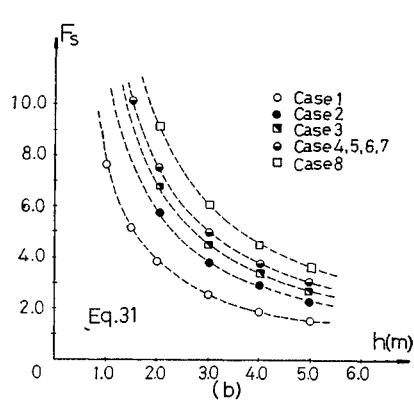


Fig. 22 Factor of safety by conventional methods

Fig. 22 はポテンシャル分布に基づいて上の式 (30), (31) から、各 Case についての種々の設計水位時の安全率を示したものである。**Fig. 20** と **Fig. 22** を比較すれば明らかなように、式 (26) による安全率 1 の状態は式 (30) ではおおむね 4~9 に、また式 (31) では 3~8 の間に落着いており、このことからも限界動水勾配の概念による場合、相当大きな安全率が必要とされることもうなずけよう。ところで式 (30) は元来、粘着成分のない土に対して考えられたものであるが、その結果に粘着成分の有無を規定する項は何も含まれていないので、どのような土に対しても安全率はポテンシャル分布と物理的定数のみから定まることになる。しかるに、一般にポテンシャル分布は同一水平面では矢板に沿う点で最大値を与えるので、式 (30) による限り、矢板近傍において最小安全率を与えることになる（換言すれば、最初に破壊するのは矢板近傍である）。しかるに Case 8 の場合、有限要素解析によれば限界状態での塑性域は矢板近傍ではなく、矢板からある程度離れた箇所であり、この点も慣用法が不備であることを示唆するものである。

(4) 上載荷重の影響

Case 2, Case 3 の上載荷重は下流側地表面に押え盛土としてのローデッドフィルターを想定したものであり、したがってこれによって水理境界条件が影響を受けるものではない。この場合 Case 1 の無載荷状態と比べて限界状態での水位に 0.5 m の差がみられるが、載荷重が 2.0 t/m^2 と 3.0 t/m^2 では安全率自体に差は出でていない。これは、載荷重が大きくなれば地盤の押えの効果がある反面、地盤内部に過大なせん断応力を誘発し、破壊に関して両効果が相殺されるためと解釈される。すなわち、むやみに上載荷重を大きくすることは安全率を高めないばかりか、逆に低下をきたすおそれもある。このことは Case 2, Case 3 の解析結果より矢板近傍の主応力差の分布を調べると、Case 3 のほうがいくぶん大きいことからも判断されることである。さらに Case 8 の結果 (Fig. 17) にみられるように、最初の塑性域が矢板の前面からある程度離れたところに生ずるような場合、矢板の直前に局部的に押え盛土を施工しても、その効果はあまり期待できない。これに対して式 (30) ないし式 (31) によれば、載荷重の増大に伴って安全率は常に増大し、その一例が Fig. 22 にみられる。とおりである。このことも慣用法の欠点を示す顕著な例である。

(5) 容積変化に伴う透水性の変化について

4. で述べたように浸透力によるせん断変形に伴って

透水性が変化し、これが解析結果に影響を及ぼすのではないかとの疑問が生じる。このせん断変形に伴う透水性の変化を考慮する理想的な方法は、せん断試験時に任意の応力レベルでの透水係数を測定し、これをさきの接線係数と同様に主応力の関数として数式表示することである。しかしながら、現状の三軸圧縮試験装置では、せん断試験を継続しつつ透水係数を測定することはできないので、ここでは便宜的に次のような方法をとった。

一般に透水係数 k を間隙比 e の関数として表示するのに次式がよく用いられる²⁵⁾。

$$k = CD_s^2 \frac{r_w}{\mu} \cdot \frac{e^3}{1+e} \quad \dots \dots \dots \quad (32)$$

ここに、 D_s ：形状係数

C : 土粒子の集合体より定まる定数

r_w : 水の単位重量

μ : 粘性係数

ところで性質Aの砂の三軸圧縮試験時の容積変化は、液圧 1.0 kg/cm^2 のもとで、軸差応力一軸ひずみ曲線のピーク時近傍で $\Delta V/V = +6\%$ の膨張を示した（実験は液圧を 1.0 kg/cm^2 , 2.0 kg/cm^2 , 3.0 kg/cm^2 の3通りについて行ない、容積変化は 1.0 kg/cm^2 時が最大であった）。この $\Delta V/V = +6\%$ より間隙比を求め、これと初期間隙比とから、それぞれ式(32)より透水係数を求めると、初期の透水係数 k とピーク時近傍での透水係数 k_p との比は

となった。すなわち、液圧 1.0 kg/cm^2 のもとでは、式(32)に従う場合、初期透水係数 $k = 4.01 \times 10^{-2} \text{ cm/sec}$ に対して、破壊時の透水係数は $k_p = 6.78 \times 10^{-2} \text{ cm/sec}$ となる。そこで、この透水係数の変化の影響を調べるために、Case 1において

- i. 初期透水係数から出発して各水位増分段階ごとに
解析領域全体を通じて

ここに, k_i : 第 i 増分段階の透水係数
と修正

- ii. 第2段階終了時点で解析領域全体を通じて

と修正

- ### iii. 塑性化した要素のみに対して

と修正

の3通りについて第4段階まで解析し、結果を Case 1 と比較したところ、応力分布に多少変化がみられるものの、ほとんど相違ないことが判明した。

以上のことから式(33)で示される程度の透水係数の変化であれば、これを一定としてもほとんど結果に影響

しないものと推定される。ただ、式(32)が定性的な表現でしかないことや、任意の応力レベルでの透水係数の修正による検討がなされていないこともあり、今後三軸試験装置の改良も含めた基礎的な研究の積み重ねが必要であろう。

(6) 水位増分量の影響

Fig. 13~Fig. 15にみられるように、ほかの条件を一定として水位増分量を0.75m, 1.0m, 2.0mとして解析した結果は安全率にみる限り大差ないものである。当然予想されるように、増分量を大きくとればそれだけ精度は低下し、最初に現われる塑性域も広範囲となる。これを逆に解釈すれば、ある増分のもとで得られた安全率に関して、単にその数値のみにとらわれることなく、塑性域の拡大状況からの側面的な検討も可能となる。たとえば、Case 5とCase 6を比較すれば安全率は同一であるが塑性域から前者のほうが高精度といえよう。一方、限界状態までの反復計算の回数にみれば、前者の4回に対し、後者は2回であり、経済的には後者が有利である。この精度と経済性に関しては、ここであげた問題に限らず技術者にとって困難な課題であり、即断すべきでないが、一応の目安として1回の増分量は、図式解法などの簡便法で流線網を決定し、式(30) or (31)で求めた安全率の4~5に相当する水位差の1/3~1/4にとれば満足すべき結果が得られるようである。

6. 結 語

浸透流による地盤の破壊現象をより合理的に評価せんとして有限要素法を導入した新しい解析過程の定式化を試み、一応の成果が得られた。近時、掘削工事が大規模化するにつれ、締切堤も大型化の一途をたどっている反面、浸透流場の安定解析に関しては旧態依然として限界動水勾配の概念そのほかが踏襲されており、不合理な感を与えることは否めない。近い将来電子計算機のより一層の汎用化が予想され、さらに地質調査、不搅乱試料採取技術の向上、あるいは有限要素解析自体の改良²⁰⁾と相まってここに提示した解析法がより合理的な設計手段の一助となれば幸いである。ただ本研究のみでは必ずしも完全なものとはいはず、未解決な問題として、構造物の剛性、たわみ性によって大きく異なる周辺地盤との相互作用を考慮した定式化が残されているが、今後の課題としたい。

最後に本研究に関して種々ご指導、ご助言をいただいた徳島大学工学部建設工学科 小田英一教授、ならびに土木工学科 尾島 勝助教授に深甚の謝意を表する次第である。

なお、数値解析に関しては京都大学大型電子計算機センター FACOM 230-60 を利用したこと、および一部に文部省科学研究費の補助を受けたことを記して、関係各位に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- Zienkiewicz, O.C. and Y.K. Cheung : Finite elements in the solution of field problems, The Engineer, pp. 507~510, Sept. 24, 1965.
- Zienkiewicz, O.C., Mayer, P. and Y.K. Cheung : Solution of anisotropic seepage problems by finite elements, Proc. ASCE, EM, Vol. 92, No. 1, pp. 111~120, 1966.
- Finn, W.D. : Finite element analysis of seepage through dams, Proc. ASCE, SM, Vol. 93, No. 6, pp. 41~48, 1967.
- Taylor, R.L. and C.B. Brown : Darcy flow solutions with free surface, Proc. ASCE, HY, Vol. 93, No. 2, pp. 25~33, 1967.
- 川本眺男・駒田広也・宮口友延：堤体および基礎における浸透流の有限要素解析について、土と基礎、Vol. 18, No. 12, pp. 19~26, 1970.
- 飯田隆一・朝倉肇：非定常浸透流の有限要素法による解析、土木研究所報告、昭和46年4月
- 山上拓男・小田英一：非均質異方性地盤中の流れに関する有限要素解析について、土と基礎、Vol. 20, No. 3, pp. 7~13, 1972.
- Volker, R.E. : Non linear flow in porous media by finite elements, Proc. ASCE, HY, Vol. 95, No. 6, pp. 2093~2114, 1969.
- McCorquodale, J.A. and H.C. Ng : Non-Darcy flow solved by finite element analysis, 13th Congress of the IAHR, Kyoto, Japan, Vol. 4, Subject D, pp. 347~355, 1969.
- McCorquodale, J.A. : Variational approach to Non-Darcy flow, Proc. ASCE, HY, Vol. 96, No. 11, pp. 2265~2278, 1970.
- Remson, I., Hornberger, G.M. and F.J. Molz : Numerical Methods in Subsurface Hydrology with an introduction to the finite element method, Wiley-Interscience, 1971.
- Scott, R.F. : Principles of Soil Mechanics, Addison-Wesley, pp. 103~106, 1963.
- Polubarnova-Kochina, P.Ya. : Theory of ground water movement, Princeton Univ. Press, 1962.
- Harr, M.E. : Groundwater and Seepage, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, pp. 125, 1962.
- たとえば、林毅・村外志夫：変分法、コロナ社, pp. 27~34, 昭和44年
- 前出7), または5)
- 田辺行人：ベクトル・テンソルおよびその応用(1), コロナ社, pp. 25, 昭和42年
- 発電水力協会編：最新フィルダム工学, pp. 70~73, 昭和47年
- Duncan, J.M. and Chin-Yung Chang : Nonlinear analysis of stress and strain in soils, Proc. ASCE, SM, Vol. 96, No. 5, pp. 1629~1653, 1970.
- Janbu, N. : Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests, European Conference on soil mechanics & foundations engineering, Wiesbaden, Germany Vol. 1, pp. 19~25, 1963.
- 玉置脩・矢作枢・三橋晃司・永田正・青砥宏：ポイ

- リングに関する基礎実験とその考察（その1），土木学会
第27回年次学術講演会講演集，pp. 13～16，昭和47年
- 22) Terzaghi, K. : Theoretical soil mechanics, John
Wiley and Sons, pp. 258, 1951.
- 23) 前出 14)
- 24) 山口柏樹：土質力学，技報堂，pp. 98，昭和44年
- 25) Taylor, D.W. : Fundamentals of soil mechanics,
Charles E. Tuttle Co., pp. 111, 1968.
- 26) 川本勝万・宮地克人：材料非線形有限要素解析の一手法
について，土木学会論文報告集，No. 202, pp. 25～32,
1972-6.

(1972.8.8・受付)
