

## サーキュロイド曲線を用いた新しい道路設計の手法

## A NEW TECHNIQUE FOR ROAD DESIGN BY USING CIRCULOID CURVE

村井俊治\*・大林成行\*\*  
By Shunji Murai and Shigeyuki Ohbayashi

## 1. 研究の目的

計算機が道路設計の分野に利用され始めてから 10 数年になる。この間、写真測量による地形の数値化と、計算機の処理能力が結合されて、道路設計の作業はきわめて能率化された。

しかしながら、路線選定段階および比較路線検討の段階においては、線形調整や土工量計算などにおいていままなお数多くの労力が必要であり、機動的な比較検討の妨げとなっている。この原因の一つに、従来のもつ道路線形が、直線、円、クロソイド曲線など性質の異なる曲線の組合わせで構成されているために、どのような曲線をどのようにあてはめたらよいかを調整するのが煩雑であることがあげられる。

もう一つの原因は、土工量計算を行なう際に必要となる横断地形データの収集を、路線が変わるたびに行なう作業が大変なことによる。

そこで、本研究では、まず第 1 に路線選定段階または比較路線検討段階において機動的な路線選定およびその評価を行なうことができるようにするために、著者はサーキュロイド曲線 (Circuloid Curve) とよばれる新しい道路線形を用いて道路設計を有機的に行なう手法を開発した。

すなわち、サーキュロイド曲線を用いた道路設計法はあとで述べられるように、(1) フリーハンドで描かれた線を平滑曲線にする上で有効である、(2) サーキュロイド曲線は曲率が連続的に変化するなめらかな曲線であり、道路設計に必要な曲率や接線などの計算が簡単である、(3) 土工量計算に必要な横断地形データを取り出すための準備が能率的に行なえる、(4) サーキュロイド曲線は平面線形だけでなく縦断線形に用いても、従来の設計方

法より簡単にしかも合理的に行なえる、(5) 片勾配のすりつけ、自動車走行特性などは、サーキュロイド曲線の連続性と平滑性から考えて、原理的には従来のもものと同等以上のものが期待できる、などの利点をもっている。

平面線形が小さな路線変更を受けた場合でも、中間測点の位置が変わるために横断面をつくり変えなければならないことがある。わずかな線形変更に対する横断地形図の変更を自動的に行なうためにこの研究では帯状デジタルテレインモデルの概念を提唱した。

また曲率の制約のために、サーキュロイド曲線をあてはめられた線形を変更する場合には、計算機内で自動的にダイナミックプログラミングにより調整する手法を確立しようとした。

## 2. サーキュロイド曲線による曲線のあてはめ

路線選定時には、いくつかの路線案が、地図上あるいは航空写真上にフリーハンドで描かれることが多い。これらのフリーハンドで描かれた線形は極端に曲折しているわけではないが、もちろんそのまま道路線形として用いるには微小な曲折が多すぎる。

そこでここでは、以下にのべるようにフリーハンドによる路線に、道路として用いて支障のないような滑らかな線形をあてはめることを考える。

以下に述べられるような段階にしたがってあてはめられる曲線をサーキュロイド曲線とよぶことにする。

- フリーハンドによって路線を選定する。
- 上記の線形上にほぼ等間隔に基準測点を選ぶ。
- ディジタルマによって上記の基準測点の平面座標 (x, y) を測定する。
- 隣りあう 3 点を用いてつぎつぎに円弧をあてはめてゆく。

e. 図-1 に示されるように両端を除いて、一般には隣りあう基準測点の間の区間には 2 つの円弧がある。この

\* 正会員 工博 東京大学助教授 生産技術研究所

\*\* 正会員 工修 東京大学助手 生産技術研究所

2つの円のうち、路線の進行方向に対して始まり側の円の半径を  $R_A$ 、終り側の円の半径を  $R_B$  とし、図-2に示すように、基準測点 AB を結ぶ方向を  $x$  軸とするよう

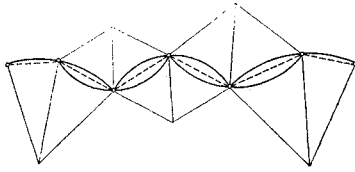


図-1 圓弧近似による曲線のあてはめ

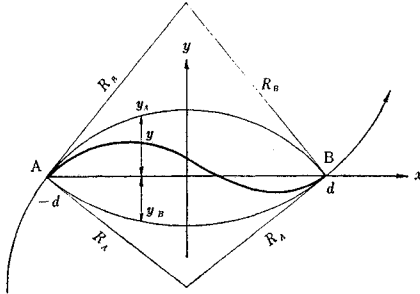


図-2 サークュロイド曲線のつくり方

な局部座標系を考えると2つの円の  $y$  座標は次の式によって求められる。

$$y_A = R_A \{ \sqrt{1 - (x/R_A)^2} - \sqrt{1 - (d/R_A)^2} \} \dots\dots\dots (1)$$

$$y_B = R_B \{ \sqrt{1 - (x/R_B)^2} - \sqrt{1 - (d/R_B)^2} \} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、

$$-d \leq x \leq d$$

このとき、サーキュロイド曲線上の点  $(x, y)$  は、式(1)、(2)を用いて次のように定義されるものとする。

$$y = p(\alpha y_A + \beta y_B) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$p$  : 曲折係数,  $0 \leq p \leq 1$  の範囲をとる。

$$\alpha = (d-x)/2d, \quad \beta = (d+x)/2d$$

$d$  : 基準測点間の距離の 1/2

f. つぎつぎとサーキュロイド曲線をあてはめてゆく

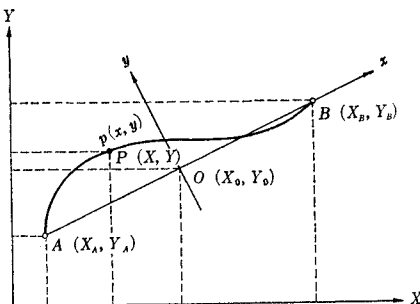


図-3 全体座標系への変換

と、全体として滑らかな曲線が得られる。ある区間のサーキュロイド曲線上の点  $(x, y)$  は図-3に示されるように座標変換されて全体座標系の点  $(X, Y)$  として記憶される。

### 3. サークュロイド曲線の線形要素の計算と曲線設置

サーキュロイド曲線の接線角、中間測点の座標、曲率、曲線長などの線形要素は道路線形として計算しておくことが必要である。

式(3)で定義されるサーキュロイド曲線を  $x$  で微分すると次の式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = -p \left\{ \frac{y_A - y_B}{2d} + \frac{\alpha x}{R_A \sqrt{1 - (x/R_A)^2}} + \frac{\beta x}{R_B \sqrt{1 - (x/R_B)^2}} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

この式を用いれば、サーキュロイド曲線上の点  $(x, y)$  の接線角、または横断方向角を求めることができる。

式(4)を用いるとサーキュロイド曲線の曲率は次の式から求められる。

$$\text{曲率} = \frac{1}{r} = \frac{d^2y/dx^2}{\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2}} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p \left\{ \frac{x}{d} \left( \frac{1}{R_A \sqrt{1 - (x/R_A)^2}} - \frac{1}{R_B \sqrt{1 - (x/R_B)^2}} \right) - \frac{\alpha R_A^2}{(R_A^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{\beta R_B^2}{(R_B^2 - x^2)^{3/2}} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

また曲線長  $l$  は次の式を計算機内で数値積分することにより求められる。

$$l = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \dots\dots\dots (7)$$

10 m, 20 m または 50 m などの定間隔ごとの中間測点は曲線長を求めるための数値積分と座標計算との間の逐次近似計算によりその座標が決定される。

サーキュロイド曲線を実際の路線として用いるためには、基準測点および中間測点の設置に関する測量方法を考えておかなければならない。

サーキュロイド曲線の曲線設置は次の段階に従って行なわれる。

(1) サークュロイド曲線をあてはめたときの基準測点を結ぶトラバース測量をする。

(2) 隣りあう基準測点のつくる区間にある中間測点を偏角弦長法かオフセット法により定める。

以上に述べた測量法は従来の路線測量方法と比較して次のような利点をもつ。

(1) I.P., B.C., E.C., S.P. 点などの主要点をおとさなくてすむ。

(2) 基準測点は I.P. 点と異なり路線線形上の点であるため現地での中心杭の設置が容易である。

(3) 局部的な線形変更に対する再測量が、容易である。

図-4 は、サーキュロイド曲線を用いた道路中心線および 20 m 間隔の横断線を自動作画したものを地図の中に入れたものである。図-5 はその座標および曲率を計算した結果を示している。

#### 4. ダイナミックプログラミングによる自動路線調整

フリーハンド路線にとられた基準測点を用いてサーキュロイド曲線をあてはめるときに、その曲率の一部に許容曲率より大きくなる部分が生じた場合には、基準測点を動かして線形を修正しなければならない。また、あてはめられたサーキュロイド曲線がフリーハンド路線と大きくずれた場合にも線形を修正するほうがよい。

図-6 に示すように、いまある測点を動かすと、その測点の両側の 2 点ずつの間の線形に影響をおよぼす。したがって、ある 1 点の基準測点の修正は前後 2 区間ずつの線形の修正になる。

一般に基準測点は図-7 に示されるようにある変動領域の円内で動かし得ると考えられる。円の大きさは地形や地物の影響力によりきめられ、たとえば河や沢のそばでは一般に変動領域の円は小さい。測点 1 点だけの修正でうまく路線を修正できない場合もある。このような場合次に示すようなダイナミックプログラミングの手法を用いて路線線形の調整を行なう。

路線を選定する問題を次のような形に定式化する。すなわち、何点かの変動領域円内を通る路線のうち、路線として曲率の制約をまもり、かつ路線曲線長が最小となる路線を選び出す。ただし曲率の制約が守られる限り路線は基準測点すなわち変動領域円の中心を通るものとする。

いま始点と終点は与えられており、始点からかぞえて  $i$  番目の測点の変動領域内の点を  $P_i(x_i, y_i)$  とする。始点から  $i$  番目の測点まで到達する最小曲線長を  $L_i$ 、 $i-1$  番目の測点と  $i$  番目の測点までの曲線長を  $l_i$  とする。1 測点は前後 2 点までの路線に影響を与えるから、ダイナミックプログラミングにおける漸化式は次のような二段階ずつの最適制御を求める問題になる。

$$L_i = \min_{P_{i-1}, P_i} \{L_{i-2} + l_{i-1} + l_i\} \dots \dots \dots (8)$$

上記の問題を解くには、まず  $L_0 = 0$  として

$$L_2 = \min_{P_1, P_2} \{l_1 + l_2\} \dots \dots \dots (9)$$

を解くことから始め、終点までの最小曲線長  $L_n$  を与えるような最適経路

$$\{P_1^*, P_2^*, P_3^*, \dots, P_n^*\}$$

を求めればよい。

図-8 はダイナミックプログラミングによって路線を調整した様子を自動製図させたものをあらわしている。

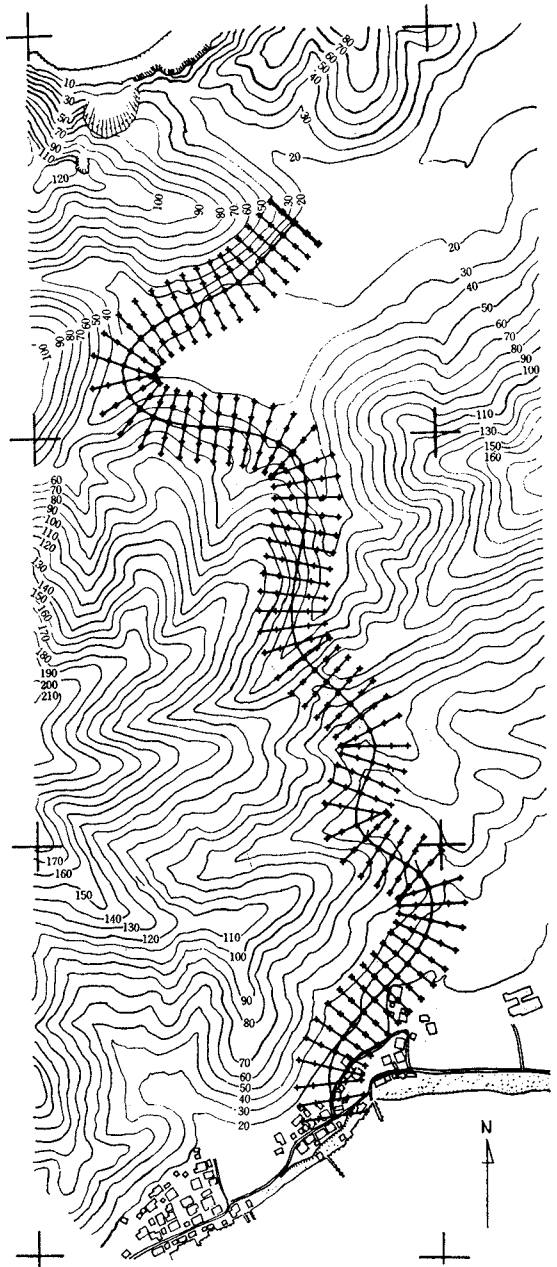


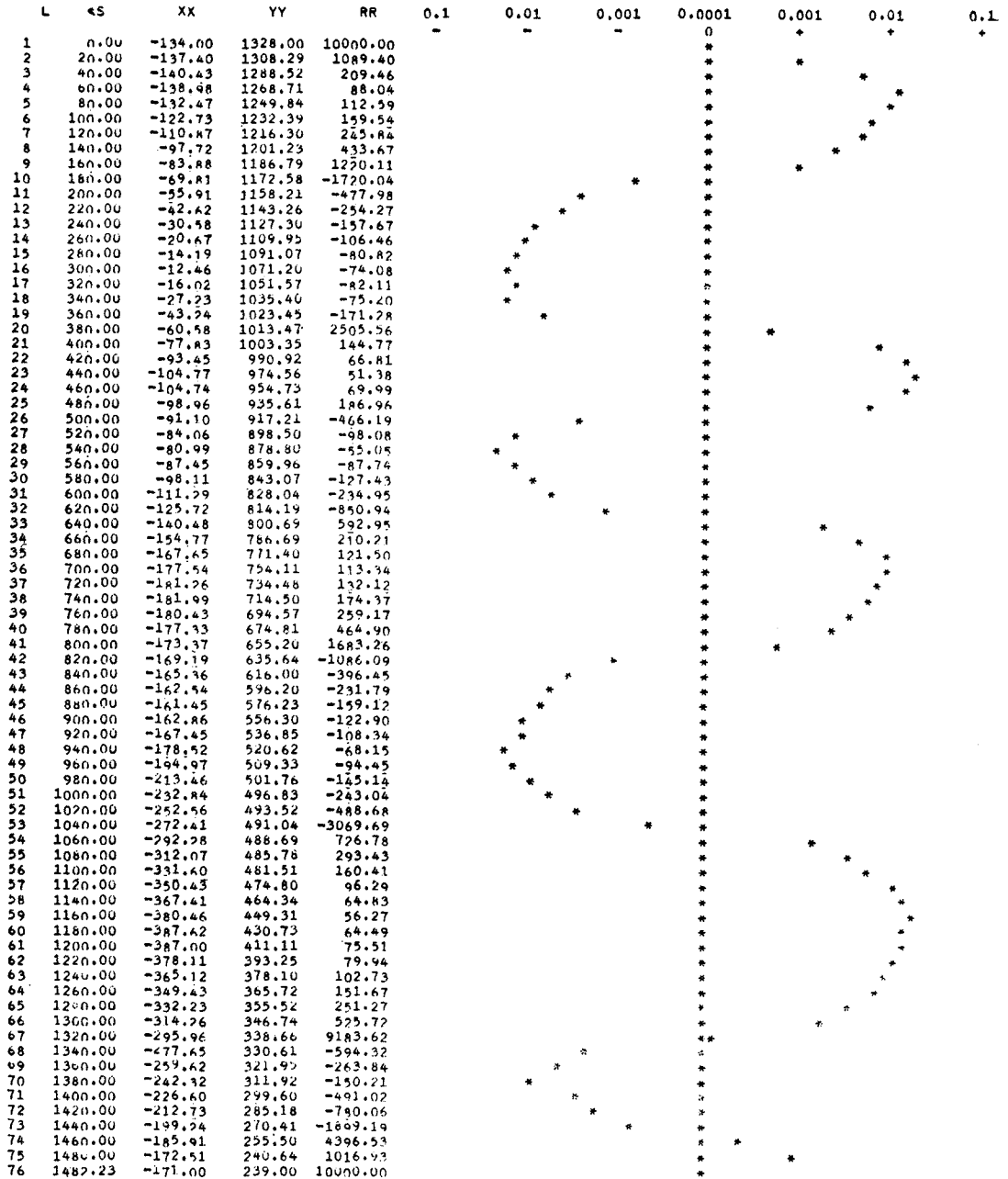
図-4 サーキュロイド曲線を用いた道路中心線と横断線の自動作画図

### 5. 帯状デジタル Terrain モデルの作成

デジタル Terrain モデルを作成するには、地形点の測定、内挿および内挿点の探索の便宜さなどから正方形格子状に地形点を選択することが多かった。このような

方法は宅地造成など面的にひろがりを持ち、かつ全体の形も方形に近い区域をしているような箇所にはきわめて有効である。

しかし路線計画のように帯状に長く、しかも曲がりくねっている地域のデジタル Terrain モデルの作成に、方形格子状に地形点をとることは計算処理上有効な方法



註) L: 測点番号, SS: 累積距離, XX: 測点 X 座標値, YY: 測点 Y 座標値, RR: 曲率半径  
 曲率図は対数目盛で表現してある

図-5 道路中心杭の座標計算および曲率計算

とはいえない。

そこで本研究では、図-9 に示すように、路線に沿う方向と路線に直角な方向に等間隔に地形点を選択することにした。

図に示すような帯状のメッシュを利用する方式は、

- (1) 路線計画に必要な地形を考慮しないですむ。
- (2) 路線直角方向の幅に多少の余裕をもたせておけば、中心線が多少変更されても、すでに測定された地形点を用いて新しい横断点の標高を内挿できる。
- (3) 路線直角方向にとる地形点を等間隔にとるので2次元配列として地形点の標高だけ記憶しておけばよい。中心点および横断点の平面座標はサーキュロイド曲線のあてはめのときにすでに計算されている。
- (4) サーキュロイド曲線およびその横断線は自動的

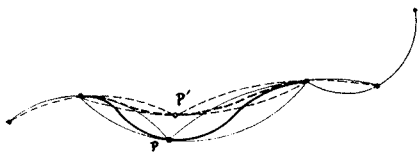


図-6 線形の修正

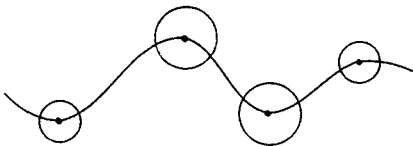


図-7 路線の通過変動領域

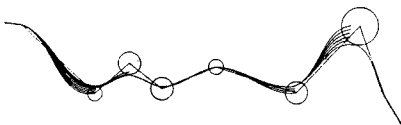


図-8 D.P. による路線調整

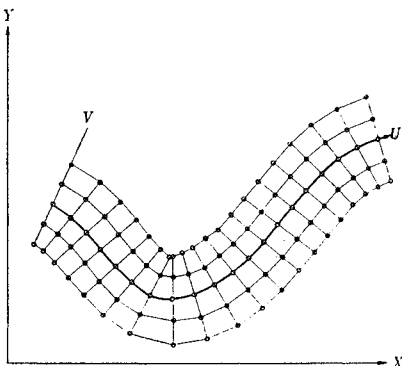


図-9 帯状デジタル Terrain モデル

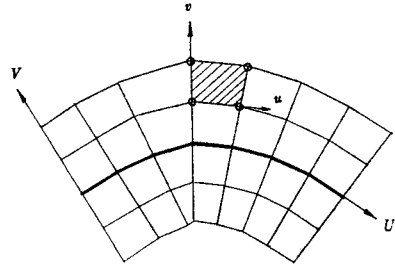


図-10 帯状デジタル Terrain モデルの座標系

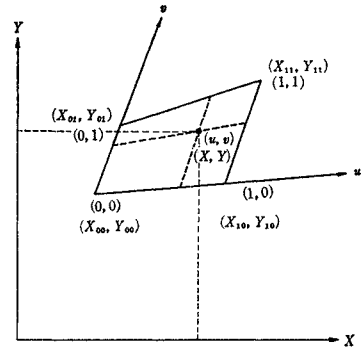


図-11 帯状デジタル Terrain モデルの作成

に計算され、また自動作画され得るので、地形点の測定がきわめて簡単に行なえる。

などの利点をもつ。

帯状デジタル Terrain モデルは次のようにして作られる。

いま 図-10 に示されるように、帯状のメッシュ状に選択された地形点を路線方向および路線直角方向に直線で結ばれた四辺形の小さな地域を考える。

図-11 に示すように、この四辺形の路線方向を  $u$ 、横断方向を  $v$  とするような座標系を考え、この四辺形の範囲を

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 \dots\dots\dots(10)$$

とする。

四辺形内部の点  $(u, v)$  に対応する地形曲面上の点  $(X, Y, Z)$  を次のように表わすものとする。

$$\left. \begin{aligned} X(u, v) &= \frac{a_3u + a_4v + a_5}{a_1u + a_2v + 1} \\ Y(u, v) &= \frac{a_6u + a_7v + a_8}{a_1u + a_2v + 1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

$$Z(u, v) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 b_{ij} u^{i-1} v^{j-1} \dots\dots\dots(12)$$

上の式からわかるように、 $(u, v)$  座標系と  $(X, Y)$  座標系は射影変換の関係にある。したがって  $(X, Y)$  をきめる  $a_1$  から  $a_8$  までの8個の未知係数は、四辺形の4つの頂点の座標から簡単に求められる。

逆に  $(X, Y)$  が与えられれば、 $(u, v)$  は次のようにして求められる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{(a_7 - a_2 a_8)X + (a_2 a_5 - a_4)Y + a_4 a_8 - a_3 a_7}{a_2 a_8 X - a_2 a_3 Y + a_3 a_7 - a_4 a_6} \\ v &= \frac{(a_1 a_8 - a_6)X + (a_3 - a_1 a_5)Y + a_5 a_6 - a_3 a_8}{a_2 a_8 X - a_2 a_3 Y + a_3 a_7 - a_4 a_6} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

したがって点 (X, Y) が四辺形の内部にあるか否かは、上式の u, v がともに 0 と 1 の間にあるか否かによって確かめられる。

Z(u, v) を求める式の 16 個の未知係数 b<sub>ij</sub> は四辺形の 4 つの頂点において次の式に示す 4 つずつの条件式より一意的に求められる。

$$\left. \begin{aligned} Z(u, v) &= z \\ R(u, v) &= \partial z / \partial u \\ S(u, v) &= \partial z / \partial v \\ T(u, v) &= \partial^2 z / \partial u \partial v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ただし、u=0 または 1, v=0 または 1

結局ある四辺形の内部にある任意の点 (X, Y) に対応する地盤標高 Z は、まず式 (13) において (u, v) が求められ、その (u, v) の値を式 (12) に代入することにより計算される。

帯状デジタルトレインモデルが有効に利用できる限界は、路線線形が微小な修正を受けたときであって、このとき新しい測点に対応する横断地形点を自動的に内挿計算することである。

上にも述べたように、その地盤標高を内挿したい測点がどの四辺形のメッシュに属しているかを探索しさえすれば式 (11) および式 (12) からただちにその地盤標高が内挿される。したがって内挿点がどのメッシュに属するかを要領よく探し出すアルゴリズムが必要となる。

帯状デジタルトレインモデルを利用する場合には、変更された新しい路線の横断地形を求めることが多いことに着目すると、次のような方法で内挿点の探索をすればよい。

(1) 新しい横断測線番号 i の j 番目の地形点は、古い横断測線 i の近傍にあると見て前後 5 測線分ぐらいまでの範囲を、どの横断線間にあるかが探索される。

(2) 横断線間に存在する場所がわかったら、次にどのメッシュに属するかが精査される。

**6. サーキュロイド曲線を用いた縦断線形の設計**

山岳道路などにおいては、縦断地形がきわめて起伏に富んでいることが多い。このような場合、フリーハンドで縦断曲線を選定することは比較的容易であるが、従来の設計仕様どおりに、直線と二次放物線の緩和曲線のみで縦断曲線を挿入しようとする、線形構成上好ましい

線形にするのに苦労する。

縦断線形が工事施工、測量、および設計の上で直線と円または放物線の組み合わせでなければならない理由は全くなく、なめらかな縦断線形であってその曲率と勾配が許容値以下であれば縦断線形として用いることが可能である。

サーキュロイド曲線を用いた縦断線形は以上のような考え方のもとに考案された。以下にサーキュロイド曲線を用いた縦断線形の設計方法を段階的に述べてみよう。

- (1) フリーハンドで選定された縦断曲線上に縦断基準測点を何点か選ぶ。
- (2) 次に、これらの縦断基準測点を結ぶようなサーキュロイド曲線があてはめられる。
- (3) 中間測点ごとの縦断勾配が次の式により計算される (図-12 参照)。

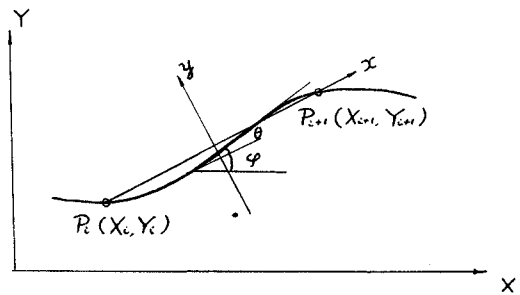


図-12 サーキュロイド曲線

$$\text{勾配} = \tan(\theta + \phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi}$$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}, \quad \tan \phi = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} - X_i}$$

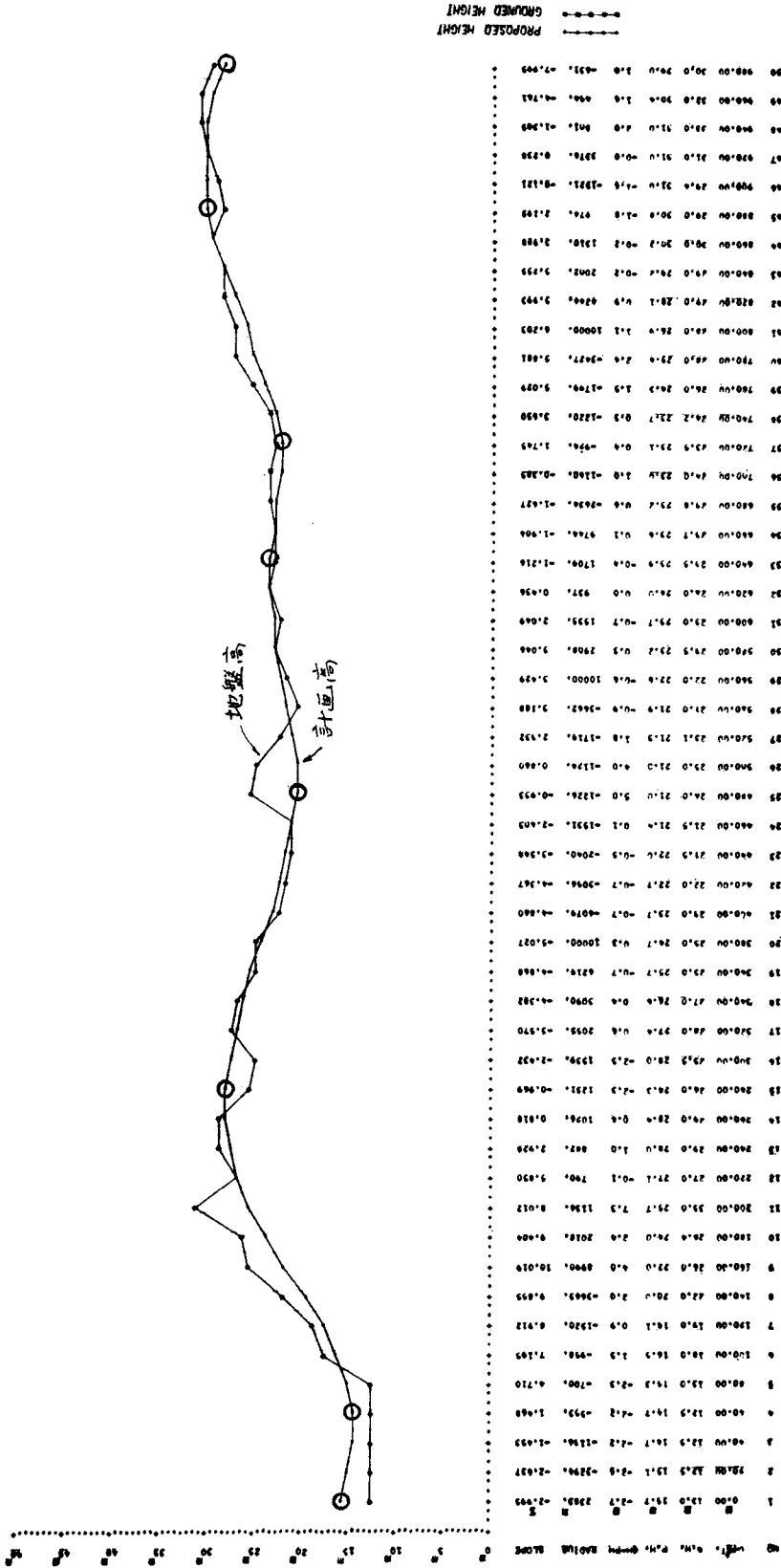
ここで、θ はサーキュロイド曲線をあてはめるとき用いられる局部座標系の接線勾配の傾きであり、φ は縦断基準測点間の勾配の傾きである。

図-13 は 8 点の縦断基準測点を用いてサーキュロイド曲線をあてはめて設計した縦断線形である。

この方法によれば、8 点の追加距離と計画高のデータを与えるだけで、あとは自動的に他の測点の計画高および勾配、接円半径が計算される。

これを従来の設計法のように直線と縦断曲線で設計しようとする、始終点と勾配変更点での追加距離と計画高のデータのほかに緩和曲線長のデータが必要となる。その上、フリーハンドで選んだ線と大ききずれたり縦断曲線どうしが重なったりする障害が起きたりする。

このような意味から、サーキュロイド曲線を用いた縦断線形の設計法は、きわめて合理的かつ有効であるといえる。



図—13 サ—キ—ロ—イ—ド曲線を用いた縦断線形の設計

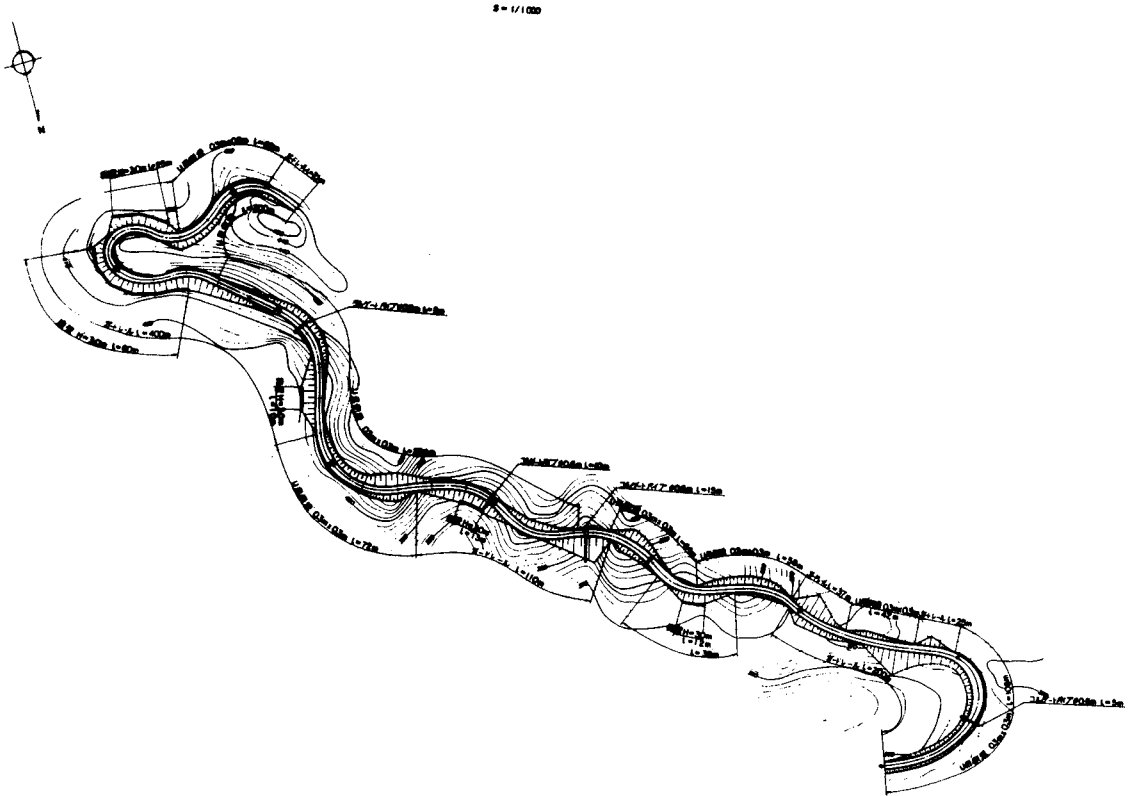


図-14 東京大学三陸気球センター取付道路にわが国で初めて応用されたサーキュロイド曲線の道路

## 7. む す び

土木設計に計算機を利用する場合、従来ある手法や計算方式を単に計算機でおきかえることにより、省力化が行なわれることが多かった。自動設計や自動製図の概念も基本的にはこのような考え方に基づいている。

しかし、従来の設計手法が計算機の利用を念頭においたものではなかったので、計算機にとっては必ずしも合理的な手法となっていないものが数多くある。ここに、設計手法そのものを再考してより合理的な手法をつくり出さなければならない理由があるのである。

構造解析の分野で多用されている有限要素法は、手計算時代には不向きな解析法であったものが、計算機時代にはまさに有効な手法となった。ここに提案したサーキュロイド曲線による新しい道路設計の手法も、計算機の利用を念頭においた手法である。本文中に述べられたように、入力データの減少、設計作業のシステム自動化、および図形処理による設計評価などの点で従来の設計手法のもつ非合理性を改善するものとして、本手法はきわ

めて特色あるものとする。

幸いにして、わずか1 kmの長さではあるが、図-14に示すように、サーキュロイド曲線を用いたわが国最初の道路が、岩手県三陸にある東京大学気球センターの進入道路として昭和46年春に完成した。なお昭和48年春には長野県木曾に東京大学天文台の進入道路約1.2 kmがサーキュロイド曲線を平面線形、縦断線形両者に利用されて完成される予定である。これらの道路設計を指導した著者の経験からいえば、きわめて少人数の人間で短期間に設計処理が行なえるだけでなく、設計変更時の処理がきわめて簡単であった。また工事測量および施工も従来のそれとほとんど同じかむしろ簡便であった。

サーキュロイド曲線を用いた道路は一般道路以外にも山岳道路、観光道路にも広く応用可能である。

## 参 考 文 献

- 1) 丸安・村井・大林・金森：路線選定の自動化，生産研究，Vol. 23, No. 4, 1971.
- 2) 丸安・村井・大林：路線計画，設計を対象とした帯状デジタルテレインモデルの作成，写真測量，Vol. 10, No. 2, 1971.

(1972. 6. 29・受付)