

立体構造解析のための薄板有限要素

A FLAT FINITE ELEMENT FOR THIN SHELL ANALYSIS DERIVED
BY ASSUMED STRESS APPROACH吉 田 裕*・雨宮 栄一郎**・増田 陳紀***
By Yutaka Yoshida, Eiichiro Amemiya and Nobutoshi Masuda

1. 序 論

構造物の数値解析法の進歩は、複雑な構造物の精密な解析を可能にした。有限要素法は、対象とする構造の形状や境界条件の任意性に適応し得るという点では、現状において最も有力な解析法の一つである。しかし、ごく一般的な薄板の線形解析に限定しても、まだ解決されていない多くの問題点が残されていることもまた事実である。たとえば、2次元平面応力要素における面内回転変位成分の欠如は、しばしば具体的な解析に支障をもたらす。すなわち、2次元平面応力部分構造と1次元的に理想化された棒構造要素とを一体化して、柱で支持された平板構造を解析する際に、棒のねじれ角を平面応力要素に対してどのように接合し、評価するかといった問題、柱・はり構造と壁とを一体化して解析する際に、柱・はりの節点のたわみ角を、壁を評価するための平面応力要素に対してどのように接合し、評価するかといった問題、面内回転変位に対応する成分を欠いたままの平面応力要素を用いて、薄肉立体構造の解析をする際に、剛性マトリックスが特異性を持つ場合が起こるといった問題などである。また、ひずみ一定の平面応力要素を用いて端部に荷重を受ける片持ばりの解析を行なうような場合に、せん断変形が極端に強調されるといった問題、変位分布仮定に基づいて誘導される要素による解析結果においては、変位の精度にくらべて、応力の精度がかなり悪くなり、応力評価の方法を再検討する必要が生ずるといった問題など、具体的な解析過程で直面する問題点は多い。

当然のことながら、上に指摘したような問題点は、現時点で突然表面化した問題点ではなく、したがって、個々の問題点を解決すべく試みられた研究は、多く存在す

る^{1)~5)}。しかし、それぞれが特定の限定された問題点を解決すべく試みられた研究で、立場を変えてみるとやはり重要な問題点を含んでいる場合がほとんどである。もっとも、有限要素法は本質的に近似解析法であるから、これのもつ問題点の完全な解決ということは、ありえない。

したがって、有限要素法をより合理的なもの、より信頼できるものとするための努力が続けられているわけであり、有限要素法の基礎関係式の定式化に関して、種々の変分原理に基づいた多くの定式過程が与えられてきたのも⁶⁾、力学的背景に基づいた必然の流れであった。なかでも応力仮定の Hybrid 法⁷⁾は有限要素法の特徴を生かした方法として応用範囲が広い。

本論文は、薄板構造要素と補剛リブや柱などのいくつかの異なった範疇に属する構造要素が一体化された立体構造を有効に解析することを前提とした、一つの穏当な薄板構造要素を応力仮定 Hybrid 法⁸⁾に基づいて誘導した経過を報告するものである。ここで「穏当な」という表現を用いたのは、たとえば、棒構造要素の変位形が3次関数で仮定されるのが一般的であるから、これに辺を接すべき平面応力構造要素の、それに対応する辺上の変位形もまた、3次関数で仮定した、といったことを意味している。また解析精度を上げるために特定の部分構造要素の自由度を上げると、他の構造要素との一体化の際に統一的な構成が困難になり、したがって、種々の異なった構造要素を一体化することを前提とした統一的な計画に基づいて節点変位成分などの設定を行なった、ということの意味している。具体的には、平面応力モデルでは1節点3自由度 (u, v, θ_z)、計9自由度の三角形要素とし、また、平板曲げモデルでも同様に、1節点3自由度 (w, θ_x, θ_y)、計9自由度の三角形要素とした。したがって、立体構造解析のための要素は、1節点6自由度 ($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)、計18自由度の三角形要素となり、対応する節点力は、($P_x, P_y, P_z, \bar{M}_x, M_y, M_z$)となる。

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 新日本製鉄鉄構開発部相模原技術センター

*** 学生会員 東京工業大学大学院

2. 平面応力モデル

三角形の各頂点に設定した節点において、面内直交二軸方向の変位 u, v および面内回転変位 θ_z の3成分を節点変位としてとる。節点変位 $\{u\}, \{v\}$ に対応する節

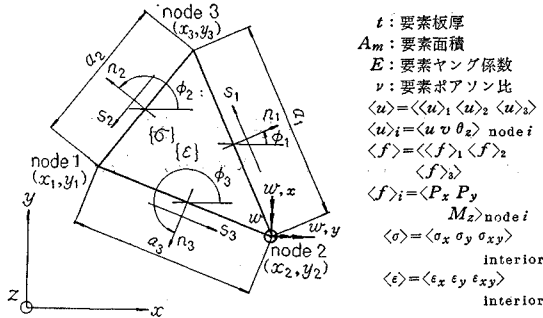


図-1 平面応力三角形要素

点力 $\{f\}$ 、また要素内のひずみ $\{\epsilon\}$ 、および応力 $\{\sigma\}$ は図-1に示される。ここに $\{ \}$ は列ベクトル、また $\langle \rangle = \{ \}^T$ は行ベクトルを表わす。

いま、要素内応力分布を線形に仮定すれば、要素内の任意の点における応力 $\{\sigma\}$ は、節点における対応する応力値

$$\langle \sigma_n \rangle = \langle \langle \sigma_n \rangle_1 \langle \sigma_n \rangle_2 \langle \sigma_n \rangle_3 \rangle, \quad \langle \sigma_n \rangle_i = \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_{xy} \rangle_{\text{node } i} \dots \dots \dots (1)$$

の関数として、次のように表わされる。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{interior}} = [T] \cdot \{\sigma_n\} \dots \dots \dots (2)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

ζ_i は面積座標

節点における応力値ベクトル $\{\sigma_n\}$ は9成分よりなるが、 $\{\sigma_n\}$ の関数として表わされる要素内の応力 $\{\sigma\}$ が要素内で平衡方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + x \bar{F} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{F}_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

を満足することが要求され、したがって $\{\sigma_n\}$ は従属成分をもつ。ただし、 \bar{F}_x, \bar{F}_y は物体力の x および y 成分である。いま、要素内で $\{\sigma\}$ が平衡方程式の斉次形を満足するように仮定するものとし、 $\{\sigma_n\}$ の成分のうち独立な応力成分を $\{\sigma_n^{eq}\}$ とすると、 $\{\sigma_n\}$ は $\{\sigma_n^{eq}\}$ により、次のように与えられる。

$$\{\sigma_n\} = [R] \cdot \{\sigma_n^{eq}\} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $[R]$ は9行7列のマトリックスで、次のよ

うにして得られる。節点 i の節点座標を (x_i, y_i) とすれば、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_m} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (6)$$

A_m : 三角形の面積
 $g_i = x_k - x_j, h_i = y_j - y_k$
 $(ijk) = (123) (231) (312)$

式(4)に、式(2)および式(6)を代入すれば、斉次平衡方程式は

$$\begin{bmatrix} h_1 & 0 & g_1 & h_2 & 0 & g_2 & h_3 & 0 & g_3 \\ 0 & g_1 & h_1 & 0 & g_2 & h_2 & 0 & g_3 & h_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{x1} \\ \sigma_{y1} \\ \sigma_{xy1} \\ \sigma_{x2} \\ \sigma_{y2} \\ \sigma_{xy2} \\ \sigma_{x3} \\ \sigma_{y3} \\ \sigma_{xy3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

とかかれる。したがって、

(i) $h_3 \neq 0$ ならば
 $\langle \sigma_n^{eq} \rangle = \langle \sigma_{x1} \sigma_{y1} \sigma_{xy1} \sigma_{x2} \sigma_{y2} \sigma_{xy2} \sigma_{y3} \rangle \dots \dots (8)$

とし、

$$[R] = \begin{bmatrix} [I]_{66} \\ \frac{h_1}{h_3} \frac{g_1 g_3}{h_3^2} & \frac{h_1 g_3 - h_3 g_1}{h_3^2} & \frac{h_2}{h_3} \frac{g_2 g_3}{h_3^2} & \frac{h_2 g_3 - h_3 g_2}{h_3^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g_1}{h_3} & -\frac{h_1}{h_3} & 0 & -\frac{g_2}{h_3} & -\frac{h_2}{h_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [O]_{61} \\ \frac{g_3^2}{h_3^2} \\ 1 \\ -\frac{g_3}{h_3} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 $[I]_{mm}$ は m 行 m 列の単位行列、 $[O]_{mn}$ は m 行 n 列の零行列である。

(ii) $g_3 \neq 0$ ならば、
 $\langle \sigma_n^{eq} \rangle = \langle \sigma_{x1} \sigma_{y1} \sigma_{xy1} \sigma_{x2} \sigma_{y2} \sigma_{xy2} \sigma_{x3} \rangle \dots \dots (10)$

とし、

$$[R] = \begin{bmatrix} [I]_{77} \\ \frac{h_1 h_3}{g_3^2} & \frac{g_1}{g_3} & \frac{g_1 h_3 - h_1 g_3}{g_3^2} & \frac{h_2 h_3}{g_3^2} & \frac{g_3}{g_2} & \frac{g_2 g_3 - h_2 g_3}{g_3^2} & \frac{h_3^2}{g_3^2} \\ -\frac{h_1}{g_3} & 0 & -\frac{g_1}{g_3} & -\frac{h_2}{g_3} & 0 & -\frac{g_2}{g_3} & -\frac{h_3}{g_3} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (11)$$

相補仮想仕事の原理より

$$t \cdot \int_{A_m} \langle \delta \sigma \rangle \cdot [N] \cdot \{ \sigma \} dA = \langle \delta f \rangle \cdot \{ u \} \dots \dots \dots (12)$$

ここに、

$$\langle f \rangle = \langle \langle f \rangle_1 \langle f \rangle_2 \langle f \rangle_3 \rangle \dots \dots \dots (13)$$

$$\langle f \rangle_i = \langle P_x P_y M_z \rangle_{\text{node } i}$$

$$\langle u \rangle = \langle \langle u \rangle_1 \langle u \rangle_2 \langle u \rangle_3 \rangle \dots \dots \dots (14)$$

$$\langle u \rangle_i = \langle u v \theta_z \rangle_{\text{node } i}$$

はそれぞれ、節点力および節点変位である。また、 t 、 A_m は要素の板厚および面積であり、要素のヤング係数を E 、ポアソン比を ν とすれば、

$$[N] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (15)$$

式 (12) の右边は、要素全周を S_m とすれば、

$$\langle \delta f \rangle \cdot \{ u \} = t \cdot \int_{S_m} \langle \delta f_B \rangle \cdot \{ u_B \} \cdot ds \dots \dots \dots (16)$$

である。ここに、

$$\langle u_B \rangle = \langle \langle u_B \rangle_1 \langle u_B \rangle_2 \langle u_B \rangle_3 \rangle \dots \dots \dots (17)$$

$$\langle u_B \rangle_i = \langle u_n u_s \rangle_{\text{side } i}$$

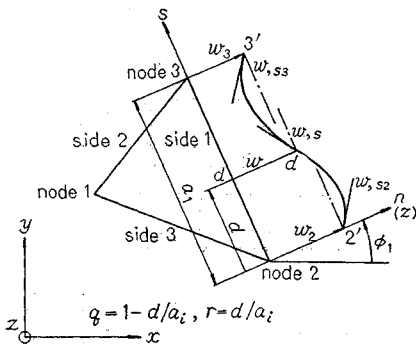
$$\langle f_B \rangle = \langle \langle f_B \rangle_1 \langle f_B \rangle_2 \langle f_B \rangle_3 \rangle \dots \dots \dots (18)$$

$$\langle f_B \rangle_i = \langle \sigma_n \sigma_{ns} \rangle_{\text{side } i}$$

は、要素の周辺上の変位、およびそれに対応する要素周辺上の力量であり、図-2 よりそれぞれ次のように与えられる。

$\{ u_B \}_i$ は、要素節点変位 $\{ u \}$ の関数として一義的に決定されるように、ここでは、 u_n については3次関数、 u_s については1次関数で補間する。すなわち、

$$u_n \text{ side } i = \langle 1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/a & 2/a & 3/a \end{bmatrix}_{\text{side } i}$$



$$\langle u_B \rangle = \langle \langle u_B \rangle_1 \langle u_B \rangle_2 \langle u_B \rangle_3 \rangle$$

$$\langle u_B \rangle_i = \langle u_n u_s \rangle_{\text{side } i}$$

$$\langle f_B \rangle = \langle \langle f_B \rangle_1 \langle f_B \rangle_2 \langle f_B \rangle_3 \rangle$$

$$\langle f_B \rangle_i = \langle \sigma_n \sigma_{ns} \rangle_{\text{side } i}$$

$$c_i = \cos \phi_i, s_i = \sin \phi_i$$

$$h_i = -a_i c_i = y_j - y_k, g_i = -a_i s_i = x_k - x_j$$

図-2 周辺変位と周辺力量 (平面応力要素)

$$\left. \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} u_n \text{ node } j \\ \theta_z \text{ node } j \\ u_n \text{ node } k \\ \theta_z \text{ node } k \end{matrix} \right\} \text{ side } i \\ u_s \text{ side } i = \langle qr \rangle_{\text{side } i} \cdot \left\{ \begin{matrix} u_s \text{ node } j \\ u_s \text{ node } k \end{matrix} \right\} \text{ side } i \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

式 (19) の節点値に、次の座標変換

$$\left\{ \begin{matrix} u_n \\ u_s \\ \theta_z \end{matrix} \right\}_{\text{side } i} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{side } i} \cdot \left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ \theta_z \end{matrix} \right\}_{\text{side } i} \dots \dots \dots (20)$$

を施せば、次式が得られる。

$$\{ u_B \}_i = [L]_i \cdot \{ u \} \dots \dots \dots (21)$$

$$[L]_i = \begin{bmatrix} \text{column-}i & \text{column-}j & \text{column-}k \\ [0]_{23} & c(q^2+2q^2r) & s(q^2+2q^2r) & aq^2r \\ -sq & cq & 0 & \\ c(3r^2-2r^3) & s(3r^2-2r^3) & -aqr^2 \\ -sr & cr & 0 \end{bmatrix}_{\text{side } i} \dots \dots \dots (22)$$

ただし、 $a = a_i, c = \cos \phi_i, s = \sin \phi_i, r = d/a_i,$
 $q = 1 - d/a_i \dots \dots \dots (23)$

$\{ f_B \}_i$ は、次式

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_n \\ \sigma_{ns} \end{matrix} \right\}_{\text{side } i} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix}_{\text{side } i} \cdot \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\}_{\text{side } i} \dots \dots \dots (24)$$

に式 (2) を代入すれば、side i 上では $(\zeta_i \zeta_j \zeta_k) = (0 \ qr)$ であるから、要素節点での応力値 $\{ \sigma_n \}$ の関数として次のように表わされる。

$$\{ f_B \}_i = [M]_i \cdot \{ \sigma_n \} \dots \dots \dots (25)$$

$$[M]_i = \begin{bmatrix} \text{column-}i & \text{column-}j & \text{column-}k \\ [0]_{23} & c^2q & s^2q & 2csq \\ -csq & csq & (c^2-s^2)q \\ c^2r & s^2r & 2csr \\ -csr & csr & (c^2-s^2)r \end{bmatrix}_{\text{side } i} \dots \dots \dots (26)$$

したがって、式 (16) は、式 (21), (25) より、

$$\langle \delta f \rangle \cdot \{ u \} = \langle \delta \sigma_n \rangle \cdot [Q]^T \cdot \{ u \} = \langle \delta \sigma_n^{eq} \rangle \cdot [S]^T \cdot \{ u \} \dots \dots \dots (27)$$

と与えられる。ただし、

$$[S] = [Q] \cdot [R] \dots \dots \dots (28)$$

$$[Q] = [Q]_1 + [Q]_2 + [Q]_3 \dots \dots \dots (29)$$

$$[Q]_i = t \cdot \int_{\text{side } i} [L]_i^T \cdot [M]_i ds$$

$$[Q]_i = \frac{t}{60} \times$$

$$\begin{matrix}
 & \text{column-}j & & \\
 \text{row-}k \text{ row-}j & \left[\begin{array}{ccc}
 -20h-hc^2 & -hs^2 & -20g-2gc^2 \\
 -gc^2 & -20g-gs^2 & -20h-2hs^2 \\
 3h^2 & 3g^2 & 6hg \\
 \hline
 -10h+hc^2 & hs^2 & -10g+2gc^2 \\
 gc^2 & -10g+gs^2 & -10h+2hs^2 \\
 -2h^2 & -2g^2 & -4hg \\
 \hline
 -10h+hc^2 & hs^2 & -10g+2gc^2 \\
 gc^2 & -10g+gs^2 & -10h+2hs^2 \\
 2h^2 & 2g^2 & 4hg \\
 \hline
 -20h-hc^2 & -hs^2 & -20g-2gc^2 \\
 -gc^2 & -20g-gs^2 & -20h-2hs^2 \\
 -3h^2 & -3g^2 & -6hg
 \end{array} \right] & \text{side } i & \\
 & & & \dots\dots\dots & (30)
 \end{matrix}$$

ここに、

$$h = h_i, g = g_i \dots\dots\dots (31)$$

一方、式 (12) の左辺は、

$$\begin{aligned}
 t \cdot \int_{A_m} \langle \delta \sigma \rangle \cdot [N] \cdot \{ \sigma \} dA &= \langle \delta \sigma_n \rangle \cdot [H] \cdot \{ \sigma_n \} \\
 &= \langle \delta \sigma_n^{eq} \rangle \cdot [G] \cdot \{ \sigma_n^{eq} \} \\
 &\dots\dots\dots (32)
 \end{aligned}$$

と表わされる。ただし、

$$[G] = [R]^T \cdot [H] \cdot [R] \dots\dots\dots (33)$$

$$\begin{aligned}
 [H] &= t \cdot \int_{A_m} [T]^T \cdot [N] \cdot [T] dA \\
 &= \frac{t A_m}{12} \times \begin{bmatrix} 2[N] & [N] & [N] \\ & 2[N] & [N] \\ & & SYM & 2[N] \end{bmatrix} \dots\dots (34)
 \end{aligned}$$

したがって、式 (27) および式 (32) を式 (12) に代入して、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \{ \sigma_n^{eq} \} &= [G]^{-1} \cdot [S]^T \\
 &\cdot \{ u \} \dots\dots\dots (35)
 \end{aligned}$$

式 (35) を式 (32) に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
 t \cdot \int_{A_m} \langle \delta \sigma \rangle \cdot [N] \cdot \{ \sigma \} dA &= \langle \delta u \rangle \cdot [S] \cdot \\
 &[G]^{-1} \cdot [S]^T \cdot \{ u \} \\
 &\dots\dots\dots (36)
 \end{aligned}$$

ここで、線形弾性体に対しては、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \langle \delta f \rangle \cdot \{ u \} &= \langle \delta u \rangle \cdot \{ f \} \\
 &\dots\dots\dots (37)
 \end{aligned}$$

したがって、式 (12)、(36) および (37) から、要素の節点力と節点変位に関する次の関係式が得られる。

$$\{ f \} = [K] \cdot \{ u \} \dots\dots (38)$$

$$[K] = [S] \cdot [G]^{-1} \cdot [S]^T \dots\dots\dots (39)$$

節点変位 $\{ u \}$ が求めれば、節点における応力値 $\{ \sigma_n \}$ は、式 (5) および式 (35) より

$$\{ \sigma_n \} = [R] \cdot [G]^{-1} \cdot [S]^T \cdot \{ u \} \dots\dots\dots (40)$$

として得られる。

次に本モデルによる、平面応力問題の解析例を図-3に示す。

図-3 (a) は、片持ばりが端部に放物線状の分布鉛直荷重を受けている場合で、たわみと応力分布について、はり理論による解と比較している。

図-3 (b) は、円盤状板の中心に集中トルクを作用させた場合である。

図-3 (c) は、円盤状板の直径の両端に、直径方向の圧縮力を作用させた場合を示している。

3. 平板曲げモデル

三角形の各頂点に設定した節点における、面外変位 w および、面内直交二軸方向の傾き w, w_x, w_y の3成分を節点変位としてとる。節点変位 $\{ u \}$ 、 $\{ u \}$ に対応する節点力 $\{ f \}$ 、また要素内のひずみ量 $\{ \epsilon \}$ 、および応力量 $\{ \sigma \}$ は図-4に示される。なお、 $w, x = \frac{\partial w}{\partial x}$ 、 \dots である。図-4において、 m_x, m_y, m_{xy} は単位長さあたりの曲げおよびねじりモーメントである。また、 M_x, M_y はそれぞれ w, x, w, y に対応するもので、右手系で M_x は $-y$ 軸回り、 M_y は x 軸回りのモーメントである*。

いま、要素内応力分布を線形に仮定すれば、要素内の

* 4. の立体解析における節点力としての曲げモーメントに関する記号は、ここに示されたものと異なるので注意してほしい。

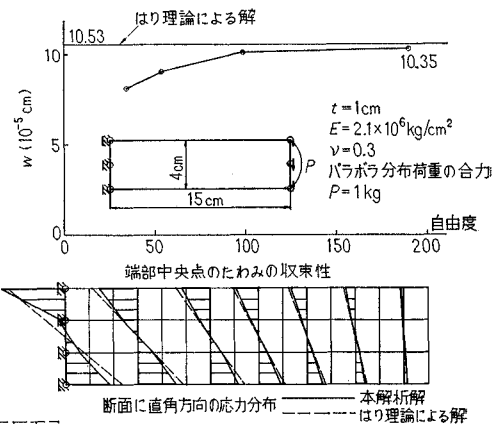


図-3 (a) 片持ばり

任意の点における応力量 $\{\sigma\}$ は、節点における対応する
 応力値

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma_n \rangle &= \langle \langle \sigma_n \rangle_1 \langle \sigma_n \rangle_2 \langle \sigma_n \rangle_3 \rangle \\ \langle \sigma_n \rangle_i &= \langle m_x \ m_y \ m_{xy} \rangle_{\text{node } i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

の関数として、次式のように表わされる。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{interior}} = [T] \cdot \{\sigma_n\} \dots\dots\dots (42)$$

ここに、 $[T]$ は式 (3) で与えられる。

相補仮想仕事の原理より、

$$\int_{A_m} \langle \delta \sigma \rangle \cdot [N] \cdot \{\sigma\} \cdot dA = \langle \delta f \rangle \cdot \{u\} \dots\dots\dots (43)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \langle f \rangle &= \langle \langle f \rangle_1 \langle f \rangle_2 \langle f \rangle_3 \rangle \\ \langle f \rangle_i &= \langle P_z \ M_x \ M_y \rangle_{\text{node } i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

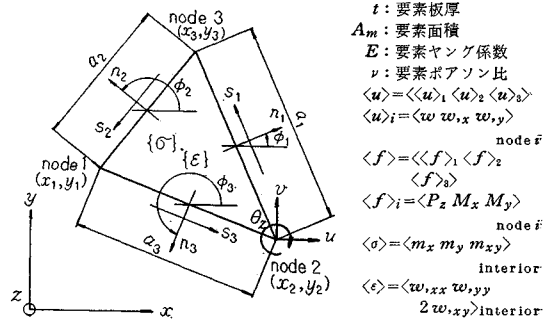


図-4 平板曲げ三角形要素

t : 要素板厚
 A_m : 要素面積
 E : 要素ヤング係数
 ν : 要素ポアソン比
 $\langle u \rangle = \langle \langle u \rangle_1 \langle u \rangle_2 \langle u \rangle_3 \rangle$
 $\langle u \rangle_i = \langle w \ w_{,x} \ w_{,y} \rangle_{\text{node } i}$
 $\langle f \rangle = \langle \langle f \rangle_1 \langle f \rangle_2 \langle f \rangle_3 \rangle$
 $\langle f \rangle_i = \langle P_z \ M_x \ M_y \rangle_{\text{node } i}$
 $\langle \sigma \rangle = \langle m_x \ m_y \ m_{xy} \rangle_{\text{interior}}$
 $\langle \epsilon \rangle = \langle w_{,xx} \ w_{,yy} \ 2w_{,xy} \rangle_{\text{interior}}$

$$\left. \begin{aligned} \langle u \rangle &= \langle \langle u \rangle_1 \langle u \rangle_2 \langle u \rangle_3 \rangle \\ \langle u \rangle_i &= \langle w \ w_{,x} \ w_{,y} \rangle_{\text{node } i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

はそれぞれ、節点力および節点変位であり、 A_m は要素面積である。 t, E, ν を要素の板厚、ヤング係数およびポアソン比とすれば、 $[N]$ は次式で与えられる。

$$[N] = \frac{12}{Et^3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (46)$$

式 (43) の右辺は、要素全周を S_m とすれば、

$$\langle \delta f \rangle \cdot \{u\} = \int_{S_m} \langle \delta f_B \rangle \cdot \{u_B\} ds \dots\dots\dots (47)$$

である。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \langle u_B \rangle &= \langle \langle u_B \rangle_1 \langle u_B \rangle_2 \langle u_B \rangle_3 \rangle \\ \langle u_B \rangle_i &= \langle w \ w_{,s} \ w_{,n} \rangle_{\text{side } i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle f_B \rangle &= \langle \langle f_B \rangle_1 \langle f_B \rangle_2 \langle f_B \rangle_3 \rangle \\ \langle f_B \rangle_i &= \langle Q_n - m_{ns} \ -m_n \rangle_{\text{side } i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

は、要素の周辺上的変位およびそれに対応する要素周辺上の力量であり、図-5 よりそれぞれ次のように与えられる。

$\{u_B\}_i$ は、要素節点変位 $\{u\}$ の関数として一義的に決

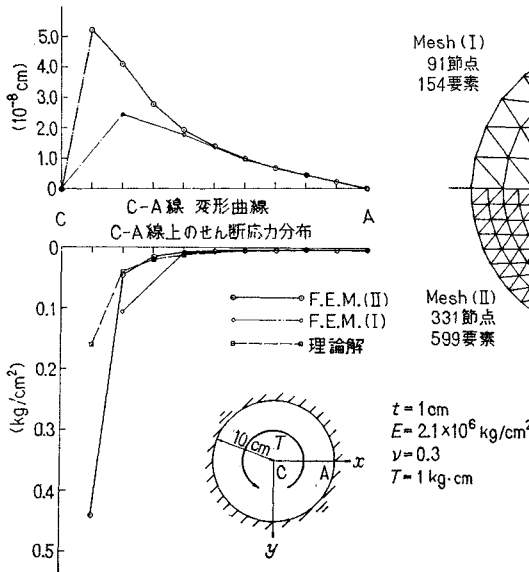


図-3 (b) 円盤のねじり

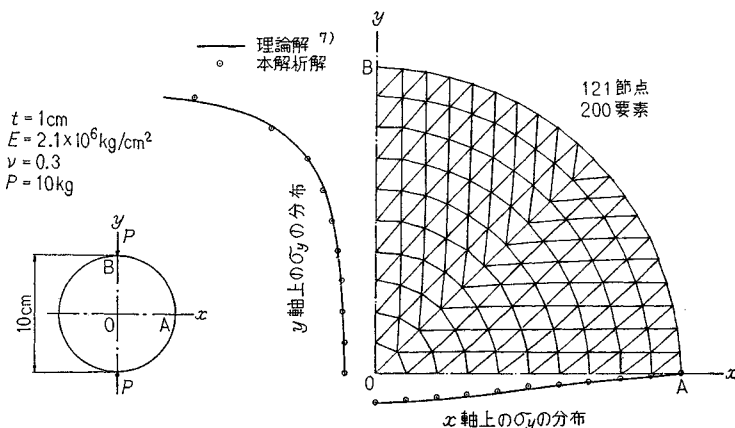
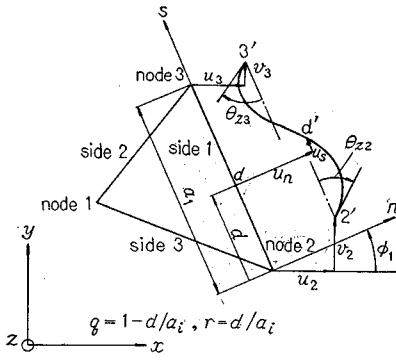


図-3 (c) 円盤の圧縮



$$\begin{aligned} \langle u_B \rangle_i &= \langle \langle u_B \rangle_1 \langle u_B \rangle_2 \langle u_B \rangle_3 \rangle \\ \langle u_B \rangle_i &= \langle w, w_s, w_n \rangle_{side\ i} \\ \langle f_B \rangle_i &= \langle \langle f_B \rangle_1 \langle f_B \rangle_2 \langle f_B \rangle_3 \rangle \\ \langle f_B \rangle_i &= \langle Q_n - m_{ns} - m_n \rangle_{side\ i} \\ c_i &= \cos \phi_i, s_i = \sin \phi_i \\ h_i &= -a_i c_i = y_j - y_k, g_i = -a_i s_i = x_k - x_j \end{aligned}$$

図-5 周辺変位と周辺力量 (平板曲げ要素)

定されるように、ここでは、 w については3次関数、 w_n については1次関数で補間する。すなわち、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} w \\ w_s \\ w_n \end{matrix} \right\}_{side\ i} &= \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 \\ 0 & 1/a & 2r/a & 3r^2/a \end{bmatrix}_{side\ i} \cdot \begin{bmatrix} w_{node\ j} \\ w_{s\ node\ j} \\ w_{node\ k} \\ w_{s\ node\ k} \end{bmatrix}_{side\ i} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/a & 2r/a & 3r^2/a \end{bmatrix}_{side\ i}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} w_{node\ j} \\ w_{s\ node\ j} \\ w_{node\ k} \\ w_{s\ node\ k} \end{bmatrix}_{side\ i} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 \\ 0 & 1/a & 2r/a & 3r^2/a \end{bmatrix}_{side\ i} \cdot \begin{bmatrix} w_{node\ j} \\ w_{s\ node\ j} \\ w_{node\ k} \\ w_{s\ node\ k} \end{bmatrix}_{side\ i} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -3 & -2a & 3 & -a \\ 2 & a & -2 & a \end{bmatrix}_{side\ i} \cdot \begin{bmatrix} w_{node\ j} \\ w_{s\ node\ j} \\ w_{node\ k} \\ w_{s\ node\ k} \end{bmatrix}_{side\ i} \\ &= \begin{bmatrix} q^2 + 2q^2r & aq^2r \\ -6qr/a & q^2 - 2qr \end{bmatrix}_{side\ i} \cdot \begin{bmatrix} w_{node\ j} \\ w_{s\ node\ j} \\ w_{node\ k} \\ w_{s\ node\ k} \end{bmatrix}_{side\ i} \\ &= \begin{bmatrix} 3r^2 - 2r^3 & -aqr^2 \\ 6qr/a & -2r + 3r^2 \end{bmatrix}_{side\ i} \cdot \begin{bmatrix} w_{node\ j} \\ w_{s\ node\ j} \\ w_{node\ k} \\ w_{s\ node\ k} \end{bmatrix}_{side\ i} \end{aligned} \tag{50}$$

$$w_{n\ side\ i} = \langle q\ r \rangle_{side\ i} \cdot \begin{bmatrix} w_{n\ node\ j} \\ w_{n\ node\ k} \end{bmatrix}$$

式 (50) の節点値に、次の座標変換

$$[Q]_i = \int_{side\ i} [L]_i^T [M]_i ds = \frac{1}{12} \times \begin{matrix} & \text{column-}i & & \text{column-}j & & \text{column-}k \\ \text{row-}j & \begin{bmatrix} -6hH_i & -6gG_i & 6aZ_i \\ -hgH_i & -g^2G_i & agZ_i \\ h^2H_i & hgG_i & -ahZ_i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6hH_j & -6gG_j & 6aZ_j \\ -6cs & +6cs & +6(c^2-s^2) \\ -hcs & +hcs & +h(c^2-s^2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6hH_k & -6gG_k & 6aZ_k \\ -6cs & +6cs & +6(c^2-s^2) \\ +2hc^2 & +2hs^2 & +4gc^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{matrix} w \\ w_s \\ w_n \end{matrix} \right\}_{side\ i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & c \\ 0 & c & s \end{bmatrix}_{side\ i} \cdot \left\{ \begin{matrix} w \\ w_x \\ w_y \end{matrix} \right\}_{side\ i} \tag{51}$$

を施せば、次式が得られる。

$$\{u_B\}_i = [L]_i \cdot \{u\} \tag{52}$$

$$[L]_i = \begin{bmatrix} \text{column-}i & & \text{column-}j & & \text{column-}k \\ \begin{bmatrix} q^2 + 2q^2r & aq^2r \\ -6qr/a & q^2 - 2qr \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} gg^2r & -hg^2r \\ 0 & cq & sq \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3r^2 - 2r^3 & -aqr^2 \\ 6qr/a & s(2r - 3r^2) \\ 0 & cr & sr \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{side\ i} \tag{53}$$

$\{f_B\}_i$ は、次式

$$\left\{ \begin{matrix} Q_n \\ -m_{ns} \\ -m_n \end{matrix} \right\}_{side\ i} = \begin{bmatrix} c \frac{\partial}{\partial x} & s \frac{\partial}{\partial y} & c \frac{\partial}{\partial y} + s \frac{\partial}{\partial x} \\ cs & -cs & -(c^2 - s^2) \\ -c^2 & -s^2 & -2cs \end{bmatrix}_{side\ i} \cdot \left\{ \begin{matrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{matrix} \right\}_{side\ i} \tag{54}$$

に、式 (42) および式 (6) を代入すれば、side i 上では $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (0, q, r)$ であるから、要素節点での応力値 $\{\sigma_n\}$ の関数として次のように表わされる。

$$\{f_B\}_i = [M]_i \cdot \{\sigma_n\} \tag{55}$$

$$[M]_i = \begin{bmatrix} \text{column-}i & & \text{column-}j & & \text{column-}k \\ \begin{bmatrix} cH_i & sG_i & cG_i + sH_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} cH_j & sG_j & cG_j + sH_j \\ csq & -csq & -(c^2 - s^2)q \\ -c^2q & -s^2q & -2csq \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} cH_k & sG_k & cG_k + sH_k \\ csr & -csr & -(c^2 - s^2)r \\ -c^2r & -s^2r & -2csr \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{side\ i} \tag{56}$$

ここに、 $G_i = g_i/2 A_m$, $H_i = h_i/2 A_m \dots$ である。したがって、式 (47) は式 (52), (55) より、

$$\langle \delta f \rangle \cdot \{u\} = \langle \delta \sigma_n \rangle \cdot [Q]^T \cdot \{u\} \tag{57}$$

と与えられる。ただし

$$[Q] = [Q]_1 + [Q]_2 + [Q]_3 \tag{58}$$

$$\begin{matrix} \text{row } k \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -6hH_i & -6gG_i & 6aZ_i & -6hH_j & -6gG_j & 6aZ_j & -6hH_k & -6gG_k & 6aZ_k \\ +6cs & -6cs & -6(c^2-s^2) & +6cs & -6cs & -6(c^2-s^2) & +6cs & -6cs & -6(c^2-s^2) \\ hgH_i & g^2G_i & -agZ_i & hgH_j & g^2G_j & -agZ_j & hgH_k & g^2G_k & -agZ_k \\ -gcs & +gcs & +g(c^2-s^2) & -gcs & +gcs & +g(c^2-s^2) & +gcs & -gcs & -g(c^2-s^2) \\ +2hc^2 & +2hs^2 & +4gc^2 & +4hc^2 & +4hs^2 & +8gc^2 & +4hc^2 & +4hs^2 & +8gc^2 \\ -h^2H_i & -hgG_i & ahZ_i & -h^2H_j & -hgG_j & ahZ_j & -h^2H_k & -hgG_k & ahZ_k \\ +hcs & -hcs & -h(c^2-s^2) & -hcs & -hcs & -h(c^2-s^2) & -hcs & +hcs & +h(c^2-s^2) \\ +2gc^2 & +2gs^2 & +4hs^2 & +4gc^2 & +4gs^2 & +8hs^2 & +4gc^2 & +4gs^2 & +8hs^2 \end{array} \right] \dots\dots (59) \\ \text{side } i \end{matrix}$$

一方、式 (43) の左辺は、

$$\int_{A_m} \langle \delta \sigma \rangle \cdot [N] \cdot \{ \sigma \} dA = \langle \delta \sigma_n \rangle \cdot [H] \cdot \{ \sigma_n \} \dots\dots (60)$$

と表わされる。ただし、

$$[H] = \int_{A_m} [T]^T [N] \cdot [T] dA \dots\dots (61)$$

である。したがって、式 (57) および式 (60) を式 (43) に代入して、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \{ \sigma_n \} &= [H]^{-1} \cdot [Q]^T \cdot \{ u \} \dots\dots (62) \end{aligned}$$

式 (62) を式 (60) に代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{A_m} \langle \delta \sigma \rangle \cdot [N] \cdot \{ \sigma \} dA &= \langle \delta u \rangle \cdot [Q] [H]^{-1} \cdot [Q]^T \cdot \{ u \} \dots\dots (63) \end{aligned}$$

したがって、式 (43)、(63) および (37) から、要素の節点力と節点変位に関する次の関係式が得られる。

$$\{ f \} = [K] \cdot \{ u \} \dots\dots (64)$$

$$\begin{aligned} [K] &= [Q] \cdot [H]^{-1} \cdot [Q]^T \dots\dots (65) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} [H]^{-1} &= \frac{3}{A_m} \cdot \begin{bmatrix} 3[D] & -[D] & -[D] \\ & 3[D] & -[D] \\ \text{SYM.} & & 3[D] \end{bmatrix} \\ [D] &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \dots\dots (66) \end{aligned}$$

である。

節点変位 $\{u\}$ が求まれば、節点における応力値 $\{\sigma_n\}$ は、

式 (62) より得られる。

次に、本モデルによる平板曲げ問題の解析例を 図-6

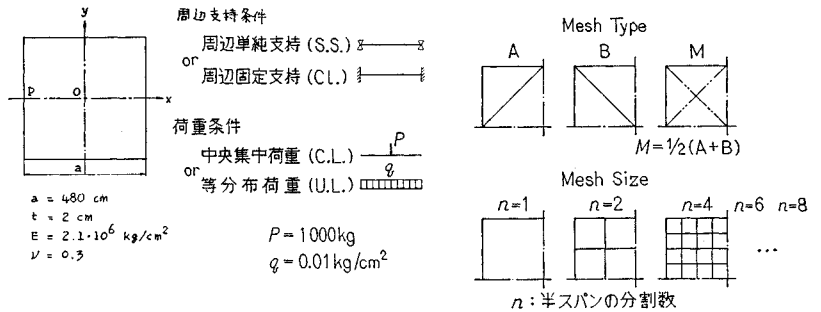


図-6 (a) 正方形板の曲げ

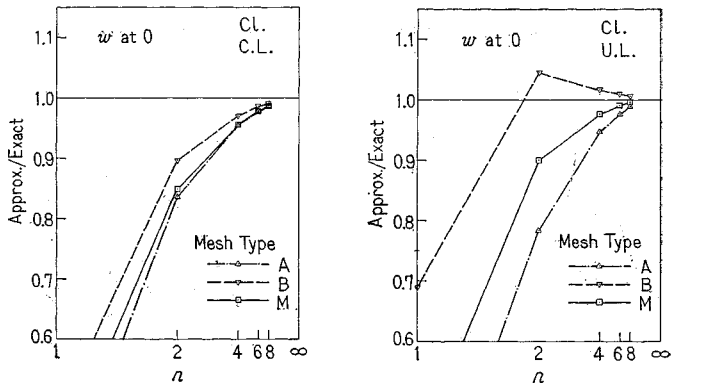
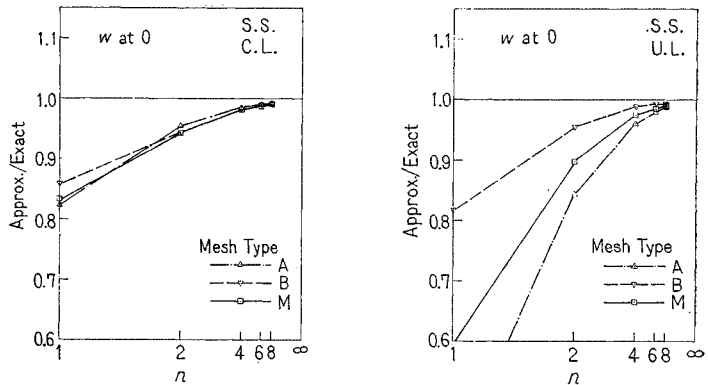


図-6 (b) 中央点 (O) のたわみ (w) の収束性

に示す。

正方形板の周辺を単純支持，または固定支持し，中点に集中荷重を作用させた場合および全面に等分布荷重を作用させた場合について解析を行なった。図-6 (b), (c), (d), (e) は，それぞれ中点のたわみ，中点の曲げモーメント，固定辺中点の曲げモーメントおよび対称軸上の曲げモーメント分布を級数解³⁾と比較して示したものである。解析は 図-6 (a) に示す各要素分割形について行なわれ，また 図-6 (b), (c), (d) は分割数に対する解の収束性を示している。

4. 立体解析

以上に誘導した平面応力モデルおよび平板曲げモデルを用いて，曲げ力と面内力とを同時に受ける立体板系の解析を行なう。立体解析における節点力 $\{f\}_i$ および節点変位 $\{u\}_i$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_i &= \langle P_x P_y P_z M_x M_y M_z \rangle_{\text{node } i} \\ \langle u \rangle_i &= \langle u v w \theta_x \theta_y \theta_z \rangle_{\text{node } i} \end{aligned} \quad \dots\dots (67)$$

ここに， θ_x, θ_y は 3. の記号によれば， $\theta_x = w_{,y}$ ， $\theta_y = -w_{,x}$ であり，また M_x, M_y は x 軸および y 軸回りの曲げモーメントであって，3. における定義とは異なる。なお 2. においては， θ_z は $-z$ 軸回りの回転であったが，立体解析においては， θ_z は $+z$ 軸回りの回転とする。

図-7, 8 に本モデルによる立体解析例を示す。図-7 は，無限円筒殻が長手方向に分布する対称線荷重を受けた場合である。図-8 は，T 形ばりの解析結果である。

なお，立体解析においては平板曲げモデルの解析例において使用した矩形要素 M を用いた (図-6 (a) 参照)。

5. 結 論

以上に，いくつかの異なった範疇に属する構造要素が一体化されて構成される立体構造の解析に適用することを目的とした，一つの穏当な薄板構造要素を，応力仮定の Hybrid 法に基づいて誘導し，その要素によって具体的な解析を行ない，その解析精度を検討した結果をまとめた。特に平面応力要素の誘導に際しては，応力仮定の Hybrid 法の利点を最大限に利用している。

ここで，特に注意しなければならないのは，得られた剛

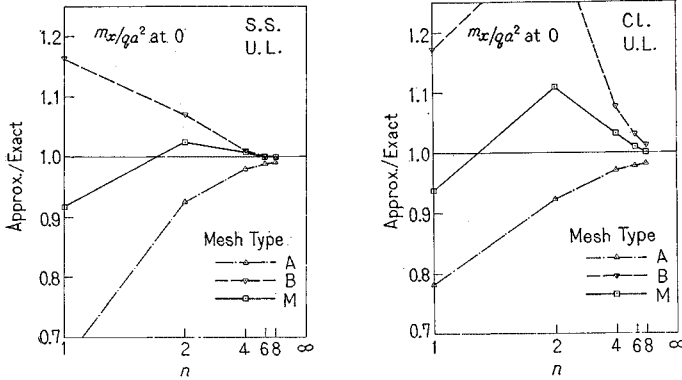


図-6 (c) 中央点 (O) の曲げモーメント $\left(\frac{m_x}{qa^2}\right)$ の収束性

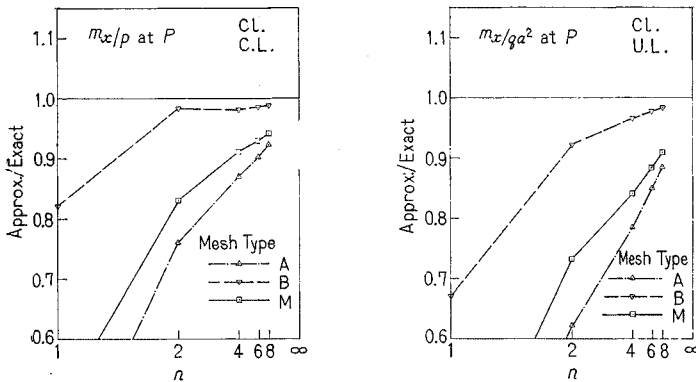


図-6 (d) 端部中点 (P) の曲げモーメント $\left(\frac{m_x}{P}, \frac{m_y}{qa^2}\right)$ の収束性

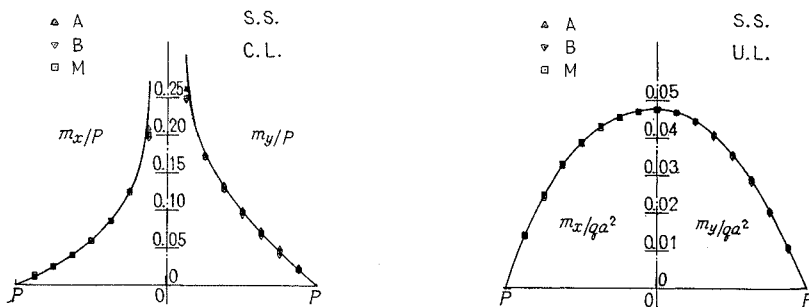


図-6 (e) x 軸上の曲げモーメント分布 ($n=8$)

性マトリックスに関する節点力の物理的意義についてである。すなわち、節点力は、要素内に仮定された応力分布から必然的に与えられる要素周辺の応力分布の、要素周辺に仮定される変位分布を重み関数とした、積分の結果として節点に与えられる、等価な力を意味しているということである。したがって、たとえば、平面応力要素における面内の回転変位に対応する節点力としての面内モーメントは、いわゆる、節点における集中モーメントを意味しているのではなく、周辺の応力分布を等価に評価するための見かけ上の力量を意味しているのであり、その節点の影響下にある周囲の要素の大きさに関連してくる力量である。もっとも、1次元的に理想化された棒構造要素における節点力としての力量も、その部材の断面積全体に分布する力量を集約した意味で評価しているのであるから、平板構造要素を、ここに示したように、節点変位として面内の回転変位を含んだ形で誘導することによって、たとえば、柱で支持された平板の解析の場合に、棒構造要素の一つの節点が接続すべき平板部分構造の一つの節点の周囲の要素分割を、棒要素の有効断面積との対応において、ねじりモーメントの伝達を、実構造物と等価に評価するように決めることが可能である。また変位仮定に基づいて誘導される要素では、得られる応力値の要素間の差が非常に大きくなる場合が多く、応力評価をどのように行なうかということが、有限要素解析における一つの大きな課題となっているが、ここに誘導した要素においては、得られる応力値が比較的なめらかで、この点も一つの大きな特徴であると考えている。

6. おわりに

本研究を遂行するにあたって、東京大学生産技術研究所の久保慶三郎教授から、絶大なご支援を受けたことをしるし、感謝の意を表する次第である。また、本研究に関連した「補剛リブや柱など一体となった薄板構造の立体的解析法に関する研究」に対して、昭

和 47 年度の科学研究費補助金の交付が決定し、これまでに理論解が与えられていない、種々の立体構造の解析と解析精度の検証のための模型構造試験を実行することが可能となった。現在、桁と床版とを一体とした合成床

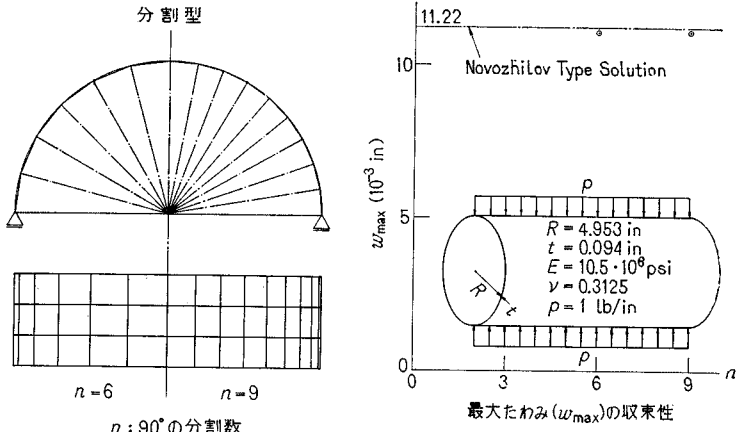


図-7 (a) 無限円筒殻

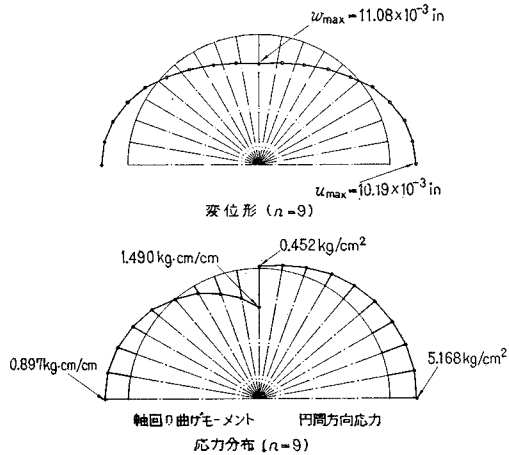


図-7 (b) 無限円筒殻の変位および応力

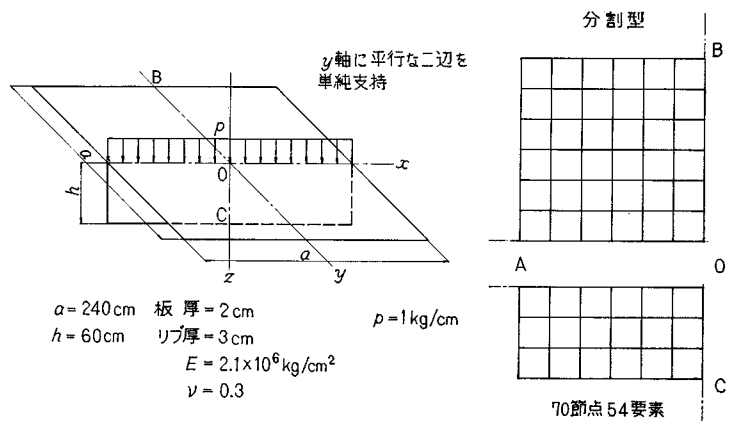


図-8 (a) T 型ばり

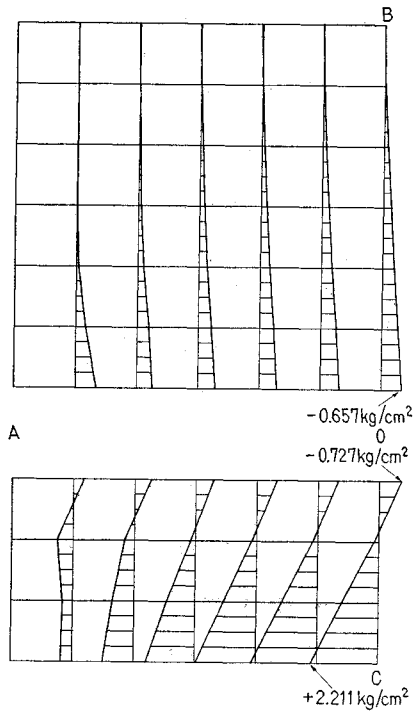


図-8 (b) T型ばりの応力分布 (σ_x)

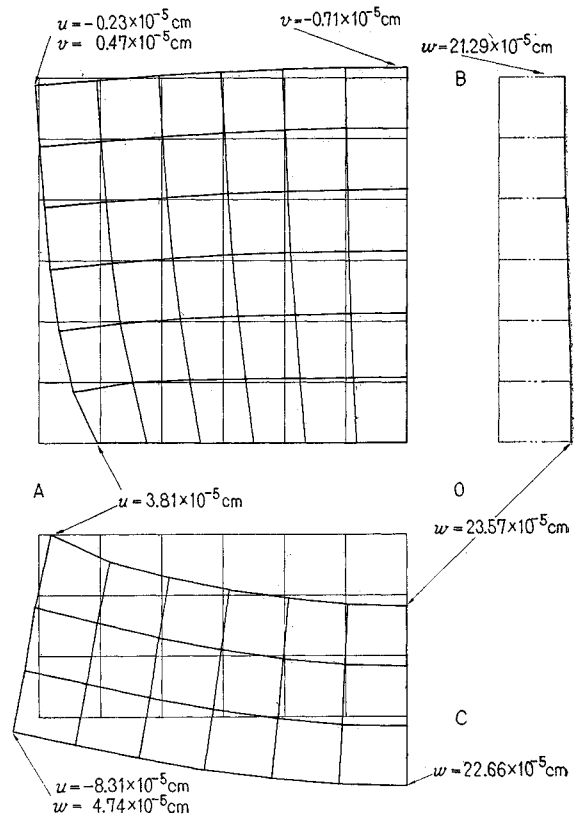


図-8 (c) T型ばりの変位形

版構造の問題、柱群で剛に支持された床版の問題、柱・はり構造と耐震壁とが一体として構成される構造の問題、補剛リブで補強された殻構造の問題などの個々の立体構造の静的および動的な構造特性を明らかにするために、解析と立体構造モデルによる測定を発展的に継続している。

参考文献

- 1) Tocher, J. L. and B. J. Hartz, : Higher-Order Finite Element for Plane Stress, Proc. ASCE, Vol. 93, EM 4, 1967, pp. 149-172.
- 2) Maclead, I. A. : New Rectangular Finite Element for Shear Wall Analysis, Proc. ASCE, Vol. 95, ST 3, 1969, pp. 399-409.
- 3) Clough, R. W. and C. P. Johnson, : A Finite Element Approximation for the Analysis of Thin Shells, J.

Solids & Structure, Vol. 4, 1968, pp. 43-60.

- 4) Zienkiewicz, O. C., C. J. Parekh and I. P. King : Arch Dams Analysed by a Linear Finite Element Shell Solution Program, Proc. Symp. Arch Dams, Inst. Civ. Eng., London, 1968.
- 5) Yoshida, Y. : Equivalent Finite Elements on Different Bases, Proc. 2nd U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, 1972, pp. 133-149.
- 6) Pian, T.H.H. : Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution, AIAA Journal Vol. 2, 1964, pp. 1333-1336.
- 7) Timoshenko, S. and J.N. Goodier, : Theory of Elasticity, McGRAW-HILL.
- 8) Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, McGRAW-HILL.

(1972.10.16・受付)