

## 弾塑性、もしくは不均質弾性を有する 3 次元体の一数値解法

A METHOD OF THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF SOLID, THAT OF  
ELASTO-PLASTIC PROPERTY OR OF NONUNIFORM ELASTICITY

岡 村 宏 一\*・島 田 功\*\*

By Hirokazu Okamura and Isao Shimada

### 1. まえがき

3 次元弾塑性非軸対称問題の分野には、力学上、多くの興味のある問題が含まれているにもかかわらず、その解析の困難さのためか、現在、ほとんど研究されていない。この種の問題に関し、以下のところ有限要素法が唯一に近いアプローチの方法とみなされている感があるが、計算機が大型化した昨今でも、計算費用、あるいは精度などの点で問題があるようである。このような見地からすれば、有限要素法のみならず、より高精度、かつ実用的な解法が探究されてよいと思う。

一方、不均質性を持つ3次元弾性体の実用解法を開発することは、補剛材を内蔵する3次元体、あるいは地盤内の部分的剛性変化、埋設物の問題など、種々の問題の3次元解析を行なうための基本的な手段を与える意味で有用であろう。ところで、このように部分的な剛性変化を持つ3次元体の問題を異方性体のような平均化したモデルで扱うことには仮定上の無理があり、この事実は、解析をより複雑にする結果となっている。この種の問題に対するアプローチの方法として、前述の有限要素法、あるいはその不均質性を積分方程式による境界値問題に帰着させる方法<sup>5)</sup>が見られる。しかしながら、前者については上述の弾塑性問題の場合と同様な問題点があり、後者については、3次元体内に多くの不均質な境界を持つような実際問題に適用するのに非常な困難を伴うことを認めざるを得ない。

さて、筆者の1人はすでに、板、あるいはシャイベの弾塑性問題を高精度で解析できる1つの解法を発表した<sup>6)</sup>。この解法では、非線形の基礎式の取扱いに関して、塑性変形に対応する物理量は板内点を囲む比較的小さい有限領域で一定値を持つものと見なし、変形、応力を十

分な精度を持つ連続解で与える線形化の手法を用いた。一方筆者は、3次元弾性問題の解析に有効な方法として、Mindlin の第1、第2問題の解を、水平、垂直および斜め方向の有限な長方形面に積分したもの的基本解とし、それらの組み合わせによって半無限弾性体内に任意の調整面、ならびに調整力の分布を与え、任意の境界面を作り出すことのできる1つの実用解法を発表した<sup>7)</sup>。

本文の所論においては\*、まず、これらの解法を拡張し組み合わせた3次元弾塑性非軸対称問題の解析に有用な1つの数値解析法を提示する。ここで前論文<sup>6)</sup>の場合と同様に、弾性体内の塑性化した部分では小さい有限領域における平均化された弱化の性質が与えられ、特に解析手段の上で、基礎式における有限領域の塑性化を表わす物理量が体積力と類似の性格を持つ点が利用される。すなわち、非線形関数で表わされる物理量を有限領域の内部で平均化し、単位の量を Mindlin 解の3重積分で与えると同時に、その領域のみに関与する差分法の適用によってこれらの線形化を行なうものである。次に部分的に剛性の異なる3次元弾性問題が同様の手法により解析される。この場合、剛性の異なる部分は小さい有限領域の集合によってモデル化される。すなわち、本文に提示する解法は、表題の2つの問題に対して一貫して適用されるものである。

以上に述べたように、本解法は、本質的に弾塑性、あるいは不均質弾性を含む3次元問題の基礎微分方程式の解法であり、この点、3次元体内に節点を設けた近似モデルを扱う有限要素法とはその出発点を異にしている。また、本解法は弾性問題の厳密解である Mindlin 解の線形化した重ね合わせによって構成される連続解を基底に置いており、このような解法の性格に基づく特長の1つは、3次元体内における未知量の制約にある。すなわち、弾塑性問題のそれは、塑性化した部分の選点におけ

\* 本文は、土木学会の講演概要 1)~4) を骨子とし、応用に関するデータを加えて構成したものである。

\* 正会員 大阪工業大学助教授 土木工学教室

\*\* 正会員 東洋技研コンサルタント(株) 研究室

る流動の係数のみであり、また、不均質性を持つ弾性問題では、母体に対し剛性の異なる部分にある選点のひずみ成分のみである。さらに1つの特長は、Integral methodに属する境界調整の方法を含め、高精度の解が期待できることであり、筆者はすでに、弾性問題に関する前論文<sup>1)</sup>において、この点を指摘した。なお、本解法では、弾性母体に対する弾塑性を含む不均質性の表示において、前述のような有限小領域での平均化、および部分的差分表示による2次的な誤差を含むが、しかし、厳密解で与えられる弾性母体の部分を含めて、解全体としては精度の高い連続解の性格を持ち、さらに、このような2次的な誤差も、有限領域をある程度小さく想定すれば、十分な収束値を与え得ることが検証された。この事実は、特に、荷重漸増に追従する、弾塑性域の局所的な応力の推移に関し、初期直接統問題としての性格を持つ弾塑性問題の解析において、精度上すぐれた点を持つものと思われる。

一方、本解法は、級数解法に見られるような適用範囲の著しい制限を解除し、境界の任意性、弾塑性、不均質弹性をもつ3次元体の解析にその適用範囲の拡張を試みた点、および、代数関数であるMindlin解の多面的な応用によって解式を系統立てた点に特長を有する。

本文の後半にかかげたいくつかの例題を通じて、本解法がこの種の問題の1つの基本的な解法として寄与できることが示される。また、従来あまり解明されていないこの種の3次元体の挙動について若干の興味のあるデータが与えられる。

## 2. 3次元弾塑性非軸対称問題の解法

### (1) 基本的仮定

本章における解法上の基本的仮定は次のとおりである。  
 a) 材料は等方性、かつ弾完全塑性体とする。  
 b) 応力とひずみの関係は、弾性域ではフックの法則、塑性域では流れ法則に支配されるものとする。

### (2) 基 础 式

$xyz$ -直角座標系によって、3次元体の応力成分  $\sigma$ :  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ 、ひずみ成分  $\epsilon$ :  $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ 、さらに  $x, y, z$  各方向の変位成分  $\delta$ :  $(u, v, w)$  を定義すれば、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \tau_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

また、(1)の仮定 b) により、ひずみ速度は次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{1}{E} \{ \dot{\sigma}_x - \nu(\dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z) \} + \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_x} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{1}{E} \{ \dot{\sigma}_y - \nu(\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x) \} + \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_y} \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{1}{E} \{ \dot{\sigma}_z - \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) \} + \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_z} \\ \dot{\tau}_{xy} &= \frac{1}{G} \dot{\tau}_{xy} + \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{xy}} \\ \dot{\tau}_{yz} &= \frac{1}{G} \dot{\tau}_{yz} + \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{yz}} \\ \dot{\tau}_{zx} &= \frac{1}{G} \dot{\tau}_{zx} + \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{zx}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

式中、 $E$ : ヤング率、 $\nu$ : ポアソン比、 $G$ : せん断弾性定数 =  $E/(2(1+\nu))$ 、また、 $f$  は塑性ポテンシャル、 $\mu$  は塑性変形中変化するスカラー量である。なお、本章の所論では塑性ポテンシャルとして von Mises の降伏条件を用いる。

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= \{ \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 - \xi_x \xi_y - \xi_y \xi_z - \xi_z \xi_x \} \\ &\quad - 3(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2) \} = 1 \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{\sigma_x}{\sigma_p}, & \xi_y &= \frac{\sigma_y}{\sigma_p}, & \xi_z &= \frac{\sigma_z}{\sigma_p} \\ \eta_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{\sigma_p}, & \eta_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{\sigma_p}, & \eta_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{\sigma_p} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

$\sigma_p$ : 降伏応力

ここで塑性変形の非圧縮性の条件として、

$$\mu \frac{\partial f}{\partial \xi_x} + \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_y} + \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_z} = 0 \quad \dots \quad (5)$$

を考慮し、式(1)、(2)より応力の変化速度を求める

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) - 2G \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_x} \\ \dot{\sigma}_y &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) - 2G \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_y} \\ \dot{\sigma}_z &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) - 2G \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_z} \\ \dot{\tau}_{xy} &= G \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) - G \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{xy}} \\ \dot{\tau}_{yz} &= G \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) - G \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{yz}} \\ \dot{\tau}_{zx} &= G \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) - G \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{zx}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6)$$

ただし、 $\lambda$ : Lamé 定数 =  $\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

一方、周知のつり合い条件式の時間微分を行なうと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\tau}_{zx}}{\partial z} &= -\dot{X}_0 \\ \frac{\partial \dot{\sigma}_y}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\tau}_{yz}}{\partial z} &= -\dot{Y}_0 \\ \frac{\partial \dot{\sigma}_z}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\tau}_{zx}}{\partial z} &= -\dot{Z}_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

式中、 $X_0, Y_0, Z_0$  は  $x, y, z$  各方向の単位体積あたりの体積力を表わす。

次に、式(6)を式(7)に代入し、0から  $t$ までの時間積分を遂行することにより3次元体の弾塑性挙動を支配する次の基礎式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda+G) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + G p^2 u \\ & = -X_0 - \int_0^t Q_{(x,y,z)} dt \\ & (\lambda+G) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G p^2 v \\ & = -Y_0 - \int_0^t R_{(x,y,z)} dt \\ & (\lambda+G) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G p^2 w \\ & = -Z_0 - \int_0^t S_{(x,y,z)} dt \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

ただし、

$$p^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

また、

$$\left. \begin{aligned} Q_{(x,y,z)} &= -G \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{xy}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{zy}} \right) \right\} \\ R_{(x,y,z)} &= -G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{xx}} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{yz}} \right) \right\} \\ S_{(x,y,z)} &= -G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{zx}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \eta_{yz}} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \xi_z} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

ところで、式(9)に示されるものは塑性変形に従属する非線形関数であり、これらを時間  $t$ について積分した式(8)の右辺に含まれる各項は明らかに体積力と類似の性格を持つ物理量であることがわかる。この特性を利用することは、この種の複雑な問題を扱う本文の解法において1つの有効な手段となっている。なお、以下本文の所論では、式(8)における重力などの体積力  $X_0, Y_0, Z_0$  は省かれている。

### (3) 弾性状態における解

本文で扱う弾塑性問題は、荷重を受ける平らな表面とほかの任意の境界面を持つ3次元体に関するものである。ところで、同様な弾性問題の解法についてはすでに前論文<sup>7)</sup>で詳述しております、本解法はそれを弾塑性問題に発展させたものである。したがって紙数の都合もあり、ここでは本解法の構成に必要な部分を抽出して略述する。

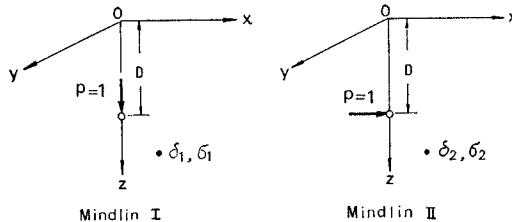


図-1

まず、解法の基本となる解は、図-1に示すような半無限弾性体内の任意点に垂直、ならびに水平方向の集中力が作用する場合の変位成分  $\delta$ 、ならびに応力成分  $\sigma$  を求めた Mindlin の第1、第2問題の解<sup>8)</sup> ( $\delta_1, \delta_2, \sigma_1, \sigma_2$ ) である。この際、 $D=0$  とすれば表面力に対する Bous-sinesq Cerruti の解が得られ、これらの積分は、後述のように表面荷重に対する特解として利用される。

次に、3次元体の他の境界面を作り出す方法について、たとえば、図-2に見るような表面荷重を受ける直方体の扱いでは、半無限弾性体の表面に荷重を与える、同時に求める直方体を囲んで有限長方形領域 ( $i, j, r$  など) によって分割された調整面を設定する。さらに各領域において等分布する調整力 ( $q_{ij}, s_{ij}, t_{ij}$  など) を与え、それらの作用によって真の境界面の条件を選点法によって調整する。したがって調整力は境界条件によって定まる未知量であり、また有限領域の分割の粗密、調整面と境界面の距離は境界条件の精度に対応して定める。

さて、上述の調整力によって3次元体内に生ずる変位応力の成分をそれぞれ  $\delta_c, \sigma_c$  と書けば、それらは図-3

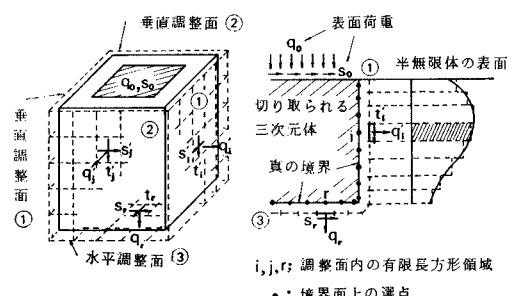


図-2

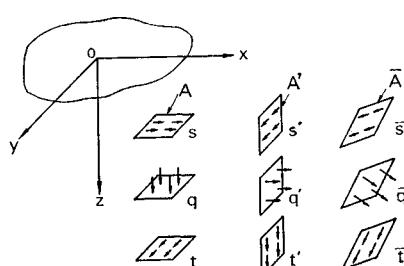


図-3

に見るように、図-1 の Mindlin 第 1, 第 2 問題の解を水平、あるいは垂直な長方形面 ( $A, A'$ ) で積分することによって与えられ、また、斜面などを含むより複雑な境界に対応する調整力の分布も長方形斜面 ( $\bar{A}$ ) での積分の重ね合わせによって同様に得られる。すなわち、

$$\begin{aligned}\delta_c = & \Sigma \left( s \times \int_A \delta_2 dA + q \times \int_A \delta_1 dA + t \times \int_A \delta_2 dA \right) \\ & + \Sigma \left( s' \times \int_{A'} \delta_2 dA' + q' \times \int_{A'} \delta_1 dA' + t' \times \int_{A'} \delta_2 dA' \right) \\ & + \Sigma \left\{ \bar{s} \times \int_{\bar{A}} \delta_2 d\bar{A} + \bar{q} \times \int_{\bar{A}} F(\delta_1, \delta_2) d\bar{A} + \bar{t} \right. \\ & \left. \times \int_{\bar{A}} F(\delta_1, \delta_2) d\bar{A} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (10)\end{aligned}$$

同様に、 $\delta$  を  $\sigma$  に入れ換えることにより  $\sigma_c$  も求まる。

一方、表面荷重による変位、応力の成分を  $\delta_0, \sigma_0$  と書くと、それらは前述のように Mindlin 解の特別な形である Boussinesq, Cerruti の解の積分によって与えられる。

$$\delta_0 = s_0 \times \int_A (\delta_2)_{D=0} dA + q_0 \times \int_A (\delta_1)_{D=0} dA \dots (11)$$

$\sigma_0$  についても同様である。

また、境界面上の選点  $m$  において与えられる表面力、ならびに変位の成分を  $P_m, L_m$  とすれば、すべての選点に対して要求される

は、 $\delta_c$ 、あるいは  $\sigma_c$  に含まれる未知量（調整力）を定める連立方程式を形成する。

#### (4) 弹塑性状態における解

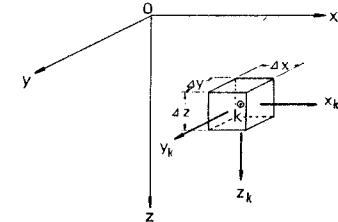
(3)において弾性問題の1つの解法についてその要点を略述した。本節では弾塑性問題を扱うための解法の拡張について述べる。

再び、式(8)にたち帰る。ここで右辺の時間について積分された各項を  $X, Y, Z$  で表わし、それらについて時間積分を荷重段階  $l$  の和に置換し、さらに式(3)で与えられる塑性ポテンシャルを考慮すれば、

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_0^t Q_{(x,y,z)} dt = -2 G \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\mu \omega) + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\mu \eta_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \eta_{zx}) \right\} \right]_t \\ Y &= \int_0^t R_{(x,y,z)} dt = -2 G \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\mu \omega') + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu \eta_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \eta_{yz}) \right\} \right]_t \\ Z &= \int_0^t S_{(x,y,z)} dt = -2 G \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\mu \omega'') + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu \eta_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \eta_{yz}) \right\} \right]_t \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2\xi_x - \xi_y - \xi_z, \quad \omega' = 2\xi_y - \xi_z - \xi_x, \\ \omega'' = 2\xi_z - \xi_x - \xi_y \end{array} \right\} \dots (15)$$

前述のように、これらの塑性変形に従属する物理量  $X, Y, Z$  は体積力と同じ性格を持つ。ここで、すでに平板の弾塑性解析に関して発表した前論文の解法と同様な思想に基づく  
 線形化の手法を導入する。すなわち、  
 図-4 に示すように、弹性体内の塑性化によってある点  $k$  で考慮されるべきこのような物理量は、その点



4

物理量は、その点を中心とする比較的小さい有限な容積  $V_k(4x \times 4y \times 4z)$  内では平均化されてよいものと見なす。そうすれば、このような有限な容積内で均一な密度分布を持つ単位の仮想体積力 ( $X_k=Y_k=Z_k=1$ ) による 3 次元体の任意点の変位は、図-1 に示すような Mindlin 第 1、および第 2 問題の解を、容積  $V_k$  に関して 3 重積分することによって得られる。この種の積分を遂行するためにあたって、本文ではすでに前論文<sup>7)</sup> の付録で示したように、長方形面に対しては厳密な 2 重積分を行ない、これに直角な方向の積分は和分による方法を用いた。以上により、点  $k$  における  $X_k, Y_k, Z_k$  の諸量を定めることができれば、塑性化によって上述の有限領域で考慮されるべきすべての物理量による 3 次元体内の変位成分  $\delta_v$  と、それらより式 (1) で求まるひずみ成分に対して、Mindlin 解の性格上フックの法則で結びつけられる応力成分  $\sigma_{vv}$  が求まる\*。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \delta_v &= \sum_k \left( X_k \times \int_{V_k} \delta_2 dV + Y_k \right. \\ &\quad \left. \times \int_{V_k} \delta_2 dV + Z_k \times \int_{V_k} \delta_1 dV \right) \\ \sigma_v &= \sum_k \left( X_k \times \int_{V_k} \sigma_2 dV + Y_k \right. \\ &\quad \left. \times \int_{V_k} \sigma_2 dV + Z_k \times \int_{V_k} \sigma_1 dV \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

結局、基礎式(8)の上述のような扱いによって、弾塑性状態における変位成分  $\delta$  は、式(10), (11)で与えた境界調整力による  $\delta_c$ , 表面荷重による  $\delta_s$  と式(16)の  $\delta_{sp}$  を加えて

次に、式(6)に示される応力成分の変化速度は、全ひずみの変化速度にフックの法則で結合する部分と、塑性

\* 図-4 の有限領域の陵線上でのみ、ある種の応力成分は、不連続性を持つことを指摘しておかなければならぬ。しかし、本解法は有限領域の内点（中心点）で応力成分を判定するものであり、ここでは、不連続性の影響は消失する。

## 弾塑性、もしくは不均質弾性を有する3次元体の一数値解法

ひずみに関連するものとの差になっている。ここで式(3)の塑性ポテンシャルを式(6)に代入して 0 から  $t$  までの時間積分を行ない、さらに塑性ひずみによる項の時間積分を荷重段階  $l$  の和に置換する。さらに式(1)から求まる全ひずみの成分とフックの法則で結合する応力成分は、 $\sigma_0, \sigma_c, \sigma_v$  の和にほかならないことを考慮すれば、弾塑性状態における応力成分は次のように書かれ る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x' - 2 G \sum_l (\mu \omega)_l, & \tau_{xy} &= \tau_{xy}' - 6 G \sum_l (\mu \eta_{xy})_l \\ \sigma_y &= \sigma_y' - 2 G \sum_l (\mu \omega')_l, & \tau_{yz} &= \tau_{yz}' - 6 G \sum_l (\mu \eta_{yz})_l \\ \sigma_z &= \sigma_z' - 2 G \sum_l (\mu \omega'')_l, & \tau_{zx} &= \tau_{zx}' - 6 G \sum_l (\mu \eta_{zx})_l \end{aligned} \right\} \dots \quad (18)$$

ただし、

$$\sigma' = \sigma_0 + \sigma_c + \sigma_v, \quad \tau' = \tau_0 + \tau_c + \tau_v \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

ところで、式(17), (18)で示される解  $\delta, \sigma$  の一部である  $\delta_v, \sigma_v$  を得るには、式(16)に見るように  $X_k, Y_k, Z_k$  の諸量を確定しなければならない。しかし式(14)でわかるようにそれらは未定係数  $\mu$  とその時点での断面力の積の1次微分を陰の形で含んだ非線形関数である。

さて、 $X_k, Y_k, Z_k$  を線形化するために、前論文<sup>6)</sup>の解法と同様に、部分的に差分法が用いられる。すなわち、点  $k$ 、ならびに周囲の 6 点について 図-5 に示すネットを考え、逐次計算のある過程で、これらの各点の応力の近似値が与えられたとすれば、 $X_k, Y_k, Z_k$  はこの時点における各点の  $\mu$  の 1 次関数として次のように表わされる（もちろん、弾性域にある点では  $\mu=0$  である）。

$$\begin{aligned}
 (X_k)_I &= \frac{-G}{4x} [\mu_{k(1,0)}\omega_{k(1,0)} - \mu_{k(1',0)}\omega_{k(1',0)} \\
 &\quad + 3\alpha\{\mu_{k(0,1)}(\eta_{xy})_{k(0,1)} - \mu_{k(0,1')}\langle\eta_{xy}\rangle_{k(0,1')}\} \\
 &\quad + 3\alpha'\{\mu_{k(1)}(\eta_{zx})_{k(1)} - \mu_{k(1')}\langle\eta_{zx}\rangle_{k(1')}\}]_I \\
 (Y_k)_I &= \frac{-G}{4x} [\alpha\{\mu_{k(0,1)}\omega'_{k'(0,1)} - \mu_{k(0,1')}\omega'_{k(0,1')}\} \\
 &\quad + 3\{\mu_{k(1,0)}(\eta_{xy})_{k(1,0)} - \mu_{k(1',0)}\langle\eta_{xy}\rangle_{k(1',0)}\} \\
 &\quad + 3\alpha'\{\mu_{k(1)}(\eta_{yz})_{k(1)} - \mu_{k(1')}\langle\eta_{yz}\rangle_{k(1')}\}]_I \\
 (Z_k)_I &= \frac{-G}{4x} [\alpha'\{\mu_{k(1)}\omega''_{k(1)} - \mu_{k(1')}\omega''_{k(1')}\} \\
 &\quad + 3\{\mu_{k(1,0)}(\eta_{zx})_{k(1,0)} - \mu_{k(1',0)}\langle\eta_{zx}\rangle_{k(1',0)}\} \\
 &\quad + 3\alpha\{\mu_{k(0,1)}(\eta_{yz})_{k(0,1)} - \mu_{k(0,1')}\langle\eta_{yz}\rangle_{k(0,1')}\}]_I
 \end{aligned} \tag{20}$$

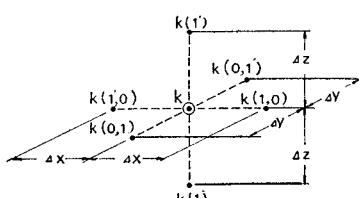
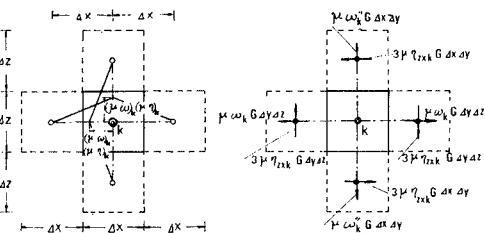


図-5 ふきを閉む6個のふきの指標

式中  $\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ ,  $\alpha' = \frac{\Delta x}{\Delta z}$

このようにして式 (16) の  $\delta_v$ ,  $\sigma_v$  は  $\mu$  を 1 次で含んだ連続解の形になり, したがって解  $\delta$ ,  $\sigma$  も同様な形となる。

すでに述べたように、基礎式における塑性変形に従属する物理量  $X, Y, Z$  は体積力の強さと見なして解析される。しかも各有限領域に作用する体積力は、3次元体内で自己平衡すべき性質を持っており、式(20)の表示は、内点においてこの条件を満足するものである。たとえば図-6は、内点  $k$  のみが塑性化したときの式(20)に対する  $\mu\omega, \mu\eta$  などの分布の仮定と、その周囲の有限領域に作用させる体積力のつり合いを  $xz$  面について示したものである ( $yz$  面についても同様に示される)。



— 6

ところで、表面あるいは表面の近傍にある点が塑性化した場合の式(20)の適用については若干のくふうを要する。なぜなら、本解法は基礎式全体を差分化して解くのではなく、基本解は連続解であり、式(20)の差分表示は非線形項の線形化のみに用いられ、したがって表面の外側に dummy point を採ることができないからである。いま、表面近傍の点  $k$  が塑性化したとする。このとき、表面が塑性域にあるか、弹性域にあるかの 2つの場合が考えられる。ここで、表面の塑性化に対しては、内点の場合に考慮される体積力のかわりに図-2に見るような長方形面に分布する力を表面に働くことになる。図-7 は、表面近傍の点  $k$ 、および表面も塑性化した場合の  $\mu\omega$ ,  $\mu\eta$  などの分布の仮定と、その周間に作用させる力のつり合いを示したものである。一方、応力成分を表わす式(18)を参照すれば、外荷重による  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$ 、境界調整力による  $\sigma_c$ ,  $\tau_c$  のほかに、上述の表面力による弹性応力  $\sigma_p$ ,  $\tau_p$  が余剩応力として生ずるが、これらは式(18)の第 2 項に相当する塑性ひずみによる

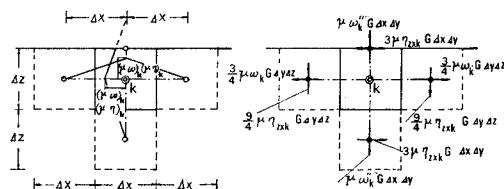
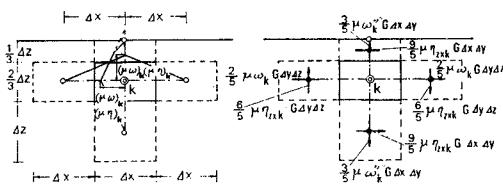


图-7



四

応力の減少分で打消されて境界条件を満足することができる。

次に、表面が弾性状態の場合に対しては、ここに小さい厚さの弾性領域を考えてやればよい。図-8は計算例に用いたモデルであるが、表面近傍の塑性化した点  $k$  の周囲に作用させる力の自己平衡、ならびに境界条件の双方を満足するものである。

以上の操作により、すべての解は未知量として  $\mu$ , および (3) で述べた境界調整力 ( $q, s, t$  など) を 1 次で含んだ連続解の形になる。ここで、塑性化した各点における未知量  $\mu$  は、後述の逐次計算の過程で、これらのすべての点において降伏条件式 (3) を満足することを要求する連立方程式の解として定められる。また、境界調整力はすでに (3) で述べたように、境界面上のすべての選点における境界条件式 (13) で形成される連立方程式により定まる。ただし、この場合の  $\delta, \sigma$  はそれぞれ式 (17), (18) に示されるものである。

### (5) 逐次計算の方法と降伏条件の線形化

ある荷重状態で3次元体内のどこかの点の塑性化が始まればこの段階から荷重を漸増させ、逐次計算により追跡する。塑性化した点  $k$  の降伏条件は式(3)を用いて、

$f_k < 1$  なる場合は弾性経路であり、この時点では  $\mu_k = 0$  である。さて、弾塑性状態にある場合の逐次計算の方法を、荷重段階  $l-1$  から  $l$  に移行する過程について説明する。

いま、 $l-1$  段階におけるすべての諸量は確定したものとする。ここで、塑性変形に従属する物理量を  $l-1$  段階に止める。すなわち、式(17)の変位成分における  $\delta_v$ 、ならびに式(18)の応力成分の第1項  $\sigma', \tau'$  における  $\sigma_v, \tau_v$  および第2項は  $l-1$  段階の値に保たれる。次に、荷重を  $l$  段階の値に漸増させ境界調整を含めた弾性計算による変位成分中の  $\delta_0, \delta_c$ 、応力成分中の  $\sigma_0, \sigma_c, \tau_0, \tau_c$  を与える。したがって上述の諸値を加えて  $l$  段階における変位、ならびに応力成分の第1近似値  $(\delta, \sigma, \tau)_l$ を得る。

さて、式(4)により  $(\sigma)_{I+1}$ ,  $(\tau)_{I+1}$  に対する  $(\xi)_{I+1}$ ,  $(\eta)_{I+1}$  を求め、これらを降伏条件式(3)に代入していくつかの点で  $(f)_{I+1} \geq 1$  になったとする。いま、これら

の塑性化した各点で  $f=1$  になるような  $l$  段階の  $\mu$  の第1近似値 ( $\mu_1$ )<sub>ii</sub> を次の操作によって求める。

まず、(ξ)<sub>l+1</sub>, (η)<sub>l+1</sub> の値を式(20)に代入して  $l$  段階における  $(X, Y, Z)_{l+1}$  が  $(\mu)_{l+1}$  の 1 次関数として表わされる。すなわち、 $(X, Y, Z)_{l+1}$  のみによる変位、および応力成分の変化量  $(\delta_v)_{l+1}$ ,  $(\sigma_v, \tau_v)_{l+1}$  が式(16)により  $(\mu)_{l+1}$  の 1 次関数として与えられる。また、式(18)における応力成分の第 2 項も同様に得られる。結局、変位、ならびに応力成分の変化量  $(d\delta)_{l+1}$ ,  $(d\sigma, d\tau)_{l+1}$  および後者に対応する  $(d\xi, d\eta)_{l+1}$  は  $(\mu)_{l+1}$  の 1 次関数となる。

さらに、 $(4\xi, 4\eta)_{1,1}$ により塑性ポテンシャルが $(4f)_{1,1}$ だけ変化するものとすれば、塑性化した各点で降伏条件を満たすには、

$$\{f(\xi + A\xi, \eta + A\eta)\}_{I+1} = (f)_{I+1} + (A f)_{I+1} = 1$$

.....(22)

でなければならない。上式は非線形であるが、 $A\zeta$ ,  $A\eta$  の2次の項を無視することによって線形化される。すなわち、

$$\{\xi_x \Delta \omega + \xi_y \Delta \omega' + \xi_z \Delta \omega'' + 6(\eta_{xy} \Delta \eta_{xy} + \eta_{yz} \Delta \eta_{yz} + \eta_{zx} \Delta \eta_{zx})\}_{l=1} = 1 - (f)_{l=1} \dots \dots (23)$$

ただし、

したがって、 $(\mu)_{l+1}$  は塑性化した各点において式 (23) の成立を要求する連立方程式の解として定められ、 $l$  段階における  $(\mu)_{l+1}$  を含む諸量が求まる。これらを  $l-1$  段階における塑性変形に従属する諸量に加え、再び境界を調整して同様の計算を行ない、応力の諸値が収束するまで繰り返し演算を続行する。

### 3. 部分的に剛性の異なる3次元弾性問題の解法

### (1) 弾塑性問題との解法上の相似性

弾性母体の中で剛性の異なる部分は、弾塑性問題の場合と同様な比較的小さい有限領域の集合したものとして扱う。また、それらの剛性の母体のそれとの差異によって基礎式中に含まれる物理量は、それぞれの領域における平均量で評価される。すなわち、本問題は解法上、2.で述べた弾塑性問題と同様に扱われ、後者は1種の部分的弱化の問題としての相似性を持つ。

### (2) 基 础 式

まず、母体に対して剛性の異なる部分の応力-ひずみ

方程式を一般的な形で表示しておく。なお、応力、変位、ひずみの各成分の記号は 2. に示したものと同一である。

記述の便宜上、マトリックス表示を用いて

ここで、 $[D]$  は応力-ひずみマトリックスで

$$[D] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{26} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{61} & a_{62} & \cdots & a_{66} \end{bmatrix} \dots \quad (26)$$

ただし、 $\alpha$  は弾性定数で  $a_{ij}=a_{ji}$  である。

一方、母体を等方性とすれば、その応力-ひずみマトリックスは式(6)の弾性部分を参照して

$$[D_0] = \begin{pmatrix} \lambda_0 + 2G_0 & \lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_0 + 2G_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 + 2G_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

ただし、 $E_0$ ,  $G_0$ ,  $\lambda_0$  はそれぞれ、母体のヤング率、せん断弾性定数、Lamé 定数である。

さて、両者の偏差は問題によって異なるが、これを一般に [4D] として、

のように分離すると式(25)は、

式(29)の応力とひずみ、および式(1)の変位とひずみの関係をつり合い条件式(式(7))の時間微分操作を除いたもの。ただし  $X_0=Y_0=Z_0=0$  に代入して次の基礎式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 u &= -X \\ (\lambda_0 + G_0) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= -Y \\ (\lambda_0 + G_0) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= -Z \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (30)$$

ただし、右辺の  $X, Y, Z$  は前題同様体積力に相当する項で次の形になる。

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} \\ Z &= \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \quad (31)$$

三九

### (3) 基礎式の解

式(30)を2.で述べたのと同様な方法で解く。まず、母体に作用させる荷重、および境界調整力による変位成分  $\delta_0$ ,  $\delta_c$  を2.(3)の式(11), (10)に示すようにMindlin解を用いて表わす。また、ひずみ成分  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_c$ , 応力成分  $\sigma_0$ ,  $\sigma_c$  なども同様に表わされる。次に、式(31)の  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  によるそれらを求めるために、2.(4)に示した手法を導入する。再び、図-4を参照して、部分的な剛性の変化によってある点  $k$  で考慮さるべき物理量  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $Z_k$  は、その点を中心とする比較的小さい有限な容積  $V_k(\Delta x \times \Delta y \times \Delta z)$  内では均一な分布を持つものと見なす。したがって、これらによる変位、ならびに応力成分、 $\delta_v$ ,  $\sigma_v$  が  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $Z_k$  を含んだ式(16)の形で得られる。また、ひずみ成分  $\epsilon_v$  も同様に次の形で表わされる。

$$\varepsilon_v = \sum_k \left( X_k \times \int_{V_k} \varepsilon_2 dV + Y_k \times \int_{V_k} \varepsilon_z dV + Z_k \times \int_{V_k} \varepsilon_1 dV \right) \dots \dots \dots (33)$$

上式中、 $\epsilon_1, \epsilon_2$  は既述の単位集中力に対する Mindlin 第 1, 第 2 問題の解  $\delta_1, \delta_2$  を式(1)に代入して得られるひずみ成分である。なお、 $\sigma_v$  は、 $\epsilon_v$  と母体の弾性定数で結合されるものとなる。

結局

$$\left. \begin{array}{l} \delta = \delta_0 + \delta_c + \delta_v \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_c + \varepsilon_v \\ \sigma = \sigma_0 + \sigma_c + \sigma_v \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (34)$$

なお、母体中では  $\sigma^*=0$  である。

ところで、これらの解を決定するにはまず、式(16)、(33)に見るように  $\delta_v$ ,  $\epsilon_v$ ,  $\sigma_v$  に含まれる  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $Z_k$  の諸量を確定しなければならない。しかし、式(31)でわかるように、それらは  $\sigma^*$  の1次微分よりなり、また、式(32)から  $\sigma^*$  は  $\epsilon_v$  を陰の形で含んでいる。

ここで前題同様、部分的な差分法を用いる。すなわち、再び図-5を参照して、点  $k$ 、ならびに周囲の6点に関するネットを考え、 $X_k$ 、 $Y_k$ 、 $Z_k$ を次のように表わす。

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{2 \Delta x} [(\sigma_x^*)_{k(1,0)} - (\sigma_x^*)_{k(1',0)} \\ &\quad + \alpha' \{(\tau_{xy}^*)_{k(0,1)} - (\tau_{xy}^*)_{k(0,1')}\} \\ &\quad + \alpha' \{(\tau_{zx}^*)_{k(1)} - (\tau_{zx}^*)_{k(1')}\}] \\ Y_k &= \frac{1}{2 \Delta x} [\alpha' (\sigma_y^*)_{k(0,1)} - (\sigma_y^*)_{k(0,1')} \\ &\quad + \alpha' \{(\tau_{zy}^*)_{k(1)} - (\tau_{zy}^*)_{k(1')}\} \\ &\quad + (\tau_{xy}^*)_{k(1,0)} - (\tau_{xy}^*)_{k(1',0)}] \\ Z_k &= \frac{1}{2 \Delta x} [\alpha' \{(\sigma_z^*)_{k(1)} - (\sigma_z^*)_{k(1')}\} \\ &\quad + (\tau_{zx}^*)_{k(1,0)} - (\tau_{zx}^*)_{k(1,0)} \\ &\quad + \alpha' \{(\tau_{yz}^*)_{k(0,1)} - (\tau_{yz}^*)_{k(0,1')}\}] \end{aligned} \quad \dots (35)$$

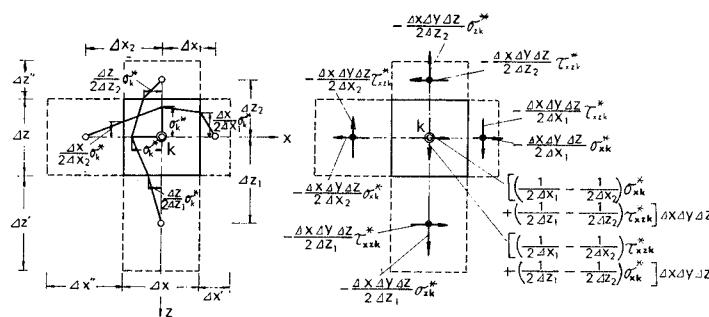


図-9

後述の逐次計算のある過程で、 $\epsilon_0$ 、および $\epsilon_c$ の近似値が与えられたとすれば、式(34)の $\epsilon$ 、および式(32)の $\sigma^*$ を参照して、式(35)は $\epsilon_v$ の1次関数となることがわかる。したがって解 $\delta$ 、 $\sigma$ も同様な形となる。

さて、すでに前章で述べたように、物理量 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ によって各有限領域に作用する体積力は、3次元体内で自己平衡すべき性質を持っており、式(35)の表示は、前章の問題の場合と同様に内点においてこの条件を満足するものである。ただ、本問題の扱いにおいて、後述の計算例に見るように、場所によって差分ネットの間隔を変えることを試みた。図-9は、この場合の内点 $k$ を囲む $\sigma^*$ の分布の仮定と体積力のつり合いを示したものである。

ところで、剛性の異なる部分が表面を含む場合、式(35)の差分表示に関して前題同様の配慮がなされる。それは、図-7に見るような表面を含んで塑性化した場合に相当するが、手法は同一であり、紙数の都合もあるので記述を省略する。

以上の操作により、すべての解は未知量として剛性の異なる部分で考慮される有限領域の選点における $\epsilon_v$ の各成分、および境界調整力を1次で含んだ連続解の形になる。未知量 $\epsilon_v$ は後述の逐次計算法により、式(33)で形成される連立方程式の解として定まり、また、境界調整力は式(13)により同時に求められる。

#### (4) 逐次計算の方法

まず、部分的な剛性変化の影響を無視し、等方性の母体について、荷重、ならびに境界調整による解、 $\delta_0$ 、 $\delta_c$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\epsilon_c$ 、 $\sigma_0$ 、 $\sigma_c$ を求める。ここで、式(34)のひずみ成分 $\epsilon$ において、 $\epsilon_0 + \epsilon_c (= \epsilon')$ を既知量とし、 $\epsilon_v$ を未知量として残す。したがって前項で述べたように、式(35)の $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ は、 $\epsilon'$ に対応する既知項と、剛性の異なる部分に設けられた選点の未知量 $\epsilon_v$ を1次で含んだ項の和で与えられる。次に、これらの点に対し、式(33)の成立を要求する連立方程式を解いてこれら各点の $\epsilon_v$ が定まり、同時に式(35)によりすべての $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ が求ま

る。さらに、式(16)、(33)から任意点の $\delta_v$ 、 $\sigma_v$ 、 $\epsilon_v$ が求まり、結局、式(34)より解 $\delta$ 、 $\epsilon$ 、 $\sigma$ が得られる。

ところで、部分的な剛性変化に基づく $\delta_v$ 、 $\sigma_v$ を導入することにより、最初の調整力によって作られた境界条件は乱されるので、再び境界を調整して同様の計算を行ない、 $\epsilon_v$ の諸値が収束するまで繰り返し演算を続行する。

なお、本問題の場合、半無限体のように、内部境界を持たないものについては逐次計算は不要である。

#### 4. 解析例と照査

##### (1) 3次元弾塑性非軸対称問題

ここでは4つの基本的な弾塑性問題を扱う。すなわち、

問題-1：上面に部分荷重を受ける半無限体の問題

問題-2：上面に剛な接触面による部分的な押し込みを受ける半無限体の問題

問題-3：上面に部分荷重を受け、一定の深さで変位を拘束される半無限体の問題

問題-4：上面に部分荷重を受け、かつ一定の深さで変位を拘束され、また自由な側面を持つ半無限体の問題

以上の問題は、金属の表面における局所的な加圧の問題を想定したもので、材質として鋼材のものを仮定した。すなわち、基本データとして、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu = 0.3$ 、 $\sigma_p = 2300 \text{ kg/cm}^2$ を用いた。なお、これらの問題において、問題-1以外は、解析上境界調整の必要なものである。

まず、図-10(a)、(b)にそれぞれ、問題-1、および2の解析における有限領域の分割と配置を示す。もちろん、これらの分割の粗密は解析の精度に関連するが、この点についての照査のデータは後で述べる。また、白い丸印は各有限領域の中心点で、既述のように塑性化した領域の塑性変形に関与する物理量を判定するための選点である。さらに(b)図において、加圧面における黒い丸印は、この部分における剛体による押込みの条件を満足させるための選点であり、また、加圧面における圧力の分布は、図のように選点を囲む各有限領域に作用する等分布荷重の接合によって近似され、これらの荷重は、その総和が $p$ に等しく、また加圧面上の各選点の $z$ 方向の変位( $w$ )が一定である条件によって定められる。

図-11(a)、(b)は同様に問題-3、4に関するもので

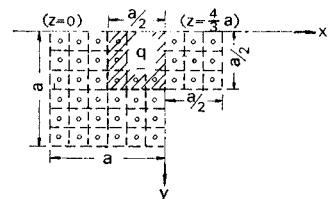
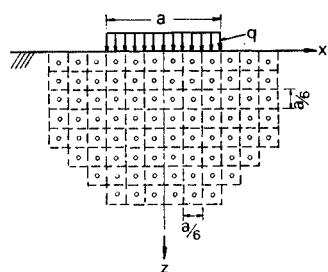


図-10 (a) 問題-1 の有限領域の配置と選点

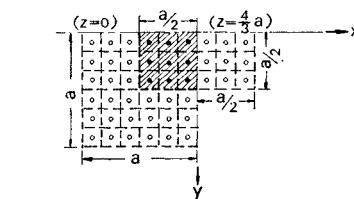
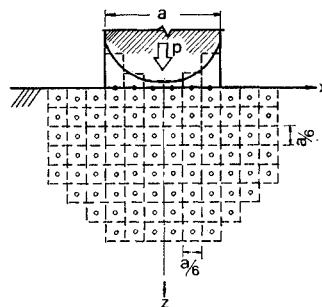


図-10 (b) 問題-2 の有限領域の配置と選点および加圧力の分布の近似

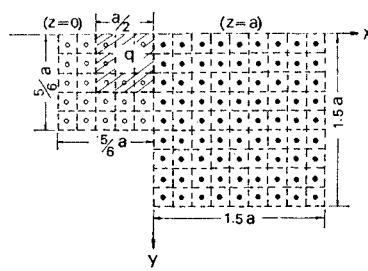
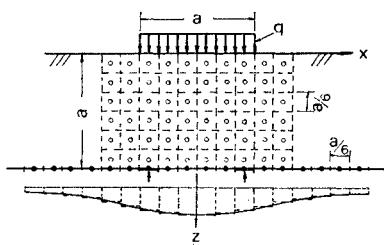


図-11 (a) 問題-3 の有限領域の配置と選点および調整力の分布の近似

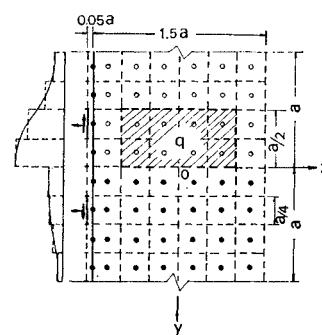
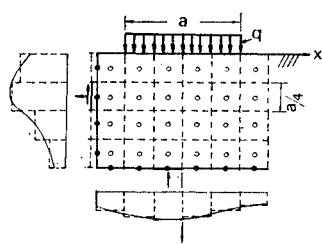


図-11 (b) 問題-4 の有限領域の配置と選点および調整力の分布の近似

あり、表面よりの深さ  $a$  なる水平面の  $w$  を 0 にするための選点の配置とそれに対応する調整力の分布の近似、ならびに (b) 図には、側面を自由にするためのそれらが示されている。なお、これらの調整力は、すでに 2. (3) に述べた手法に基づき、半無限体の内部に与えられるものである。

次に、図-12 (a), (b), および図-13 (a) はそれぞれ、問題-1~3 について、荷重の増大に伴う塑性域の拡大の模様を示したものである。なお、塑性域と弾性域の

境界線は、各選点の塑性化開始の荷重の分布図を書き、等高線法によって求めた。図に見るように、荷重の増大とともに、塑性域の界面はしだいに球状となり、かつ側方にふくれ出ようとする傾向を持つ。また、加圧面の直下には弾性域が残存するが、等分布荷重の場合はその断面は欠円形であり、押込みの場合はくさび形となる。

図-13 (b) は問題-4 の場合であるが、塑性域は側面の下端へ向かって進展し、半無限体の奥のほうへはほとんどふくれ出ようとせず、側面の上部も塑性化しない。

図-14 は各題における、荷重と加圧面の中心点 ( $x=0, y=0, z=0$ ) の変位  $w$  との相関曲線であるが、問題-1~3 のそれらは、塑性化とともに非線形の性状を強く現わすが流動状態には至らない。これは、前図に見るように塑性域が塑性域を包みこむ形になっており、側方への流動が抑えられているためであろう。一方、問題-4 の場合は、側面における拘束が解除されるので  $w$  は流動状態に近づく。なお、この傾向は図-15 に示される点 ( $x=-0.625 a, y=0, z=0.375 a$ ) の水平変位  $u$  についてより著しいものがある。

図-16, 17 はそれぞれ、

図-12, 13 の最終状態における各題の応力、変位の分布図であって、弾性解との比較がなされている。応力については、荷重の周辺より発するせん断応力の変化が著しく、また変位については、図-12~15 に関連して述べた性状がよくわかる。

さて、図-18 は本解法の基本的な照査のデータである。既述のように本解法による解の非線形部分には、有限小領域での平均化、および部分的差分表示による 2 次的な誤差を含むが、しかし、厳密解で与えられる線形部

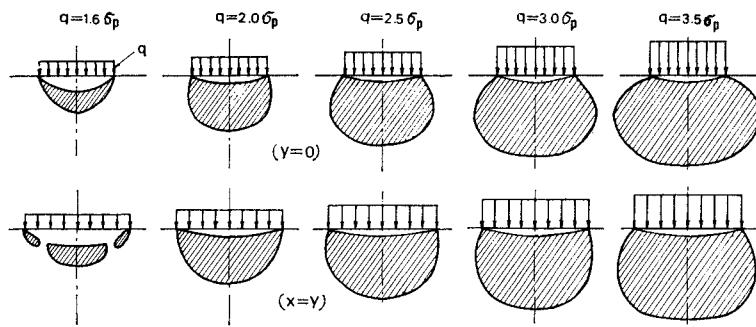


図-12 (a) 問題-1 の塑性域の変化

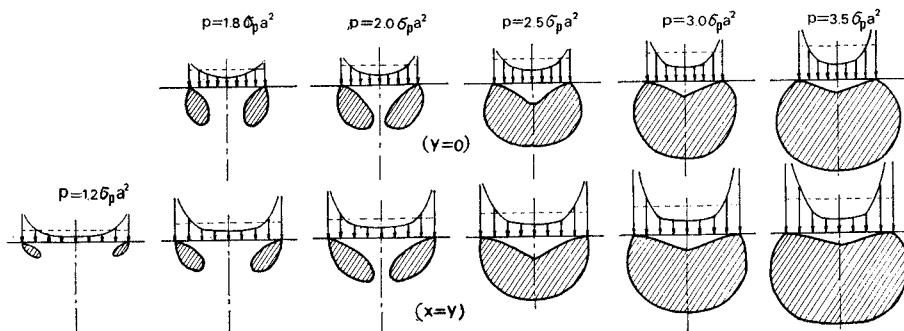


図-12 (b) 問題-2 の塑性域の変化

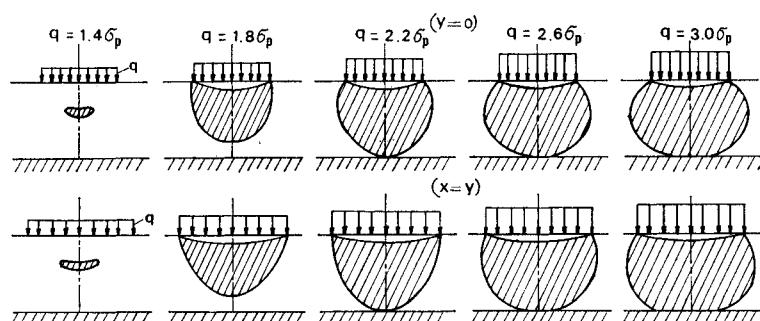


図-13 (a) 問題-3 の塑性域の変化

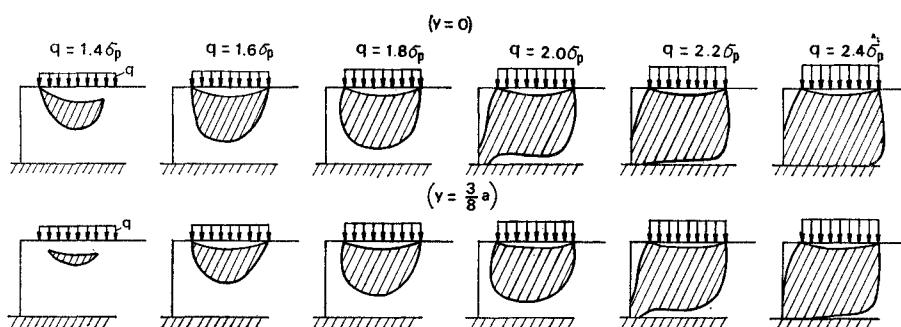


図-13 (b) 問題-4 の塑性域の変化

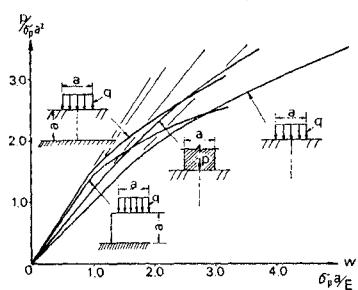


図-14 荷重-垂直変位(加圧面の中央点)曲線

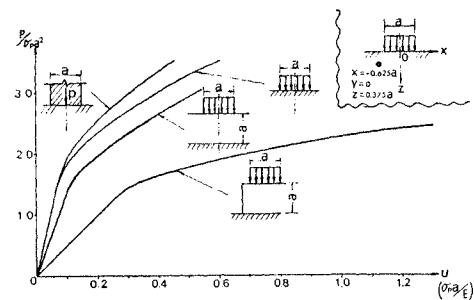
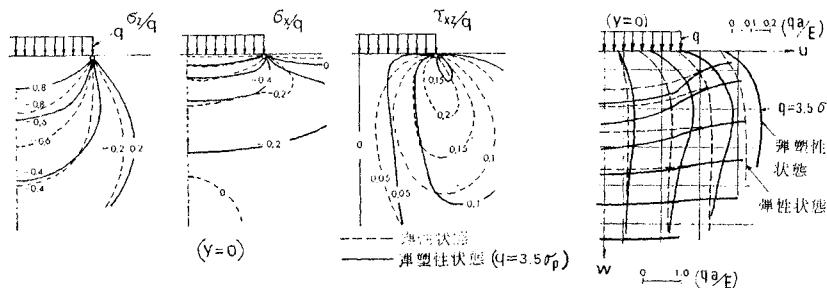
図-15 荷重-水平変位〔点( $x=-0.625a, y=0, z=0.357a$ )〕曲線

図-16(a) 問題-1 の応力ならびに変位の分布

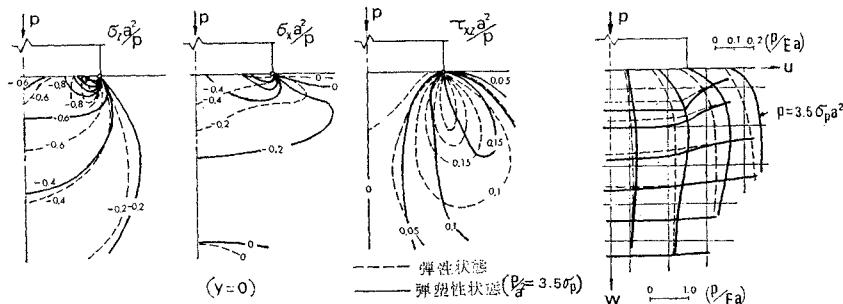


図-16(b) 問題-2 の応力ならびに変位の分布

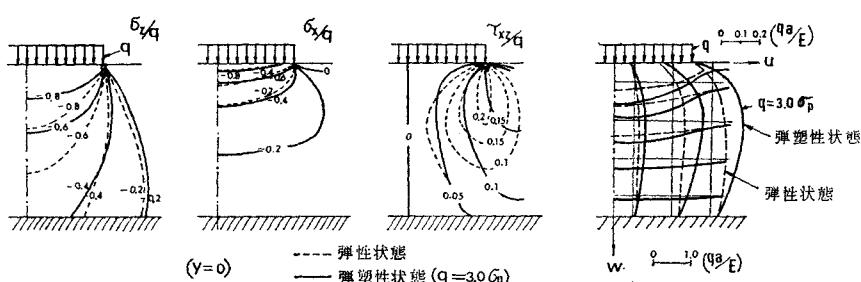


図-17(a) 問題-3 の応力ならびに変位の分布

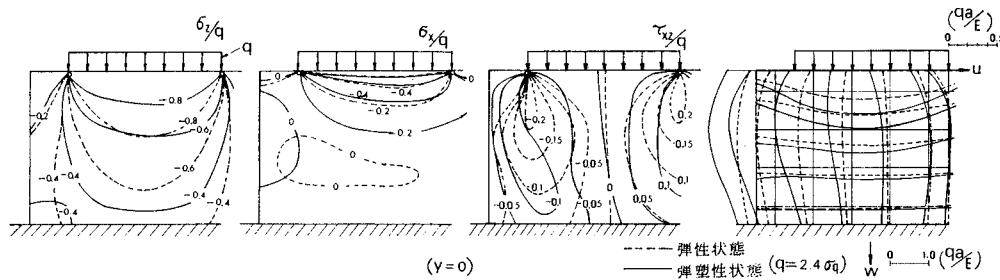


図-17 (b) 問題-4 の応力ならびに変位の分布

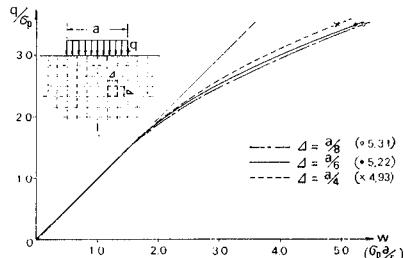


図-18 問題-1 における有限領域の分割の精度

分を含めて、解全体としては精度の高い連続解の性格を持ち、さらにいくぶん離れた位置では、それらの誤差もわずかになるので、結果的に解の精度は十分向上することが期待できる。図は、初期値接続問題の性格を持つ弾塑性解析において、その精度の判定にかかるる荷重-変位曲線に対し、有限領域の分割の粗密がおよぼす影響を調べたものである。図にみるように、荷重幅を4~6分割する程度で実用解が得られるものと判断できる。図-10, 11に示した有限領域の分割はこのような見地に立って定めたものである。

さらに、図-19は問題-4の側面、および底面の境界条件の精度を示すもので、未調整時の応力、および変位（半無限体に荷重のみが作用する場合の値：特解の値）が、調整により十分な精度で消去されていることがわかる。

## (2) 部分的に剛性の異なる3次元弾性問題

ここでは、3つの基本的な例題を扱う。すなわち、

**問題-5**：上面に等分布荷重を受ける垂直な角棒を内蔵する半無限体の問題

**問題-6**：上面に等分布荷重を受ける方形壁体を内蔵する半無限体の問題

**問題-7**：表面に部分荷重を受け、かつ一定の深さに水平な角棒を内蔵する半無限体の問題

まず、図-20は、問題-5のデータであって、角棒における有限領域の分割の模様とその軸線に沿っての $\sigma_z$

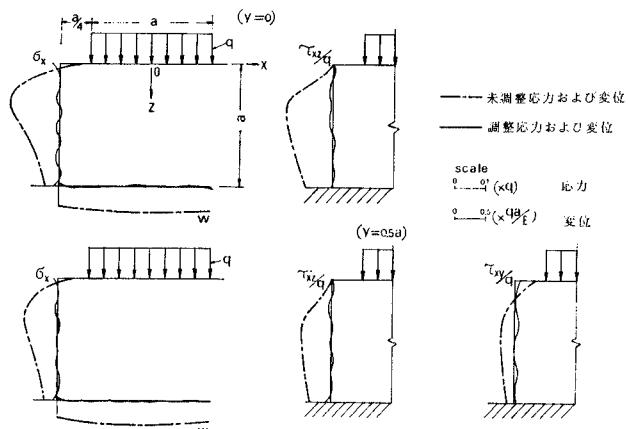


図-19 問題-4 の境界調整の精度

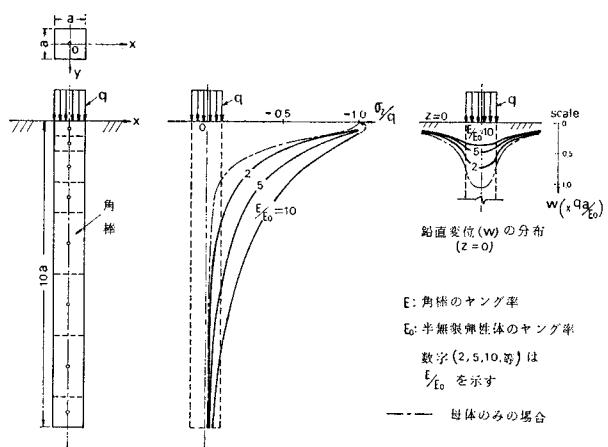


図-20 問題-5 の有限領域の配置と選点ならびに応力と変位の分布

の分布、ならびに載荷面の中心点における変位 $w$ を示し、また、角棒のヤング率( $E$ )と母体のそれ( $E_0$ )の比率が $\sigma_z, w$ におよぼす影響を表わしたものである。なお、角棒、ならびに母体のヤング率を $E, E_0$ とし、ポアソン比 $\nu, \nu_0$ をそれぞれ、0.3, 0.2とした。また、母体のみの場合のデータも同時に記載されている。

図に見るように、角棒が剛になるにしたがい、 $\sigma_z$ の深さの方向への伝達の度合いが大きくなる。同時に、角

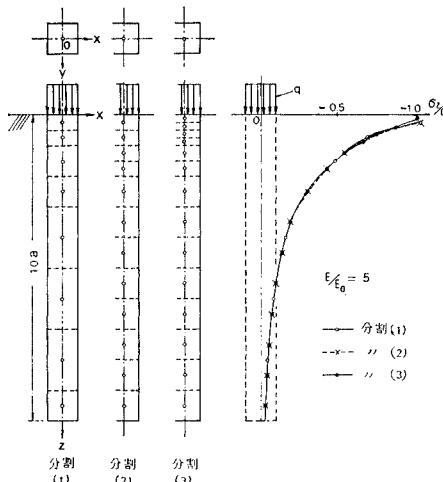


図-21 問題-5における有限領域の分割の精度

棒のひずみの減少と深基礎的な効果によって  $w$  は小さくなる。

ところで、角棒における有限領域の分割を表面の近傍で密にしたのは、分割を粗にするとこの部分の  $\sigma_z$  の解に乱れを生ずるからである。図-21 は図-20 で与えた分割の程度でほとんど収束解が得られたことを示している。

さて、問題-5における角棒を連続させることによって、方形壁体を内蔵する問題-6が解かれる。図-22 は、壁体における有限領域の分割の模様と各断面における  $\sigma_z$  ならびに変位  $u, w$  の分布を示したものであるが、それらは前題と同様の傾向を持つことがわかる。なお、本題においては  $v, v_0$  はともに 0.2 である。この結果を見れば、連続体の混在するような複雑な問題も本解法に

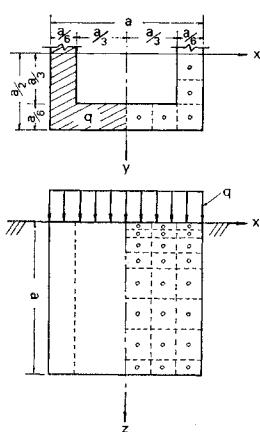


図-22 問題-6の有限領域の配置と選点ならびに応力と変位の分布

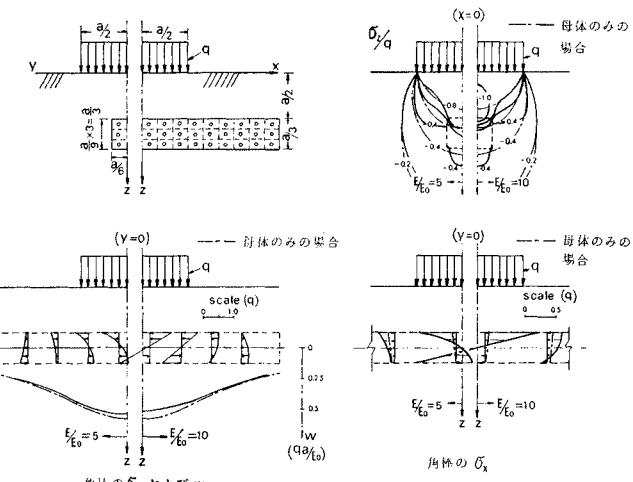


図-23 問題-7の有限領域の配置と選点ならびに応力と変位の分布

よって比較的容易に扱えることがわかる。

図-23 は、問題-7 の角棒における有限領域の分割とその断面における  $\sigma_x$  の分布、ならびに軸線に沿っての変位  $w$  の分布を示し、また、半無限体の角棒に直角な 1 つの断面における  $\sigma_z$  の分布を与えたものである。なお、本題では  $v, v_0$  はそれぞれ、0.3, 0.2 である。

図に見るように、角棒の  $E$  が増大しても、 $w$  の分布は大差ない。しかし、断面内の  $\sigma_x$  の分布には顕著な差異を生じ、 $E/E_0=10$  の場合で表面荷重の直下にある部分では、平面保持の状態にある曲げの影響が強く現われる。また、荷重より離れた端部に近い部分では反転する曲げの影響が弱く現われ、非平面保持の性状を呈する。一方、 $\sigma_z$  の分布図を見ると、半無限体内に角棒を内蔵することによって、 $\sigma_z$  の分布が角棒の部分に集中していくことがわかる。

## 5. むすび

本文は、すでに板、あるいはシャイベの弾塑性問題、ならびに等方性を持つ3次元弾性問題に関して提示した解法<sup>6), 7)</sup>を拡張し、またその解析上の経験をもとに、不均質弾性、ならびに弾塑性を有する3次元体の問題の解法を探究したものである。本解法のおもに意図するところは、連続解を基底に置いた高精度の解を与え、また、代数関数である Mindlin 解の多面的な応用によって解式の構成を系統立て、さらに未知量の数を制約して、この種の問題の解析を容易にすることにある。事実、弾塑性

問題では、3次元体内の未知量は、塑性化した部分の選点における流動の係数( $\mu$ )のみであり、また、不均質性を伴う弾性問題では、剛性の異なる部分にある選点のひずみ成分( $\epsilon_v$ )のみである。

若干の計算例は、本解法が、従来、理論的な解明のほとんどなされていない、この種の問題において、1つの基本的な解法として寄与できることを示唆するものである。

なお、3次元体内の未知量に関する体積力、ならびに境界調整力を含め、これら不静定力の影響は、離れた個所での減少が著しい。今後、より複雑な問題を解析する場合には、すでに前論文<sup>7)</sup>で試みたように、その影響範囲を制限してマトリックスを圧縮する方法を併用することが考えられる。この点に関し、さらに検討を重ねることは、連続解を骨子とし、選点の数を最小限に抑えうる解法上の利点と相まって、本解法の有用性の拡張を試みる上で必要であろう。

#### 参考文献

- 1) 岡村宏一・島田 功：3次元弾塑性非軸対称問題の一数

- 値解法、土木学会関西支部講演概要、pp. 1-11-1~4, 1972
- 2) 岡村宏一・島田 功：補剛材を部分的に内蔵する3次元弾性体の一数値解法、土木学会関西支部講演概要、pp. 1-7-1~4, 1972
- 3) 岡村宏一・島田 功：3次元弾塑性非軸対称問題の一数値解法、第27回土木学会講演概要集1、pp. 139~142, 1972
- 4) 岡村宏一・島田 功：部分的に剛性の異なる3次元弾性体の一数値解法、第27回土木学会講演概要集1、pp. 135~138, 1972
- 5) 古橋朗蔵・片岡正治：不均質物質の弾性学における基本境界値問題の積分方程式について、機械学会論文集、Vol. 33, No. 253, pp. 1331~1343, 1967
- 6) 岡村宏一・吉田公憲：大たわみ、およびリブの補剛を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析、土木学会論文報告集、No. 196, pp. 29~43, 1971
- 7) 岡村宏一・島田 功：3次元弾性問題の一数値解法との応用、土木学会論文報告集、No. 199, pp. 33~43, 1972
- 8) Mindlin, R.D. : Force at a point in the interior of a semiinfinite solid, Physics, Vol. 7, No. 5, pp. 195~202, 1936

(1972.10.18・受付)