土木学会論文報告集
第 212 号・1973 年 4 月

間隙水圧を中心にした圧密論の再構成

A NEW DEVELOPMENT OF THE EQUATION OF CONSOLIDATION EXPRESSED IN TERM OF PORE WATER PRESSURE

吉　国　　洋*
By Hiroshi Yoshikuni

1. まえがき

周知のように Terzaghi は，一次元の圧密方程式として

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots(1)$$

を導き，この方程式が熱伝導型の方程式であることから圧密の問題が熱伝導の問題に対応していることを強調して述べている。もし Terzaghi がいうように圧密の問題が熱伝導の問題に相似しているならば，その対応に基づいて式（1）を三次元に拡張した方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\nabla^2 u \quad \cdots\cdots(2)$$

が予想されるのは自然である。しかし Terzaghi 自身もこの拡張に十分な自信を持っていなかったし，一般にもその妥当性を認められなかった。

この三次元に拡張された熱伝導型の圧密方程式の妥当性を確かめるために Rendulic[7] は特異な手法で三次元の圧密方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{\gamma_w f(x,y,z)}\nabla^2 u \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに

$$f(x,y,z)=\frac{\partial e}{\partial \sigma_1'}+\frac{\partial e}{\partial \sigma_2'}+\frac{\partial e}{\partial \sigma_3'}$$

を導き，$k/\gamma_w f(x,y,z)$ なる量が式 (2) の圧密係数に相当するものと考えた。Terzaghi[10] や Rendulic はこの値が位置の関数であることに着目し，この値を解析的にも実験的にも決定し得ないところに三次元圧密の方程式が実用にならない原因があると考えた。また式 (2) に示された熱伝導型の三次元圧密の方程式において，この値を定数として取扱うところに誤差の根源があると述べ，式 (2) の妥当性を否定した。

そこで，Biot 系列の圧密論は別として，Terzaghi 系列ではこの点を克服するため，Davis ら[4] が全応力の第一不変量の時間的変化を考えた圧密方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c'\nabla^2 u+\frac{1}{3}\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \cdots\cdots(4)$$

ここに

$$c'=\frac{kK}{\gamma_w}$$

$$\theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

を提案した。そして，三次元の熱伝導型の圧密方程式式 (2) と Davis らの方程式とを比較し圧密係数の形が異なることと，式 (2) に $\dot{\theta}$ の項が含まれていないことから，熱伝導型の圧密方程式は一次元の場合にしか成立しないと考えた。このように Rendulic も Davis らもおのおのの立場から式 (2) の妥当性を否定したが，それらは方程式の形の上で相違を指摘したもので，圧密方程式が具備すべき欠陥を指摘したものではない。式 (2) の妥当性を方程式の形の上で評価しうるのは Rendulic や Davis らの方程式が圧密方程式であるという保障があってのことである。しかし，式 (3) や式 (4) は，圧密方程式ではなく，むしろ Terzaghi を始めとして，一般から三次元圧密の近似方程式であると考えられている式 (2) がある特定の変形条件は含んでいるけれども圧密方程式として機能を果たしているのである。このような圧密論の混乱は今日なお三次元圧密の物理的概念が明確になっていないということでもある。そしてこの混乱の原因は Terzaghi 系列の圧密論が共通して持っている熱伝導的圧密の概念にあるものと考えられる。

この論文は間隙水圧を中心にした Rendulic, Schiffman および Davis らの圧密論の問題点を指摘するとともに弾性論の採用をうけ間隙水圧に注目して三次元圧密の問題を考える一手法を提案するものである。

* 正会員　工修　広島大学講師　工学部土木工学科

2. 間隙水圧を中心にした既往理論の問題点

(1) Rendulic の方程式[7]

まえがきにおいて述べたように Terzaghi は一次元の圧密方程式式 (1) を導き，この方程式が熱伝導型の方程式であることから，圧密現象と熱伝導現象との対応を強調して述べている。しかし，この対応は一次元の圧密に限られ三次元の場合にはこの対応は成立しないとして Terzaghi は式 (1) を式 (3) に拡張することの問題点を明確にすることはできなかったけれども，かなりの疑問を持っていたようである。そこで，Rendulic は，拡張された三次元の圧密方程式の妥当性を確かめるために特異な手法で三次元の圧密方程式を導いている。そしてその概要は次のようである。

まず，体積ひずみ e が，有効主応力だけの関数

$$e=f(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3') \quad \cdots\cdots (5)$$

であると考えるとき，応力の変化に伴う体積ひずみの変化量は，

$$\Delta e=\left(\frac{\partial e}{\partial \sigma_1'}\right)\Delta\sigma_1'+\left(\frac{\partial e}{\partial \sigma_2'}\right)\Delta\sigma_2'+\left(\frac{\partial e}{\partial \sigma_3'}\right)\Delta\sigma_3' \quad \cdots\cdots (6)$$

と書ける。そこで各有効主応力成分の変化量は，全応力と間隙水圧で表現して

$$\left.\begin{aligned}\Delta\sigma_1'&=\Delta\sigma_1-\Delta u\\ \Delta\sigma_2'&=\Delta\sigma_2-\Delta u\\ \Delta\sigma_3'&=\Delta\sigma_3-\Delta u\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7)$$

である。そして初期の状態 ($t=0$) では

$$\Delta e=0 \quad \cdots\cdots (8)$$

であるから式 (6) に式 (7) を代入し，式 (8) を考えるなら

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma_1'}(\Delta\sigma_1-\Delta u)+\frac{\partial e}{\partial \sigma_2'}(\Delta\sigma_2-\Delta u)+\frac{\partial e}{\partial \sigma_3'}(\Delta\sigma_3-\Delta u)=0$$

が得られる。上式より初期 ($t=0$) における間隙水圧は

$$\Delta u_{(t=0)}=\frac{\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_1'}\Delta\sigma_1+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_2'}\Delta\sigma_2+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_3'}\Delta\sigma_3}{\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_1'}+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_2'}+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_3'}} \quad \cdots\cdots (9)$$

である。ここで

$$\Delta\bar{e}=\frac{\partial e}{\partial \sigma_1'}\Delta\sigma_1+\frac{\partial e}{\partial \sigma_2'}\Delta\sigma_2+\frac{\partial e}{\partial \sigma_3'}\Delta\sigma_3 \quad \cdots\cdots (10)$$

とおく。この $\Delta\bar{e}$ は式 (7) において，$t\to\infty$ のとき，$u=0$ となり，

$$\Delta\sigma_i'=\Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, 3)$$

であるから，初期から最終状態に至るまでの体積ひずみの全変化量を示している。この $\Delta\bar{e}$ を使って初期間隙水圧を表わすならば，

$$\Delta u_{(t=0)}=\frac{\Delta\bar{e}}{\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_1'}+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_2'}+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_3'}} \quad \cdots\cdots (11)$$

を得る。また任意時刻における体積ひずみの値 $e+\Delta e$ は初期の体積ひずみ e と最終状態における体積ひずみ $e+\Delta\bar{e}$ の間に存在するので，任意時刻における Δe と Δu の関係を式 (6) の関係に式 (7) と (10) を用いて表わせば，

$$\Delta u=\frac{(\Delta\bar{e}-\Delta e)}{\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_1'}+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_2'}+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_3'}} \quad \cdots\cdots (12)$$

であり，これを時間で微分して

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{-1}{\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_1'}+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_2'}+\dfrac{\partial e}{\partial \sigma_3}}\cdot\frac{\partial e}{\partial t} \quad \cdots\cdots (13)$$

を得る。一方，$dx\cdot dy\cdot dz$ なる微小立方体が圧縮されて dt 時間に体積を減少する量は，連続の条件式より

$$\frac{\partial e}{\partial t}dt\cdot dx\cdot dy\cdot dz=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\cdot dx\cdot dy\cdot dzdt$$

である。これに Darcy 則を考えるなら

$$\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{k}{\gamma_w}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

となる。これを式 (13) に代入すると三次元の圧密方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{\gamma_w f(x, y, z)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \cdots\cdots (14)$$

を得る。ここに

$$f(x, y, z)=\frac{\partial e}{\partial \sigma_1'}+\frac{\partial e}{\partial \sigma_2'}+\frac{\partial e}{\partial \sigma_3'} \quad \cdots\cdots (15)$$

である。

そこで，Rendulic[8] は式 (14) の $k/\gamma_w f(x, y, z)$ なる量が熱伝導型の三次元における圧密方程式の圧密係数 c_v に相当するものと考え三軸圧密試験装置を用いてこの値を実験的に調べている。そして Terzaghi[10] は，その実験結果に基づき拡張された熱伝導型の三次元圧密方程式式 (2) の妥当性について圧密係数の値を対象に議論し，この値を定数として取扱うところに三次元圧密における誤差の根源がある。そして，この関数 $f(x, y, z)$ の形が実験的にも明らかにされていないところに，三次元圧密の理論が実用にならない主たる原因があるとさえ述べている。

以上は，三次元圧密に対する Rendulic の考え方と，その所産に対する Terzaghi および Rendulic の解釈ないしは結論を述べたものである。そして，この結論の中に Terzaghi および Rendulic がもっていた圧密の概念を見出すことができる。ここで Rendulic の考え方を検討することになるが Rendulic の記述は非常に難解であって，Terzaghi および Rendulic 自身がそうであっ

たように考えていることの本質を見失いやすい。その本質を見失わす元凶は式 (6) であって式 (6) を事前に少し検討しておくならば Rendulic が記述していることの物理的意味を明確にすることができる。しかし，そうして明確にされた物理的意味は Rendulic や Terzaghi が期待し考えていたものと相違するかも知れない。

Rendulic は圧密方程式の誘導において土の力学的性質を明確に規定していない。それにもかかわらず著者は，Rendulic の方程式のもつ物理的意味の説明に線形弾性の仮定を採用しようとしている。それは次の3つの理由によるものである。第一の理由は，Terzaghi の圧密方程式が線形弾性の仮定を含んでおり，Rendulic の論文がその方程式の理論的妥当性の検討を目的としているからである。第二の理由は，土の力学的特性が圧密方程式の備えるべき基本的性質を何ら変更しないからである。言葉をかえるなら，線形弾性の仮定は Rendulic の導いた方程式が圧密方程式であるか否かの判断になんら支障とならないからである。第三の理由は Rendulic が，

$$f(x, y, z)=\frac{\partial e}{\partial \sigma_1'}+\frac{\partial e}{\partial \sigma_2'}+\frac{\partial e}{\partial \sigma_3'}$$

を時間に無関係な量であると考えていることであり，有効主応力 $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ が時間的に変化するという条件のもとでこれが成立するのは土の力学的特性が線形弾性の場合に限るからである。以上の理由によって，土の力学的特性を線形弾性と仮定し以後の取扱いをする。

まず，式 (6) を具体的に書くなら

$$e=\frac{1}{3K}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')=\frac{1}{3K}\theta' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

であり，K は体積弾性係数であり，θ' は有効応力の第一不変量である。Rendulic は式 (5) の表現を主応力に固執しているが，その理由は定かではない。そこで式 (16) を $\sigma_i'(i=1, 2, 3)$ で偏微分するならば，

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma_i'}=\frac{1}{3K} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

である。この関係を使って式 (6) を書き改めるならば

$$de=\frac{1}{3K}d\theta' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

であり，式 (15) は

$$f(x, y, z)=\frac{\partial e}{\partial \sigma_1'}+\frac{\partial e}{\partial \sigma_2'}+\frac{\partial e}{\partial \sigma_3'}=\frac{1}{K} \cdots\cdots (19)$$

であって，位置的および時間的に定数である。以上のことをふまえて Rendulic の記述を見直すことにする。

$t=+0$ における間隙水圧 $\Delta u_{(t=0)}$ [式 (9)] は

$$\Delta u_{(t=0)}=\frac{1}{3}(\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2+\Delta\sigma_3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

であり，$t=0$ から $t\to\infty$ までの体積ひずみの変化量 $\Delta\bar{e}$ [式 (10)] は

$$\Delta\bar{e}=\frac{1}{3}\frac{1}{K}(\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2+\Delta\sigma_3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

である。そして初期間隙水圧 $\Delta u_{(t=0)}$ と最終体積ひずみの変化量 $\Delta\bar{e}$ との間の関係

$$\Delta u_{(t=0)}=K\Delta\bar{e} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

となる。そして式 (22) が成立するためには

$$(\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2+\Delta\sigma_3)_{t=0}=(\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2+\Delta\sigma_3)_{t\to\infty}$$

であり

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

でなければならない。したがって全応力の第一不変量が時間的に変化しないという仮定を Rendulic は採用したことになる。そして最終的に求めた任意時刻における体積ひずみと間隙水圧との間の時間的変化の関係［式 (13)］は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-K\frac{\partial e}{\partial t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

と表わされる。これに連続の条件を入れるならば，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{kK}{\gamma_w}\nabla^2 u \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

となり，これが Rendulic のいう圧密方程式である。しかし式 (25) は圧密方程式ではない。なぜならば式 (25) が導かれる過程でつり合い条件および三次元の応力ひずみ関係が全然考慮されていないからである。考慮されているのは連続の条件だけであり，しいていうなら，$\dot{\theta}=0$ の仮定を含んだ連続の条件式ということになる。そしてまた，式 (25) は Gibsoh や Davis らのいう圧密方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{kK}{\gamma_w}\nabla^2 u+\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

の $\dot{\theta}=0$ としたものに一致する。

ここで全応力の第一不変量が時間的に変化しないという仮定がもつ物理的意味を考えてみよう。圧密においてある要素の間隙水圧が Δu だけ減少し，それに伴って体積変化を生じたとき，増加した有効応力の成分 ($\Delta\sigma_x'$, $\Delta\sigma_y'$ および $\Delta\sigma_3'$) の相互間に

$$\Delta\sigma_x'=\Delta\sigma_y'=\Delta\sigma_z'=-\Delta u$$

または

$$\Delta\sigma_x'\neq\Delta\sigma_y'\neq\Delta\sigma_z'$$

の関係が成立するときの2つの場合がある。前者は要素に形状変形が存在しなくて，体積変形だけが存在するときであり，変形に伴って

$$\Delta\sigma_x=\Delta\sigma_y=\Delta\sigma_z=0$$

であることが可能である。これに対して後者は，要素に形状変形と体積変形とが共存する場合であり，全応力の成分のうち，いずれか1つ以上は変形に伴って，必ず変化する。そしてまた一般に，全応力の第一不変量も変化する。これは当初，形状変形になんら抵抗しない間隙水

が受持っていた外力を間隙水圧の減少に伴って形状変形に抵抗する土の骨格がこれを受けもつことに起因する。このようなことのために，土塊の中のすべての点で全応力の第一不変量が時間的に変化しないためには土塊の中のすべての点に形状変形が発生してはならない。これを満たすためには，ひずみ適合条件から

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}\, e)=0$$

でなければならない。しかし，いかなる場合の圧密においても $t=0$ および $t\to\infty$ のときを除いて体積ひずみの分布に時間的変化がないということを認めることはできない。以上のことから $\dot{\theta}=0$ の仮定を含んでいる Rendulic の方程式は，初期を一様体積ひずみの状態とするならば $\dot{e}=0$ または $\mathrm{grad}\, e=0$ のときにだけ成立する連続の条件式であるということができる。このような条件のもとでは式 (25) のすべての項は 0 となり，なんら物理的意味を持たない。

(2) Davis らの方程式[4)]

熱伝導型の圧密方程式は，一次元の場合に，その妥当性を認めることができるが，単に熱伝導との対応において三次元に拡張された圧密方程式の妥当性は認め得ないとして，Davis[4)] らは，別な角度から三次元圧密の問題を考えた。そしてそれは圧密の進行に伴って生じる全応力の変化を考慮しようということであった。このような考え方は Davis 以前に Gibson[5)] によっても出されているが Davis らの説明がより詳しいので Davis らの記述にしたがってこの問題を考えてみよう。

Davis ら (1963) は三次元圧密の問題を次のように説明している。圧密の基礎方程式は

$$\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u+\frac{\partial e}{\partial t}=0 \quad\cdots\cdots(26)$$

と書かれ，三次元における有効応力の第一不変量 θ' と体積ひずみの関係は，

$$e=\frac{1-2\nu}{E}\theta'=\frac{1-2\nu}{E}(\theta-3u) \quad\cdots\cdots(27)$$

である。ここに

$$\theta=\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma_z'+3u$$

であり，圧密過程中時間とともに変化する。そこで式 (27) を式 (26) に代入すれば，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_{v3}\nabla^2 u+\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad\cdots\cdots(28)$$

となる。ここに

$$c_{v3}=\frac{kE}{3\gamma_w(1-2\nu)}=\frac{kK}{\gamma_w}$$

である。これは三次元の圧密に対する方程式であるが，二次元および一次元のひずみ条件の場合には式 (28) は，より簡単な形になり，それぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_{v2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_x+\sigma_y) \quad\cdots(29)$$

ただし，

$$\begin{cases}\varepsilon_z=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=0\\ c_{v2}=\dfrac{kE}{2\gamma_w(1-2\nu)(1+\nu)}\end{cases}$$

および

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_{v1}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial t} \quad\cdots\cdots(30)$$

ただし，

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\varepsilon_y=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ c_{v1}=\dfrac{kE(1-\nu)}{\gamma_w(1-2\nu)(1+\nu)}\quad\left(=\dfrac{k}{\gamma_w}(\lambda+2\mu)\right)\end{cases}$$

であり，3 つの圧密係数の間には次の関係がある。

$$c_{v1}=2(1-\nu)c_{v2}=3\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)c_{v3}$$

そして式 (30) は，Terzaghi の一次元圧密の方程式と一致すると Davis らは述べている。また式 (28)，(29) および式 (30) の右辺第 2 項，すなわち全応力の時間的変化を表わした項は，土塊の境界における表面力が時間的に変化しない場合に消失する。その具体的な例として実験室における等方定荷重のもとでの三軸圧密試験をあげている。しかし，一般的ケースにおいて，$\dot{\theta}$ を決定することは容易でないので近似的手法として，$\dot{\theta}=0$ の仮定をおいた場合に発生する誤差についての議論をしている。また最後に変位または体積ひずみによる 2 つの圧密度が定義されており，その 1 つ体積ひずみによる圧密度 U_v の定義は

$$U_v=1-\frac{\iiint u_{(t=t)}dx\cdot dy\cdot dz}{\iiint u_{(t=0)}dx\cdot dy\cdot dz}$$

である。以上，Davis らの三次元圧密に対する考え方の要旨である。

Davis らによって導かれた式 (28)，(29) および式 (30) は連続の条件式であって圧密の方程式ではない。それは，Rendulic が導いた方程式と同様に連続の条件だけが考慮されて，つり合い条件および三次元の応力ひずみ関係が全く考慮されていないことにある。確かに一次元の場合の式 (30) は Terzaghi の一次元の圧密方程式に非常によく似ているが，やはり基本的には連続の条件式である。そこで，圧密方程式として式 (30) に欠除している条件，すなわちつり合い条件が付加されるならば，立派に圧密方程式として機能する。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varepsilon_z}{\partial x}=\dfrac{\partial\varepsilon_z}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

の条件のもとでのつり合い方程式は

$$\frac{\partial \sigma_z'}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

であり，これを積分して

$$\sigma_z'+u=\text{const}\ (z\text{方向に})\cdots\cdots(31)$$

であり，境界条件を入れて

$$\sigma_z'+u=p_z\ (=\sigma_z)$$

である。また三次元の応力ひずみ関係は $\varepsilon_x=\varepsilon_y=0$ のもとでは，全く簡単になり

$$\sigma_z'=(\lambda+2\mu)\varepsilon_z$$

である。しかしこれはすでに $\varepsilon_z=e$ という形で結果的に考慮済であるので，式 (31) だけ，すなわち全応力は z 方向に一定で，かつ荷重 p_z に等しいという条件だけを付加すれば圧密方程式として機能する。式 (31) の意味することは全く単純なことではあるが，最も基本的で重要な事柄である。Terzaghi は，一次元の圧密方程式の誘導を式 (31) から出発しているが，この方程式のもつ本来の役割にほとんど気付いていない。そしてこのことが Terzaghi 系列の三次元圧密論を混乱させる端緒ともなっているのである。

また，Davis らは $\dot{\theta}=0$ が満たされる境界条件とか一般の場合に $\dot{\theta}=0$ とおくことによる誤差の問題にふれているが，Rendulic の方程式の検討においてすでに述べたように圧密の問題において $\dot{\theta}=0$ ということは存在し得ないのである。三次元圧密に対する Davis らの考え方のもう1つの矛盾を彼らの提案する圧密度の定義に見出すことができる。Terzaghi の圧密の概念というのは，すでに幾度か指摘したように，体積変化は間隙水圧の変化に比例するということである。これに対して Davis らの考えた圧密の方程式は，間隙水圧の変化量が，すなわち体積変化量ではないことを示しており，Terzaghi の圧密の概念と大きく隔絶するところでもある。それにもかかわらず Davis らは，圧密度の定義に，間隙水圧の変化量，すなわち体積変化という Terzaghi 圧密の概念を持ち出している。このあたり Terzaghi の圧密の概念がいかに根強いものであるかを感じさせるところである。

さらに Davis らは 1972 年になって，この圧密論を帯基礎の問題に適用し，$\dot{\theta}=0$ の仮定と二次元の圧密係数 c_{v2} を一次元の圧密係数 c_{v1} に置き換える操作をするならば，その結果は Biot 理論に基づいて解かれた Gibson らの解と比較的よく一致し，工学的にもよく利用に耐え得ると述べている。しかし Davis らの行なったこの操作は帯基礎の圧密問題を熱伝導型の圧密方程式で近似したことにほかならない。ここで著者は熱伝導型の圧密方程式による近似性を議論しようとしているのではなく，問題は Davis らの近似操作にあることを強調したい。先述のように Davis らの方程式は圧密方程式ではなく連続の方程式であること，$\dot{\theta}=0$ とすることによって方程式全体が0になること，c_{v2} を c_{v1} に変換することの物理的意味の不明確なことが指摘されねばならない。このような Davis らの操作は間隙水圧を中心にした圧密論（Terzaghi 系列の圧密論）が，共通してもつつり合い方程式に対する配慮のなさに起因するもので，むしろ最初から三次元に拡張された熱伝導型の圧密方程式で近似するとしたほうが結果は同じであるが，圧密の物理的概念を混乱させないだけより好ましいと考えられる。

（3） Schiffman の考え方[9]

一次元から三次元の問題まで含めて Terzaghi の圧密方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\nabla^2 u\ \cdots\cdots(2)$$

は，圧密荷重一定の条件を含んでいる。そこで圧密荷重が漸変する場合の圧密方程式は式 (2) が線形であるので重ね合せの原理を適用して単に

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\nabla^2 u+\frac{dp}{dt}\ \cdots\cdots(32)$$

と書き下すことができる。ここに p は圧密荷重である。もちろん式 (32) は定荷重のもとで式 (2) が成立するとしてのことである。この漸変荷重の問題を上述の方法は別の方法で考え，いくつかのケースの圧密に適用したのが Schiffman[9] である。圧密の基礎方程式の誘導における Schiffman の手法は，一般的な数学の手法ではないし，方程式に次元の不一致があったりするので，その部分を訂正し一般的な手法で書き改めることにする。なお，Schiffman は，透水係数が変化する場合も同時に考えているが本研究の意とするところと一致しないので，その問題は省略されることになる。

Schiffman の三次元圧密に対する考え方の大要は次のようである。ある領域をもつ土塊の中に微少な要素 dV を考え，v をベクトルで表わした間隙水の流速とすると，その微少要素への間隙水の流入流出による単位時間における体積変化は

$$\text{div}\,\boldsymbol{v}dV$$

である。一方，内部的に発生する水頭の変化による単位時間における体積変化は

$$QdV$$

である。したがって単位時間における全体積変化量は

$$\frac{\partial e}{\partial t}dV=\text{div}\,\boldsymbol{v}dV+QdV$$

である。ここで Darcy 則を使って上式を表現し直せば

$$\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u+Q\cdots\cdots(33)$$

である。そこで土が弾性体であるとすると，体積ひずみと平均有効応力 σ_m' の間には

$$e=\frac{1}{K}\sigma_m' \quad \cdots\cdots(34)$$

の関係がある。また一方，平均有効応力と間隙水圧および平均全応力の間には

$$\sigma_m=\sigma_m'+u \quad \cdots\cdots(35)$$

の関係がある。ここで Schiffman は，間隙水圧の変化量と体積変化との関連について，次のような議論をしている。

"The physics of consolidation, as formulated by Terzaghi, is based on the principle that initially the total applied stress is developed as neutral stress (excess hydrostatic pressure) and that as flow develops, relieving the excess hydrostatic pressure, the applied stress becomes effective. The change in the effective stress, furthermore, follows the same law as the volume change. Thus Eq. 35 can be written in differential form during the process of consolidation, as follows:

$$d\sigma_m'=du" \quad \cdots\cdots(36)$$

したがって，式 (34) と式 (36) から

$$de=-\frac{1}{K}du \quad \cdots\cdots(37)$$

が得られる。ここに式 (37) 右辺の負号は，圧密過程中，体積が減少することを表わしたものである。そして式 (37) を式 (33) に代入すれば

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{kK}{\gamma_w}\nabla^2 u+KQ \quad \cdots\cdots(38)$$

が得られ，これが漸変荷重のもとでの圧密方程式であると Schiffman は述べている。

このような三次元圧密に対する Schiffman の考え方の第一の問題点をさきに原文のまま引用した Schiffman の記述にみることができる。すなわち，間隙水圧の変化量は，体積変化量に比例するという Terzaghi の一次元圧密の概念が単純な方程式の変化を無視してまで容易に受け入れられるということにある。具体的には式 (37) 右辺の負号は圧密過程中に体積が減少することを表現しているのではなくて，それ以前に式 (36) の右辺に負号がつくべきである。そして式 (36) は式 (35) において $d\sigma_m=0$ とおいて得られる種類のものであり，間隙水圧の減少は有効応力の増加を意味している。

しかし，Schiffman は式 (35) にかかわりなく，全く直感的に式 (36) を持ち出しており，$d\sigma_m=0$ の仮定をおいたことにさえ，ほとんど気付いていない。また，$d\sigma_m=0$ の仮定がどのような物理的意味をもつかについて当然のことながらまったく考慮を払っていない。そしてこれは Rendulic がおちいった誤りとまったく同じである。

Schiffman の考え方の第二の問題点は，内的に発生する間隙水圧に起因する体積変化 QdV なるものの物理的意味の不明確さにある。土粒子および間隙水の非圧縮性を仮定し，完全飽和であるという条件のもとでの体積変化は間隙水の流入流出以外に考え得ない。すなわち，

$$\dot{e}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

であり，QdV なる量のようなものは存在し得ない。このように物理的意味の不明確なままで持ちこまれた Q の果たす役割は，Schiffman の方程式式 (38) と Davis らの方程式を比較することによって容易に理解できる。すなわち Davis の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{kK}{\gamma_w}\nabla^2 u+\frac{1}{3}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

であり，もし

$$KQ=\frac{1}{3}\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \cdots\cdots(39)$$

であるなら両者は一致する。しかし，Schiffman は意識せずにではあるが，$\dot{\theta}=0$ の仮定をおいているので式 (39) の等号は基本的には成立しないが，結果的に不明確な量 Q が非現実的な $\dot{\theta}=0$ の仮定を補っていることになる。もし両者が等価でないとするならば，Schiffman の方程式は物理的意味の不明確さもさることながら数学的にも一般性を欠くことになる。

Schiffman の方程式の第三の問題点は具体的問題へのこの方程式の適用方法にある。結論的にいうならば Schiffman は彼の導いた漸変荷重のもとでの圧密方程式を一次元圧密，帯状基礎による圧密およびサンドドレーンによる圧密に適用している。しかし，その内容はいつのまにか，Terzaghi の圧密方程式を基に書き下した漸変荷重の基での圧密方程式式 (32) に置き換えられているということである。具体的には，なんらの裏付けもなく直感的に

$$KQ\rightarrow\frac{dp}{dt}$$

と置き，彼が彼の方程式において圧密係数であると考えているものと，Terzaghi の方程式における圧密係数には歴然とした相違があるにもかかわらず，まったく両者を区別しないところにある。

3. 間隙水圧を中心にした圧密論

三次元圧密の問題は，Terzaghi-Rendulic および Davis らの圧密論では解決され得ず，それらに共通した問題点は，つり合い方程式と三次元の応力ひずみ関係に対する配慮の欠除にあることを前節で示した。それがため Terzaghi 系列の圧密論を具体的問題に適用しようとした人達の多くは境界条件の取扱いで苦慮し，結果的に内部応力の分布を仮定することによって工学的近似解を

求めているのが現状である。この点において独立に研究を進められてきた Biot の圧密論の優位性は明らかであるが，具体的問題の解を得ることがきわめて困難であるため，従来 Biot の圧密論が大きく発展しなかったものと考えられる。ある種の問題においては，間隙水圧を中心にした圧密論も先述の欠陥を補えば，ある程度実際問題に有用な解を得る手法になり得ることを示そう。これにより Terzaghi 理論と Biot 理論の関連ないしは Terzaghi 理論の位置づけが明らかにされると考える。

飽和した粘土地盤におけるつり合い方程式は，土塊の骨組の変形が線形弾性則にしたがうとすると

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,e-\mu\,\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}\,u=0 \cdots (40)$$

であり，式 (40) の発散と回転を考えるなら，それぞれ

$$\nabla^2\varphi=0 \cdots\cdots (41)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{w}=0 \cdots\cdots (42)$$

ただし，

$$\boldsymbol{w}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$$

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u$$

である。一方ある境界条件のもとにおける式 (41) の解と連続の条件式

$$\dot{e}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=-\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u \cdots\cdots (43)$$

を結合すれば，圧密の方程式が得られ，

$$\dot{u}=c_v\nabla^2 u+\dot{\varphi} \cdots\cdots (44)$$

である。

式 (44) から明らかなように $\varphi\neq 0$ であるので，$\dot{\varphi}=0$ であるような境界条件（参考文献 11）参照）のもとで熱伝導型の圧密方程式式 (2) が成立する。言葉を換えるならば，式 (2) は式 (44) の特殊なケースであり，すでに境界条件を含んでいるということである。

そこで式 (41) の解を求める過程で，境界条件に関連して2つのケースが考えられる。その1つは土塊のすべての点において

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w}=0$$

を満たす境界条件の場合であり，式 (42) は消失して単独に式 (41) だけとなる。またそれ以前に式 (40) から明らかなように，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w}=0$ の場合には

$$\mathrm{grad}\,\varphi=0$$

である。したがってスカラーポテンシャル φ は位置的に定数であり，圧密方程式は

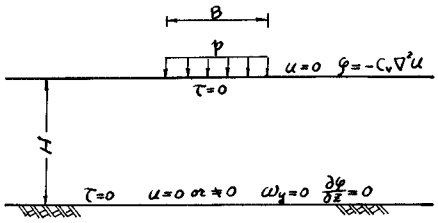
$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\nabla^2 u+\frac{d\varphi}{dt} \cdots\cdots (45)$$

となり，φ の値は境界面における任意の一点，またはある面で決定しうる。この場合の φ の決定法および $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w}=0$ を満たす境界条件に対する議論は，参考文献 11) に述べられている。今一つのケースは $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w}\neq 0$ の場合である。この場合には式 (41) に境界条件を φ という形で与え得ないので，式 (42) の援用を得て式 (2) を解くことになる。しかし，それも一般的には解き得ないので境界条件を緩めて次の2つの境界条件を設定しなければならない。

（1） 境界面はすべて滑らかである。

（2） 少なくとも自由変位界面は排水面である。

境界条件 (1) を与えると，剛な界面に沿った回転は，つねに0であり，境界条件 (2) を与えると，自由変位界面では $u\equiv 0$ であるから，$\dot{\varphi}=(\lambda+2\mu)\dot{e}=-c_v\nabla^2 u$ となる。今，具体的問題で，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w}\neq 0$ のケースの解法を示そう。



図—1

具体的問題としての図—1に示す有限地盤における帯状基礎の問題では

$$z=H,\ x=x,\ t=t$$

において

$$w_y=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

$$\because\ \mathrm{equi}\,\varphi\perp\mathrm{equi}\,w$$

であり，$z=0$ の自由変位界面における φ の値が判明すれば式 (41) は混合境界値問題として解くことができる。そこで境界条件 (2) を考えると式 (44) は

$$\dot{\varphi}(x,0,t)=-c_v(\nabla^2 u)_{x,0,t} \cdots\cdots (46)$$

$$\because\ \dot{u}(x,0,t)=0$$

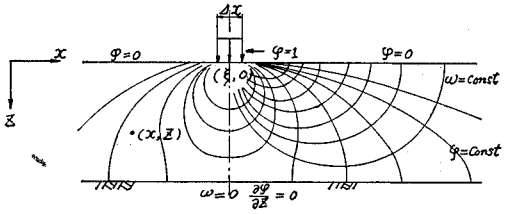
となり，自由変位界面における φ の値は

$$\varphi(x,0,t)=\int_0^t\varphi(x,0,\tau)d\tau+\varphi(x,0,0) \cdots (47)$$

として求めることができる。今，自由変位界面の1点 $x=\xi$ に単位のスカラーポテンシャル φ が与えられたときの解を $f(x,z,\xi)$ とすると，任意点の $\varphi(x,z,t)$ は

$$\varphi(x,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,0,t)f(x,z,\xi)d\xi \cdots (48)$$

で与えられる。この関係を式 (44) に代入し，差分法により解を求めることになる。



図—2

初 期 値

弾性学の教えるところにより，全応力 σ_x, σ_z を求め（参考文献 1）参照）Hooke 則を考えると

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma_x'+u=(\lambda+2\mu)e-2\mu\varepsilon_z+u\\ \sigma_z&=\sigma_z'+u=(\lambda+2\mu)e-2\mu\varepsilon_x+u\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(49)$$

であり，上の 2 式を加え合せ，$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u$ を考えると

$$\sigma_x+\sigma_z=2\varphi-2\mu e$$

$$\therefore\ \varphi=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z)+\mu e$$

今，$t=0$ において，$e=0$ であるから $\varphi=u$ であり

$$\varphi(x,z,0)=u(x,z,0)=\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\cdots\cdots(50)$$

として初期値を求めることができた。この初期値を求める方法については，すでに赤井教授が，参考文献 1）において採用されている。

表面の沈下

以上で圧密過程の計算に必要なものは準備できたわけであるが，工学的に必要な量である自由境界面の沈下は次のようにして計算することができる。今の場合，界面は滑らかであるので

$$\left.\begin{aligned}&z=0\ \text{で}\ \tau=0,\ r=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}=0\\ &\therefore\ \frac{\partial u_x}{\partial z}=-\frac{\partial u_z}{\partial x}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(51)$$

あり，回転の y 方向の成分 w_y は

$$w_y=\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}$$

であるから，式 (51) の関係を考慮して

$$w_y(x,0,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}u_z(x,0,t)$$

である。したがって自由表面の沈下量は

$$u_z(x,0,t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}w_y(\xi,0,t)d\xi+C\cdots\cdots(52)$$

として求められる。ただし，積分定数 C は，今の場合，$x\to\infty$ のとき $u_z=0$ となるので，$C=0$ である。また $w_y(x,0,t)$ は，つり合い方程式式 (40) の z 方向の成分

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,0,t)=\mu\frac{\partial}{\partial x}w_y(x,0,t)\\ &\therefore\ w_y(x,0,t)=\frac{1}{\mu}\int\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,0,t)dx\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(53)$$

として求めることができる。なお，圧密される地盤が，x 方向に有限の場合には，式 (52) の積分定数 C をすぐに決定しえないので，次の関係を考慮して決定する。すなわち，

$$\int_V edV=-\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}dV=-\int_S u_n dS$$

であり，今の場合，$z=0$ の界面だけが自由に変位するとすれば

$$\int_V edV=-\int_{x_1}^{x_2}u_z(x,0,t)dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

である。ここに，x_1, x_2 は，x 方向の境界面である。

以上の考え方は，先述の 2 つの境界条件を満たすかぎり二次元の問題だけでなく三次元の問題にも拡張して適用することができるし，剛な界面の排水条件は任意に（局部的でもよい）設定することができる。

4. 熱伝導型の方程式による近似

基本的には，熱伝導型の圧密方程式式 (2) は成立しない。問題に，工学的近似として式 (2) を採用しようとする場合，それはどのような物理的仮定を置いたことを意味するのか，また圧密過程にどのような特性の差異があるのかを事前に検討し，工学的近似性をある程度予測しておく必要がある。今，具体的問題として，帯状基礎による圧密の問題をとりあげよう。この問題は，赤井[1] によって計算されているが，基本的には式 (2) は成立しない。熱伝導型の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\nabla^2u$$

は，式 (44) の右辺第 2 項を 0 とすれば得られ，すなわち $\dot{\varphi}=0$ である。粘土地盤内のすべての点で $\dot{\varphi}=0$ であるためには，前節の議論から図—1 における $z=0$ の自由変位界面で，$\dot{\varphi}(x,0,t)=0$ であればよい。そこでスカラーポテンシャル φ は，式 (49) の関係から

$$\varphi=\sigma_z+2\mu\varepsilon_x$$

であり，$z=0$ において $\sigma_z=p$ or 0 であり，$\dot{p}=0$ とすれば

$$\dot{\varphi}(x,0,t)=2\mu\dot{\varepsilon}_x(x,0,t)$$

となる。すなわち熱伝導型の圧密方程式が成立するためには $\dot{\varepsilon}_x(x,0,t)=0$ でなければならない。これは載荷直後いくらかの側方変位があっても，$z=0$ の界面で $\tau=0$ であるにもかかわらず，圧密過程中，側方変位が発生しないという仮定を含んでいる。一般的には，$\dot{\varepsilon}_x(x,0,t)\neq 0$ であり圧縮を正に考えているので，載荷直後，側方に変位したものが圧密過程中回復（$\dot{\varepsilon}_x>0$）すると予想すれば，$\dot{\varphi}(x,0,t)>0$ である。また一方式 (44) において，$\dot{u}(x,0,t)=0$ とおけば

$$\dot{\varphi}(x,0,t)=-c_v(\nabla^2u)_{x,0,t}$$

であり，$z=0$ の界面で $\nabla^2u<0$ であると予想されるので，やはり前述の結論が得られる。したがって境界値がつねに正であれば式 (41) の Laplace の方程式の性質から内部的にも $\dot{\varphi}(x,z,t)\geqq 0$ であり，この種の問題においてはスカラーポテンシャル φ は載荷重一定のもとでも増加過程をたどる。また，圧縮過程においては $\nabla^2u<0$ であるが，圧密の初期においては，排水面からある程度離れた部分の ∇^2u の値は小さく，$\dot{\varphi}$ の値は最

も大きいので式 (44) は

$$\dot{u}=c_v\nabla^2 u+\dot{\varphi}>0$$

となり，部分的に間隙水圧は，いったん増加し，圧密過程のある時期に $|c_v\nabla^2 u|$ の値と $\dot{\varphi}$ の大小関係が逆転して減少過程に入る。この点式 (2) で近似すれば，$z=H$ の界面を排水面と仮定すれば，$\nabla^2 u$ の値はつねに負であり，粘土層のすべての部分で間隙水圧は単調に減少することになる。このようなことのために式 (2) で近似された解は，厳密解よりも圧密過程を早く予測することになる。

5. あとがき

以上，Terzaghi 系列における 3 つの代表的三次元圧密の基礎理論を検討してきたが，いずれも手法的にいくらかの相違はあるけれども，圧密現象の 1 つの側面，すなわち，拡散現象だけを追求し，応力のつり合いおよび応力-ひずみ関係に対し，まったく考慮を払わなかったか，またはそれを考慮する方法に妥当性を欠いたかのいずれかであった。そして連続の条件式を変形して $\dot{u}$ と $\nabla^2 u$ の項を含んだ方程式に導き得れば，圧密の方程式を得たと考えたのは三者に共通した錯誤であった。こうした Terzaghi 系列の圧密論の欠陥を補い，ポテンシャル論により圧密の問題を考えようとしたのが **3.** で述べた手法である。この考え方と Biot 理論は基本的に同一のものであるが，Biot は，

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,e+\mu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w}+\mathrm{grad}\,u=0 \qquad \text{(つり合い方程式)}$$

$$\dot{e}=c_v\nabla^2 e \qquad \text{(連続の条件式)}$$

を変位関数を導入して直接的に解こうとしたのに対し，提案する手法は，つり合い方程式をスカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{w}$ に分割し，

$$\nabla^2\varphi=0$$

$$\nabla^2\boldsymbol{w}=0$$

2 つの Laplace の方程式の解に連続の条件を考慮して得られた圧密の方程式

$$\dot{u}=c_v\nabla^2 u+\dot{\varphi}$$

を解こうというものである。そして Terzaghi 系列の圧密論は，この手法における特殊なケースであり，その位置づけも明らかであると考える。ただ，この手法の問題点は Laplace の方程式を解くにあたり，境界値が φ, $\boldsymbol{w}$ という形で与えられないので一般的問題の解は求め得ないが，滑らかな面で境界がある形に拘束される場合には式 (42) が消失して問題が非常に単純になるか，または式 (42) に対する境界条件が与えられるので，式 (42) と式 (43) の関連性から式 (42) を解き得るので，いわゆる拘束圧密の問題を解くには Biot の圧密方程式を直接解くより容易なのではないかと考えている。

終りにあたり，この研究に対して多大のご指導をいただいた広島大学　網干寿夫博士，門田博知博士ならびに東京工業大学教授　山口柏樹博士に深く感謝の意を表します。

記　号

c_v：圧密係数
$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$：体積ひずみ
K：体積弾性係数
k：透水係数
p：圧密荷重
t：時間
u：間隙水圧
$\boldsymbol{u}$：変位ベクトル
u_x, u_y, u_z：変位成分
$\boldsymbol{v}$：間隙水の速度ベクトル
x, y, z：直交座標系
E, ν：ヤング係数およびポアソン比
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$：ひずみの成分
λ, μ：Lamé の定数
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$：全応力の成分
$\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z'$：有効応力の成分
$\theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$：全応力の第一不変量
$\theta'=\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma_z'$：有効応力の第一不変量
$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u$：圧密におけるスカラーポテンシャル
$\boldsymbol{w}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$：回転ベクトル

参 考 文 献

1) 赤井浩一・足立紀尚：堤体二次元圧密の研究，土木学会論文集，第 16 号，1953.
2) Barron, R.A. : Consolidation of Fine Grained Soils by Drain Wells, Trans. A.S.C.E., 113-718, 1948.
3) Biot, M.A. : General Theory of Three-dimensional Consolidation, Joun. Appl. Phys., 12-426, 1941.
4) Davis, E.H. and H.C. Poulos : Triaxial Testing and Three-dimensional Settlement Analysis, Proc. 4th Aust.-N.Z. Conf. Soil Mech., 233, 1963.
5) Gibson, R.E. and P. Lumb : Numerical Solution of Some Problems in the Consolidation of Clay, Proc. Instn. Civil Engrs., 2-182, 1953.
6) Gibson, R.E., R.L. Schiffman and S.L. Pu : Plane Strain and Axially Symmetric Consolidation of a Clay Layer on a Smooth Impervious Base, Journ. Mechs. & Appl. Maths., 13-1, 1970.
7) Rendulic, L. : Porenziffer und Poren Wasserdruck in Tonen, Bauingenieur, 25-559, 1936.
8) Rendulic, L. : Ein Grundgesetz der Tonmechanik und sein experimenteller Beweis, Bauingenieur, 459-467, 1937.
9) Schiffman, R.L. : Consolidation of Soil under Time Dependent Loading and Varying Permeability, Proc. H.R.B., 584, 1958.

10) Terzaghi, K. : Theoretical Soil Mechanics, John Wiley, New York, 1948.
11) 吉国　洋：三次元圧密の基礎理論，土木学会論文報告集，第201号，1972.
12) 山口柏樹・村上幸利：有限粘土層の多次元圧密について，土木学会論文報告集，第204号，1972.
13) Davis, E.H. and H.G. Poulos : Rate of Settlement under Two- and Three-dimensional Conditional Conditions, Geotech. 22-1, 1972.

(1972. 1.13・受　付
1972.12. 6・再受付)