

# 光弾性実験による直交異方性二次元問題の内部応力解析法

## THE METHOD OF INTERNAL STRESS ANALYSIS OF TWO DIMENSIONAL ORTHOTROPIC PROBLEMS BY PHOTO-ELASTIC EXPERIMENT

安井 将文\*

By Masabumi Yasui

### 1. ま え が き

直交異方性板に関する研究には、第一に、最も正統的な方法である応用数学的方法がある。この方法は、物体の満足すべきつりあい条件式、ひずみの適合条件式、直交異方性板としての弾性法則、以上の3個の条件式から満足すべき微分方程式を応力関数について立て、所定の境界条件を満足する複素解析関数を求めて解く方法<sup>1)~5)</sup>である。この解析例として、たとえば、G.N. Sawin の各種の形状をした孔の回りの応力集中問題に関する一連の研究<sup>6)</sup>、G. Sonntag の孔の存在の岩におよぼす異方性の影響に関する研究<sup>7)</sup>、川本の異方性弾性地山における素掘り円形トンネルの変形に関する研究<sup>7)</sup>ならびに、直交異方性弾性岩盤中のトンネルにおける応力集中問題<sup>8)</sup>、また、丹羽・平島の異方性弾性地山に開削した水平坑道周辺の重力による応力状態の研究<sup>9)</sup>、丹羽・小林・平島らの3次元直交異方性弾性岩盤内の円形坑道周辺の応力および変形に関する研究<sup>10)</sup>、また、久保の2だ円孔を含む直交異方性無限板の応力解析<sup>11)</sup>などが報告されている。しかしながら、この微分方程式は、材料の弾性特性により支配される同次4階の微分方程式であり、解を求めるのに煩雑をきわめる。近年、急速に発展して来た変分原理に基礎を置く有限要素法<sup>12), 13), 14), 15)</sup>は、直交異方性板を解く近似解法として有力な手段を提供する。しかしながら、この方法による場合には、要素の分割の方法、また節点数の大きさにより、応力状態がかなり変動することを筆者は経験しており、また FEM 解析者の一様に認める所と思われる。その解析には、多年の経験と正確な判断が要求されることになる。したがって、実験により直交異方性板の応力分布を決定できれば、直交異方性板の応力解析に対して大きな手段が得られることになろう。

直交異方性板を対象とした既存の光弾性実験法としては、林毅のリゴラック樹脂とガラス布を組み合わせた FRP 板 (Fiber-Reinforced-Plastic) を使用する2次元光弾性実験による周辺応力の解析例<sup>16)</sup>と、丹羽・川本の直交異方性板にエポキシラバーを接着する光弾性皮膜法による周辺応力解析例<sup>17)</sup>などが報告されている。

既報<sup>18), 19)</sup>のごとく、筆者は、既存の直交異方性板を対象とした光弾性実験法の精度を向上させる目的で、全く独自の立場から、直交異方性板の光弾性実験に適合する材料の製作を試みるとともに、その応用を目的として各種の光弾性実験を行ない、周辺応力の解析を行なった結果、応力凍結用サンドウィッチ板が光弾性実験用直交異方性板としての適性を十分に有することが認められた。本論文においては、さらに応力凍結サンドウィッチ法に Drucker の傾斜入射法<sup>20)</sup>を併用することにより直交異方性板の内部応力を解析する方法を提案したものである。以下にその概要について述べる。

光弾性実験による直交異方性板の周辺応力の解析については、林毅の方法によって確立されている。しかしながら内部応力の解析は、未開発の分野として残されている。筆者の使用した材料においては、ナイロン繊維により補強された直交異方性板のひずみ状態が等方性体である中間層に凍結されるため、ナイロン繊維と中間層のエポキシ樹脂のヤング率が相違することによりスライスされた試験片の表面に3次元的なせん断応力が発生するから、中間層からスライスされた試験片の表面でせん断応力の値が決定できなければ、内部応力の解析にせん断応力差積分法の使用が困難と思われる。このため筆者は、

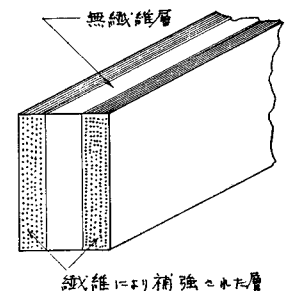


図-1 サンドウィッチ板の断面図

\* 正会員 工博 明星大学専任講師 理工学部土木工学科

内部応力の解析法として、応力凍結サンドウィッチ法に Drucker の傾斜入射法を併用する方法を採用した。応力凍結サンドウィッチ法においては、材料がナイロン繊維とエポキシ樹脂の組み合わせられた層と、エポキシ樹脂のみの層（中間層）からできているため、等方性体であるエポキシ樹脂のみの中間層を薄くして得られる試験片は均質であり、その応力状態は近似的に2次元応力状態と考えられるから、Drucker の傾斜入射法を適用するに適していると考えられる。本方法によれば解析する点の垂直入射等色線縞次数と傾斜入射縞次数、および主ひずみの方向の3個の資料から異方性主ひずみの近似値を直接得ることができる。この解析の妥当性を追求するため、はりの純曲げ実験、円盤の圧縮実験、双設円孔の周辺応力解析のために行なわれた実験資料<sup>19)</sup>により内部応力の解析を行ない理論値または6節点3角形要素を用いた FEM 値と比較を試みた。

## 2. 光弾性実験による直交異方性板の内部応力解析法

### (1) 直交異方性板の弾性法則

図-2を参照して、直交異方性板の弾性対称軸 1, 2 に関する弾性法則は、平面応力状態を考えれば、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 = \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 \\ \epsilon_2 &= c_{12}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 + \frac{1}{E_2}\sigma_2 \\ \tau_{12} &= c_{66}\tau_{12} = \frac{1}{G_{12}}\tau_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ただし、

- $E_1, E_2$  : 各弾性対称軸 1, 2 に関するヤング率
- $\nu_{12}, \nu_{21}$  : 各弾性対称軸 1, 2 に関するポアソン比
- $G_{12}$  : 1, 2 軸に関するせん断弾性係数

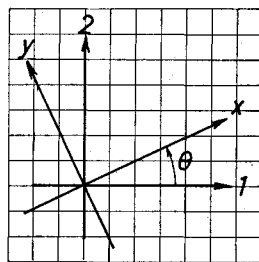


図-2 弾性対称軸 1, 2 と x, y 軸との関係

また、直交異方性板の弾性対称軸 1, 2 と任意の角  $\theta$  をなす直角座標軸  $x, y$  に関する直交異方性板の弾性法則は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= c_{11}'\sigma_x + c_{12}'\sigma_y + c_{16}'\tau_{xy} \\ \epsilon_y &= c_{12}'\sigma_x + c_{22}'\sigma_y + c_{26}'\tau_{xy} \\ \tau_{xy} &= c_{16}'\sigma_x + c_{26}'\sigma_y + c_{66}'\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} c_{11}' &= c_{11} \cos^4 \theta + c_{22} \sin^4 \theta + (2c_{12} + c_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ c_{22}' &= c_{11} \sin^4 \theta + c_{22} \cos^4 \theta + (2c_{12} + c_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ c_{66}' &= c_{66} + 4(c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - c_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ c_{12}' &= c_{12} + (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - c_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ c_{16}' &= 2(c_{22} \sin^2 \theta - c_{11} \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ &\quad + (2c_{12} + c_{66}) \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ c_{26}' &= 2(c_{22} \cos^2 \theta - c_{11} \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ &\quad - 2(c_{12} + c_{66}) \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

### (2) 応力凍結サンドウィッチ法に Drucker の傾斜入射法を併用する直交異方性板の内部応力解析法

筆者の提案した応力凍結サンドウィッチ法によれば、ナイロン繊維により補強された直交異方性板の変形が等方性体である中間層に凍結される。しかしながら、凍結後にスライスされた試験片の応力状態は、厳密には2次元応力状態でない。これは、繊維により補強された両外

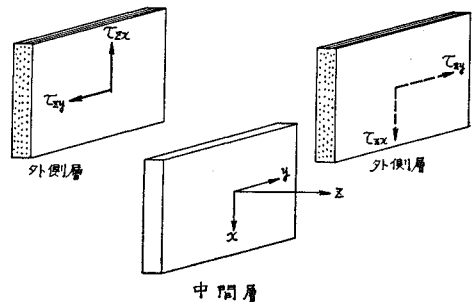


図-3 凍結後のサンドウィッチ板の3層の状態

側層と中間層の弾性的性質が相違することによるわけで、図-3を参照して、試験片の境界面には3次元的なせん断応力  $\tau_{zx}, \tau_{zy}$  が存在すると考えなければならないことによる。2次元光弾性実験法のせん断応力差積分法では、つりあい方程式から

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{x=x_0} - \int_{x_0}^x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot dx$$

$\sigma_x$  を計算すればよいが、応力凍結サンドウィッチ法では試験片の表面に作用する  $\tau_{zx}, \tau_{yz}$  を無視できないから、つりあい方程式は、

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{x=x_0} - \int_{x_0}^x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot dx - \int_{x_0}^x \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \cdot dx$$

となり、 $\tau_{zx}, \tau_{zy}$  が明らかでなければ、せん断応力差積分法の適用は誤差が大きくなり困難と思われる。

したがって、本論文の場合は、直交異方性板の内部応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  を以下のように決定する。すなわち、垂直入射等色線縞次数と Drucker の傾斜入射法 (Drucker's oblique-incidence method) による傾斜入射等色線縞次数を用いて異方性主ひずみ差 ( $\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}$ ) と異方

性主ひずみ ( $\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa}$ ) の値を定め、各異方性主ひずみ  $\epsilon_{pa}, \epsilon_{qa}$  を求め、これら異方性主ひずみから異方性応力を定める方法である。本方法によれば、未知な  $\tau_{yz}, \tau_{zx}$  を考慮に入れず、異方性内部応力を近似的に決定できる。

図-4 を参照して、直交異方性板の応力解析断面 A-A' を  $x$  方向とする直交デカルト座標系  $x, y, z$  を考える。いまその断面 A-A' 上の任意の点 O での直交異方性板の  $x, y$  面に関するひずみ成分を  $\epsilon_{xa}, \epsilon_{ya}, \gamma_{xya}$  とする。 $z$  軸を光線入射方向とした 図-4 主ひずみの方向と  $x, y$  軸の関係場合、 $x, y$  面に関する光弾性法則は次のように表わされる。すなわち、垂直入射による光弾性等色線縞次数は、 $x, y$  面に関する 2 次主ひずみ差 (または主応力差) に比例し、その関係は、次式で与えられる。

$$N_{\varphi=0^{\circ}} = \alpha_h \cdot t_s \cdot |\sigma_{pa} - \sigma_{qa}| = \alpha_h \cdot t_s \cdot \left| \frac{E_e}{1 - \nu_e} \{ (\epsilon_{pa} + \nu_e \epsilon_{qa}) - (\nu_e \epsilon_{pa} + \epsilon_{qa}) \} \right|$$

$$= \left( \frac{E_e}{1 + \nu_e} \cdot \alpha_h \right) \cdot t_s |\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}|$$

$$= \beta_h \cdot t_s |\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}| \quad \dots \dots \dots (4)$$

ただし、

- $N_{\varphi=0^{\circ}}$ : 垂直入射の等色線縞次数
- $t_s, \alpha_h, \beta_h$ : 垂直入射の光路程とエポキシ樹脂のゴム状弾性域における応力感度とひずみ感度
- $\sigma_{pa}, \sigma_{qa}, \epsilon_{pa}, \epsilon_{qa}$ : 点 O における  $x, y$  面内の異方性主応力と主ひずみ
- $\nu_e, E_e$ : 材料のゴム状弾性域におけるポアソン比とヤング率

次にひずみの凍結された試験片を光線入射方向に対して回転した場合の光弾性法則について述べる。図-4 において、A-A' ( $x$  軸) を回転軸として、試験片を  $\varphi$  だけ

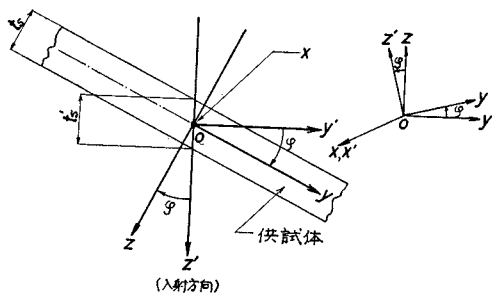


図-5 光軸と試験片との関係

時計方向に回転した場合における板に固定された座標軸  $x, y, z$  と、光線入射方向を  $z'$  とする直角座標系  $x', y', z'$  の関係を図-5 に示す。3 次元光弾性実験の場合における光弾性法則は、等色線縞次数が光線入射方向に垂直な面を平面応力面とした場合の 2 次主ひずみ差に比例するから、図-5 を参照して、板を回転した状態では傾斜入射の等色線縞次数  $N_{\varphi}$  は、 $x'y'$  面に関する 2 次主ひずみ差 ( $\epsilon_{pa}' - \epsilon_{qa}'$ ) に比例する。したがって、光弾性法則は、次式で与えられる。

$$N_{\varphi} = t_s' \cdot \beta_h \cdot |\epsilon_{pa}' - \epsilon_{qa}'| \quad \dots \dots \dots (5)$$

ただし、 $t_s'$  は、図-5 の場合の光路程で、 $t_s' = t_s / \cos \varphi$  である。また、 $x'y'$  面の 2 次主ひずみ差 ( $\epsilon_{pa}' - \epsilon_{qa}'$ ) は、 $x'y'$  面内のひずみ成分  $\epsilon_{x'a}, \epsilon_{y'a}, \gamma_{x'y'a}$  を用いて次のように表わされる。

$$\epsilon_{pa}' - \epsilon_{qa}' = \{ (\epsilon_{x'a} - \epsilon_{y'a})^2 + \gamma_{x'y'a}^2 \}^{1/2} \quad \dots \dots \dots (6)$$

さらに、図-5 の座標軸の間には表-1 の関係が存在す

表-1  $x, y, z$  軸と  $x', y', z'$  軸の関係

	$x$	$y$	$z$
$x'$	1	0	0
$y'$	0	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
$z'$	0	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$

るので、両座標軸間のひずみ成分には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x'a} &= \epsilon_{xa} \\ \epsilon_{y'a} &= \epsilon_{ya} \cos^2 \varphi + \epsilon_{za} \sin^2 \varphi \\ \gamma_{x'y'a} &= \gamma_{xya} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

式 (7) を式 (6) に代入し、さらに式 (6) を式 (5) に代入すれば、次式が得られる。

$$N_{\varphi} = \frac{t_s}{\cos \varphi} \cdot \beta_h \{ [\epsilon_{xa} - \epsilon_{ya} \cos^2 \varphi - \epsilon_{za} \sin^2 \varphi]^2 + \gamma_{xya}^2 \cos^2 \varphi \}^{1/2} \quad \dots \dots \dots (8)$$

また中間層では、近似的に 2 次元応力の状態が成立し、 $\sigma_z$  が小さいはずであるから、これを無視すれば、次式が成立する。

$$\epsilon_{za} = -\frac{\nu_e}{1 - \nu_e} (\epsilon_{xa} + \epsilon_{ya}) \quad \dots \dots \dots (9)$$

注1) 式 (4) と同様に、主応力差を主ひずみ差に置き換えた式

注2) ひずみテンソルの主値  $\epsilon_{pa}, \epsilon_{qa}$  は、

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{x'a} - \epsilon & \frac{1}{2} \gamma_{x'y'a} \\ \frac{1}{2} \gamma_{x'y'a} & \epsilon_{y'a} - \epsilon \end{vmatrix} = 0 \quad \text{より}$$

$$\epsilon_{pa}, \epsilon_{qa} = \frac{1}{2} (\epsilon_{x'a} + \epsilon_{y'a}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_{x'a} - \epsilon_{y'a})^2 + \gamma_{x'y'a}^2}$$

$$\therefore \epsilon_{pa} - \epsilon_{qa} = \sqrt{(\epsilon_{x'a} - \epsilon_{y'a})^2 + \gamma_{x'y'a}^2}$$

注3) “土木技術者のための岩盤力学”, 土木学会編, p. 161 の式 (5.1.15) を参照。

注4) “材料力学 (上巻)”, 鶴戸口・川田・倉西著, p. 75 の式 (2.70) 式において  $\sigma_z = 0$  とする。

ただし  $\nu_e$  は 130°C 付近のエポキシ樹脂のポアソン比である。さらに図-4を参照すれば、 $xy$  座標軸に関するひずみ成分  $\epsilon_{xa}, \epsilon_{ya}, \tau_{xya}$  と主ひずみ  $\epsilon_{pa}, \epsilon_{qa}$  との間には次の関係が存在する。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xa} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}) \cdot \cos 2\alpha \\ \epsilon_{ya} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}) \cdot \cos 2\alpha \\ \tau_{xya} &= (\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}) \cdot \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式 (9), (10) を式 (8) に代入すれば、次式が得られる。

$$N_\varphi = \frac{t_s}{\cos \varphi} \cdot \beta_h \left\{ \left[ \frac{1}{2}(\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa}) \left( 1 + \frac{2\nu_e}{1-\nu_e} \right) \cdot \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}(\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}) \cos 2\alpha (1 + \cos^2 \varphi) \right]^2 + (\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa})^2 \sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \varphi \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) は、点 O の傾斜入射縞次数  $N_\varphi$  が異方性主ひずみ差  $(\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa})$  と異方性主ひずみ和  $(\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa})$ 、さらに主ひずみ  $\epsilon_{pa}$  の方向と  $y$  軸のなす角  $\alpha$ 、また試験片の回転角  $\varphi$  によって与えられることを示している。したがって、垂直入射実験から異方性主ひずみ差  $(\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa})$  を式 (4) により求め、 $\alpha$  の正負を経験的に決定し、さらに傾斜入射実験から試験片の回転角  $\varphi$  と傾斜入射縞次数  $N_\varphi$  を求めれば、点 O の主ひずみ和  $(\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa})$  を式 (11) から定めることができる。異方性主ひずみ差と異方性主ひずみ和から、各異方性主ひずみ  $\epsilon_{pa}, \epsilon_{qa}$  を求めることができ、これら異方性主ひずみから次のようにして、異方性内部応力を決定することができる。

a) 断面 A-A' について応力の対称性が存在する場合  
この場合には図-4を参照して、応力の対称性条件から  $\alpha$  は、 $0^\circ$  か  $90^\circ$  のいずれかであり、式 (11) は簡単に次式となる。

$$N_\varphi = \frac{t_s}{\cos \varphi} \cdot \beta_h \left\{ \frac{1}{2}(\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa}) \left( 1 + \frac{2\nu_e}{1-\nu_e} \right) \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}(\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}) \cdot \cos 2\alpha (1 + \cos^2 \varphi) \right\} \dots\dots\dots (12)$$

したがって、

$$\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{2\nu_e}{1-\nu_e} \right) \cdot \sin^2 \varphi} \left\{ \frac{2 \cos \varphi \cdot N_\varphi}{t_s \cdot \beta_h} + (\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa}) \cos 2\alpha (1 + \cos^2 \varphi) \right\} \dots\dots\dots (13)$$

垂直入射実験から主ひずみ差  $(\epsilon_{pa} - \epsilon_{qa})$  を求め、 $\alpha$  が  $0^\circ$  か  $90^\circ$  かは経験的に  $\epsilon_{pa}$  の方向を定めることにより

決定し、傾斜入射実験から試験片の回転角  $\varphi$  と傾斜入射縞次数  $N_\varphi$  を求めれば、点 O の主ひずみ和  $(\epsilon_{pa} + \epsilon_{qa})$  を式 (13) により決定することができる。この場合、点 O における直交異方性板の応力  $\sigma_{pa}, \sigma_{qa}$  は、図-6 (a) ~ (d) における弾性主軸 1, 2 方向と主ひずみ方向  $p, q$

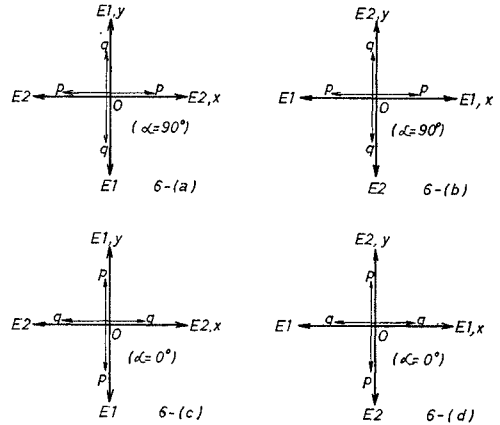


図-6  $x, y$  軸と主ひずみおよび 1, 2 軸との関係 (1)

との関係から具体的に次の 4 つの場合に分けられるが、そのいずれを採用すべきかは、主ひずみの方向と弾性主軸の方向との重なり方から定まる。

(a) の場合 ( $\alpha = 90^\circ$ )

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{pa} &= c_{22} \cdot \sigma_{pa} + c_{12} \cdot \sigma_{qa} = \frac{1}{E_2} \cdot \sigma_{pa} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \cdot \sigma_{qa} \\ \epsilon_{qa} &= c_{12} \cdot \sigma_{pa} + c_{11} \cdot \sigma_{qa} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \cdot \sigma_{pa} + \frac{1}{E_1} \cdot \sigma_{qa} \end{aligned} \right\}$$

上式を  $\sigma_{pa}, \sigma_{qa}$  について解けば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{pa} = \sigma_{xa} &= \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \{ c_{11} \cdot \epsilon_{pa} - c_{12} \cdot \epsilon_{qa} \} \\ \sigma_{qa} = \sigma_{ya} &= \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \{ -c_{12} \cdot \epsilon_{pa} + c_{22} \cdot \epsilon_{qa} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

(b) の場合 ( $\alpha = 90^\circ$ )

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{pa} &= c_{11} \cdot \sigma_{pa} + c_{12} \cdot \sigma_{qa} = \frac{1}{E_1} \cdot \sigma_{pa} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \cdot \sigma_{qa} \\ \epsilon_{qa} &= c_{12} \cdot \sigma_{pa} + c_{22} \cdot \sigma_{qa} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \cdot \sigma_{pa} + \frac{1}{E_2} \cdot \sigma_{qa} \end{aligned} \right\}$$

上式を  $\sigma_{pa}, \sigma_{qa}$  について解けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{pa} = \sigma_{xa} &= \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \{ c_{22} \cdot \epsilon_{pa} - c_{12} \cdot \epsilon_{qa} \} \\ \sigma_{qa} = \sigma_{ya} &= \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \{ -c_{12} \cdot \epsilon_{pa} + c_{11} \cdot \epsilon_{qa} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

(c) の場合 ( $\alpha = 0^\circ$ )

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{pa} &= c_{11} \cdot \sigma_{pa} + c_{12} \cdot \sigma_{qa} = \frac{1}{E_1} \cdot \sigma_{pa} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \cdot \sigma_{qa} \\ \epsilon_{qa} &= c_{12} \cdot \sigma_{pa} + c_{22} \cdot \sigma_{qa} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \cdot \sigma_{pa} + \frac{1}{E_2} \cdot \sigma_{qa} \end{aligned} \right\}$$

上式を  $\sigma_{pa}, \sigma_{qa}$  について解けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{pa} = \sigma_{ya} &= \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \{ c_{22} \cdot \epsilon_{pa} - c_{12} \cdot \epsilon_{qa} \} \\ \sigma_{qa} = \sigma_{xa} &= \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \{ -c_{12} \cdot \epsilon_{pa} + c_{11} \cdot \epsilon_{qa} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(d) の場合 ( $\alpha=0^\circ$ )

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{pa} &= c_{22} \cdot \sigma_{pa} + c_{12} \cdot \sigma_{qa} = \frac{1}{E_2} \sigma_{pa} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \cdot \sigma_{qa} \\ \epsilon_{qa} &= c_{12} \cdot \sigma_{pa} + c_{11} \cdot \sigma_{qa} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{pa} + \frac{1}{E_1} \cdot \sigma_{qa} \end{aligned} \right\}$$

上式を  $\sigma_{pa}, \sigma_{qa}$  について解けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{pa} = \sigma_{ya} &= \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \{ c_{11} \cdot \epsilon_{pa} - c_{12} \cdot \epsilon_{qa} \} \\ \sigma_{qa} = \sigma_{xa} &= \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \{ -c_{12} \cdot \epsilon_{pa} + c_{22} \cdot \epsilon_{qa} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

b) 断面 A-A' について応力の対称性が存在しない場合

すでに求められた異方性主ひずみ  $\epsilon_{pa}, \epsilon_{qa}$  から断面

A-A' 上の点 O に

おける直交異方性

板の応力成分  $\sigma_{xa},$

$\sigma_{ya}, \tau_{xya}$  は 図-7

を参照して次のよ

うに決定できる。

異方性主ひずみ

$\epsilon_{pa}, \epsilon_{qa}$  からまず

異方性ひずみ成分

$\epsilon_{xa}, \epsilon_{ya}, \tau_{xya}$  を

式 (10) から求める。また 図-7 において、1, 2 軸を弾性対称軸とする直交異方性板の  $x, y$  軸に関する応力とひずみ成分の関係式を式 (2) に添字  $\alpha$  を付して書きなおせば、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xa} &= c_{11}' \cdot \sigma_{xa} + c_{12}' \cdot \sigma_{ya} + c_{16}' \cdot \tau_{xya} \\ \epsilon_{ya} &= c_{12}' \cdot \sigma_{xa} + c_{22}' \cdot \sigma_{ya} + c_{26}' \cdot \tau_{xya} \\ \tau_{xya} &= c_{16}' \cdot \sigma_{xa} + c_{26}' \cdot \sigma_{ya} + c_{66}' \cdot \tau_{xya} \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

ここに  $c_{ij}'$  は、図-7 における弾性対称軸 1 と  $x$  軸のなす角  $\theta$  により定まる定数である。上式にすでに決定された  $\epsilon_{xa}, \epsilon_{ya}, \tau_{xya}$  を代入して応力成分について解けば、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xa} &= a_{11}' \cdot \epsilon_{xa} + a_{12}' \cdot \epsilon_{ya} + a_{16}' \cdot \tau_{xya} \\ \sigma_{ya} &= a_{12}' \cdot \epsilon_{xa} + a_{22}' \cdot \epsilon_{ya} + a_{26}' \cdot \tau_{xya} \\ \tau_{xya} &= a_{16}' \cdot \epsilon_{xa} + a_{26}' \cdot \epsilon_{ya} + a_{66}' \cdot \tau_{xya} \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

なお、後に行なう内部応力解析の実験において、弾性対称軸 1 と断面 A-A' ( $x$  軸) が 図-8 の関係にある場合には、式 (18) と式 (19) は、具体的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xa} &= 0.003794 \sigma_{xa} - 0.0015818 \sigma_{ya} \\ &+ 0.0016844 \tau_{xya} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ya} &= -0.0015818 \sigma_{xa} + 0.003794 \sigma_{ya} \\ &+ 0.0016844 \tau_{xya} \\ \tau_{xya} &= 0.0016844 \sigma_{xa} + 0.0016844 \sigma_{ya} \\ &+ 0.0065361 \tau_{xya} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xa} &= 465 \epsilon_{xa} + 279 \epsilon_{ya} \\ &- 192 \tau_{xya} \\ \sigma_{ya} &= 279 \epsilon_{xa} + 465 \epsilon_{ya} \\ &- 192 \tau_{xya} \\ \tau_{xya} &= -192 \epsilon_{xa} - 192 \epsilon_{ya} \\ &+ 252 \tau_{xya} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $E_1=947 \text{ kg/cm}^2,$   
 $E_2=226 \text{ kg/cm}^2,$   
 $G_{12}=93 \text{ kg/cm}^2, \nu_{12}=0.5, \nu_{21}=0.119$

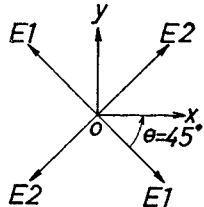


図-8  $\theta=45^\circ$  の場合

### 3. 実験例

#### (1) はりの純曲げ実験

Drucker の傾斜入射法を応力凍結サンドウィッチ法に併用し、直交異方性板の内部応力解析を試みた。まずその方法の適性を調査するため実験として基本的であり、しかも理論値の既知である純曲げを受けるはりの実験を行ない、理論値と比較した。この場合の直応力は、等方性板の場合とまったく同一であり、ひずみ分布が相違するだけである。

実験に使用した試験片の寸法と荷重条件を 図-9 と表-2 に示す。

前述のごとく、ひずみの凍結された試験片は、厳密には 2 次元応力状態でなく、傾斜入射を使用する実験においては 3 次元的な応力による影響がわずかとはいえ等色線縞に出るものと考えられる。このため、傾斜入射によ

表-2 純曲げ試験片の寸法と荷重条件

試験片番号	$\theta$	荷重・P (kg)	モーメント・M (kg·cm)	はり高・H (cm)	板厚・T (cm)	スライス厚・ $t_s$ (cm)
1	90°	3.0	15.0	1.945	1.520	0.365
2	45°	1.5	9.0	2.015	1.615	0.385
3	0°	1.5	9.0	2.000	1.530	0.280

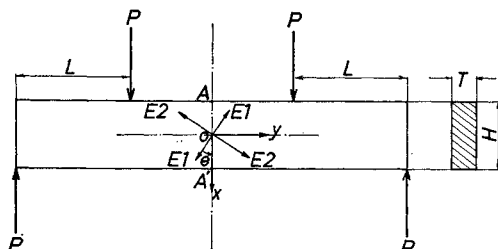


図-9 純曲げ試験片と座標軸の取り方

る実験においては、一般に傾斜角が大きくなるにつれて等色線縞模様不鮮明になり、光弾性実験から2次元応力を解析するのに誤差の発生する原因となる。この影響をできる限り少なくすべきことは明らかで、筆者は、その方法として、傾斜入射の際に、入射の角度 $\varphi$ を次第に大きくし、縞模様が鮮明な限界を定めて、3次元応力による影響をできるだけ少なくするよう心掛けた。 $\theta=90^\circ$ のはりについては $\varphi=45^\circ$ とし、 $\theta=0^\circ, 45^\circ$ のはりについては $\varphi=20^\circ$ とした。写真-1に垂直入射と傾斜入射の縞写真を示す。これら垂直入射縞次数 $N_{\varphi=0}$ と傾斜

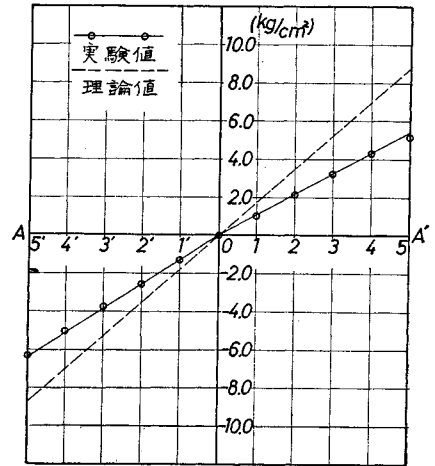


図-11 断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  ( $\theta=0^\circ$ )

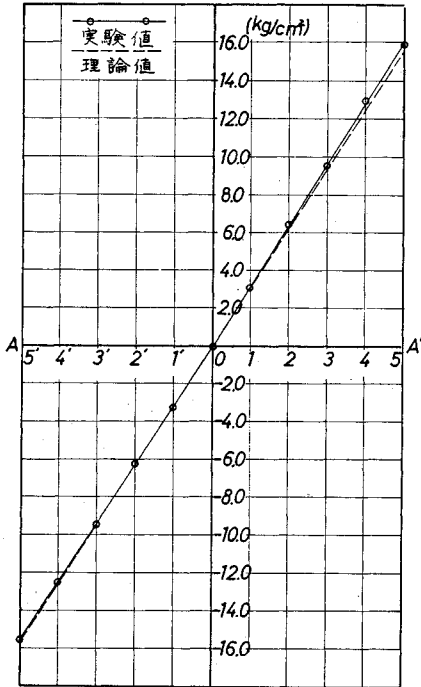


図-10 断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  ( $\theta=90^\circ$ )

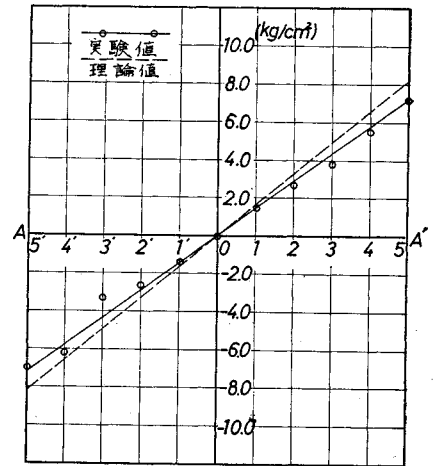


図-12 断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  ( $\theta=45^\circ$ )

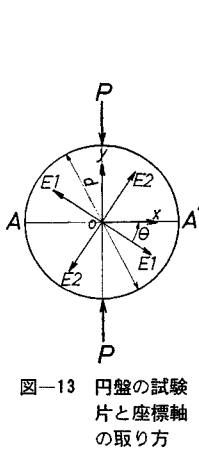


図-13 円盤の試験片と座標軸の取り方

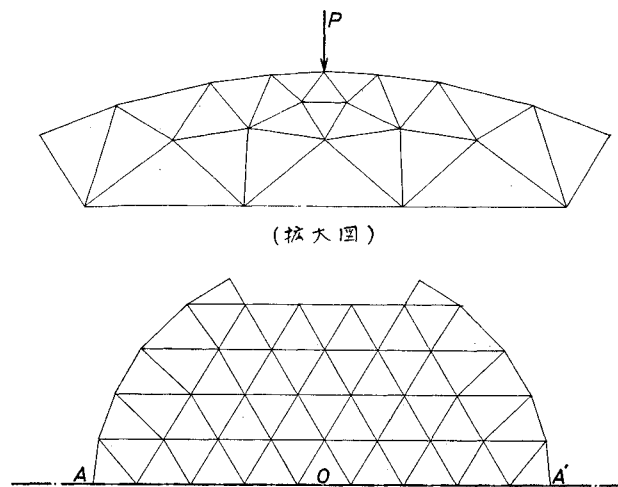
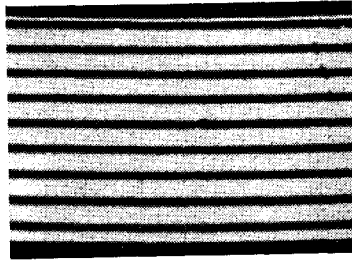


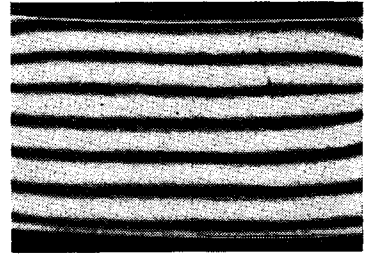
図-14 6 節点 3 角形要素の分割の一例 (分割の半分を示す)

入射縞次数  $N_\varphi$  から得られた純曲げによる直応力  $\sigma_y$  を  $\theta=90^\circ, 0^\circ, 45^\circ$  の場合について理論値とともにそれぞれ図-10, 図-11, 図-12 に示す。また、その計算の一例として、 $\theta=90^\circ$  の場合の計算表を 表-3 に示す。

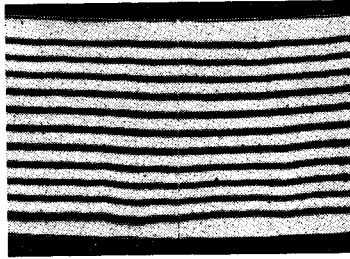
$\theta=90^\circ$  の場合には、写真-1 (a), (b) から中間層の応力状態が2次元応力状態に近いものと思われ、傾斜角を  $45^\circ$  にした場合の等色線縞の乱れは少ない。したがって、仮定により計算される実験値はかなりよい精度を有している。他方、 $\theta=0^\circ, 45^\circ$  の場合には、写真-1 (c), (d), (e), (f) から、傾斜角を小さくした場合においても等色線縞の乱れが大きく、中間層の応力状態を2次元応力状態と近似し難いものと思われる。したがって、傾斜入射法を適用する場合の実験精度は、等色線縞の様子からおおよそ判別できる。



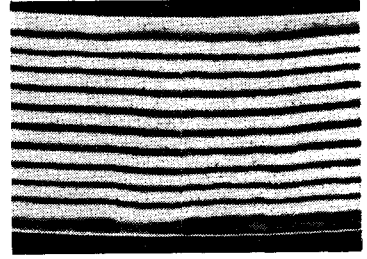
(a)  $\theta=90^\circ, \varphi=0^\circ$



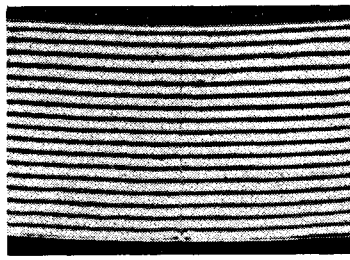
(b)  $\theta=90^\circ, \varphi=45^\circ$



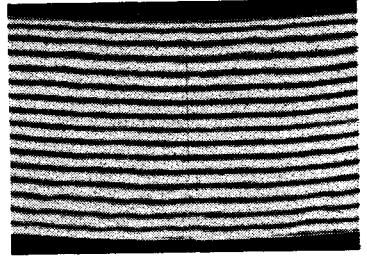
(c)  $\theta=0^\circ, \varphi=0^\circ$



(d)  $\theta=0^\circ, \varphi=20^\circ$



(e)  $\theta=35^\circ, \varphi=0^\circ$



(f)  $\theta=45^\circ, \varphi=20^\circ$

(2) 円盤の圧縮実験

図-13 における  $\theta$  について、 $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$  の3種類の場合について実験を行なった。用いた試験片の寸法、荷重条件は 表-4 に示すとおりである。写真-2 は、実験から得られた垂直入射と傾斜入射の暗視野の場合の等色線縞写真である。結果の検討のため、実験と同一の問題をFEM法により解析し、理論値とした。分割の一例を 図-14 に示す。実験の結果を 図-15, 図-16, 図-17 にそれぞれ  $\theta=0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$  についてFEM値とともに掲げる。実験精度については、この場合にも、はりの純曲げ実験で述べた結論と同様なことがいえる。

写真-1 はりの純曲げ実験

(3) 2円孔を有する直交異方性無限板の一樣な引張りによる応力の解析

2円孔を有する直交異方性無限板の一樣な引張りによる円孔の周辺応力解析例に行なわれた実験( $\theta=0^\circ$ )

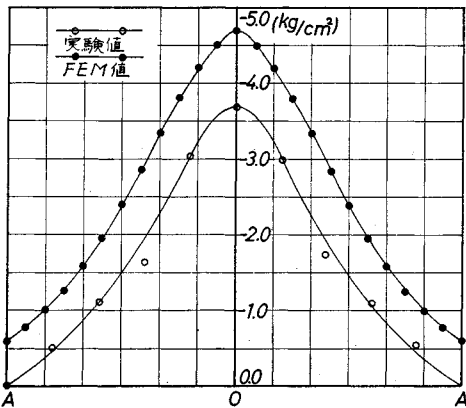


図-15 断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  ( $\theta=0^\circ$ )

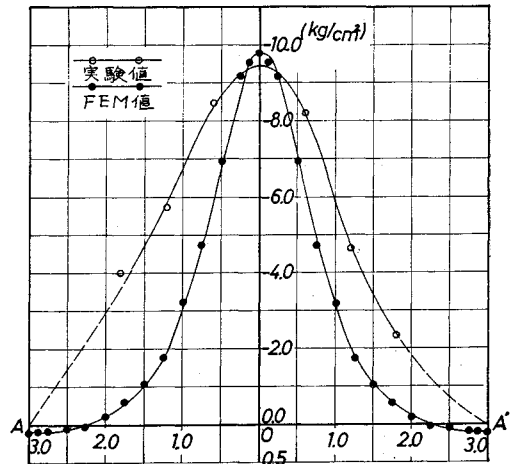


図-16 断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  ( $\theta=90^\circ$ )

表-3 純曲げ実験から直応力  $\sigma_y$  を求める計算例  
断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  の計算表

( $\theta=90^\circ$ )

解析する 点の位置	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
	垂直入射端次数	傾斜入射端次数	主ひずみ差 $\epsilon_{pa}-\epsilon_{qa}$	方 $\alpha$ 向	$(\epsilon_{pa}-\epsilon_{qa}) \times$ $\cos 2\alpha(1+\cos^2\varphi)$	$\frac{2N_\varphi \cdot \cos \varphi}{\epsilon_s \cdot \beta_B}$	⑤+⑥	$\epsilon_{pa}+\epsilon_{qa}=\textcircled{7} \times \frac{2}{3}$
5'	4.42	3.22	0.025228	90°	0.037842	0.025991	-0.011850	-0.007900
4'	3.53	2.57	0.020148	90°	0.030222	0.020745	-0.009477	-0.006317
3'	2.66	1.94	0.015182	90°	0.022773	0.015659	-0.007113	-0.004742
2'	1.77	1.29	0.010102	90°	0.015153	0.010412	-0.004740	-0.003160
1'	0.90	0.64	0.005136	90°	0.007705	0.005166	-0.002539	-0.001692
0	0.0	0.0	0.0	—	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.90	0.66	0.005136	0°	0.007705	-0.005327	0.002377	0.001585
2	1.83	1.33	0.010445	0°	0.015665	-0.010735	0.004931	0.003287
3	2.74	2.02	0.015639	0°	0.023458	-0.016305	0.007153	0.004768
4	3.68	2.67	0.021004	0°	0.031506	-0.021552	0.009953	0.006635
5	4.53	3.32	0.025856	0°	0.038784	-0.026799	0.011985	0.007989
解析する 点の位置	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯
	$\epsilon_{pa}=\frac{1}{2}(\textcircled{9}+\textcircled{8})$	$\epsilon_{qa}=\frac{1}{2}(\textcircled{8}-\textcircled{9})$	$\epsilon_{ya}$	$\epsilon_{xa}$	$0.5 \epsilon_{xa}$ $=0.5 \times \textcircled{12}$	$4.1902 \times \epsilon_{ya}$ $=4.1902 \times \textcircled{11}$	⑬+⑭	$\sigma_{ya}=240 \times \textcircled{15}$ (kg/cm <sup>2</sup> )
5'	0.008663	-0.016564	-0.016544	0.008663	0.004331	-0.069406	-0.065075	-15.64
4'	0.006915	-0.013232	-0.013232	0.006915	0.003457	-0.055447	-0.051990	-12.49
3'	0.005219	-0.009962	-0.009962	0.005219	0.002609	-0.041742	-0.039133	-9.40
2'	0.003471	-0.006631	-0.006631	0.003471	0.001735	-0.027785	-0.026050	-6.26
1'	0.003172	-0.003414	-0.003414	0.001722	0.000861	-0.014305	-0.013444	-3.23
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.003360	-0.001777	0.003360	-0.001777	-0.000888	0.014079	0.013191	3.17
2	0.006863	-0.003579	0.006860	-0.003579	-0.001789	0.028757	0.026959	6.47
3	0.010199	-0.005435	0.010199	-0.005435	-0.002717	0.042735	0.040018	9.61
4	0.013819	-0.007184	0.013819	-0.007184	-0.003592	0.057904	0.054312	13.05
5	0.016922	-0.008933	0.016922	-0.008933	-0.004466	0.070906	0.066440	15.96

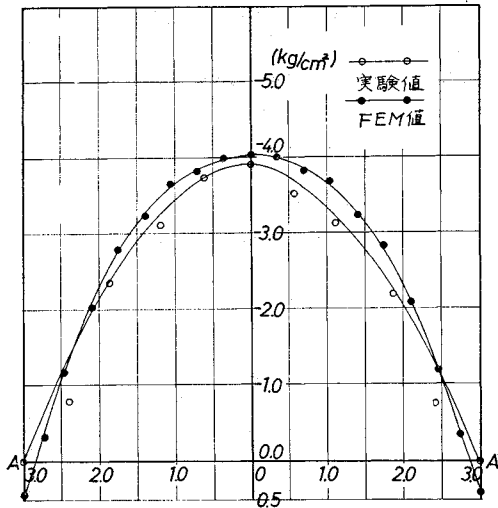


図-17 断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  ( $\theta=45^\circ$ )

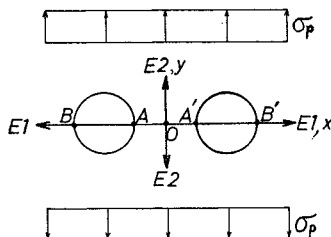


図-18 一様引張りを受ける双設円孔と座標の取り方

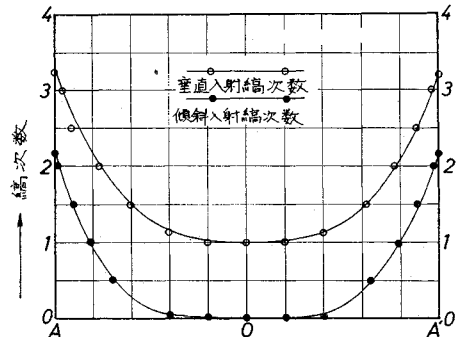


図-19 断面 A-A' 上の垂直入射, 傾斜入射  
端次数  $N_\varphi=0^\circ, N_\varphi=45^\circ$

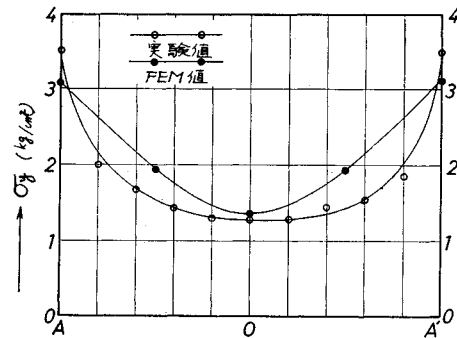


図-20 断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  ( $\sigma_p=1.0 \text{ kg/cm}^2$ )



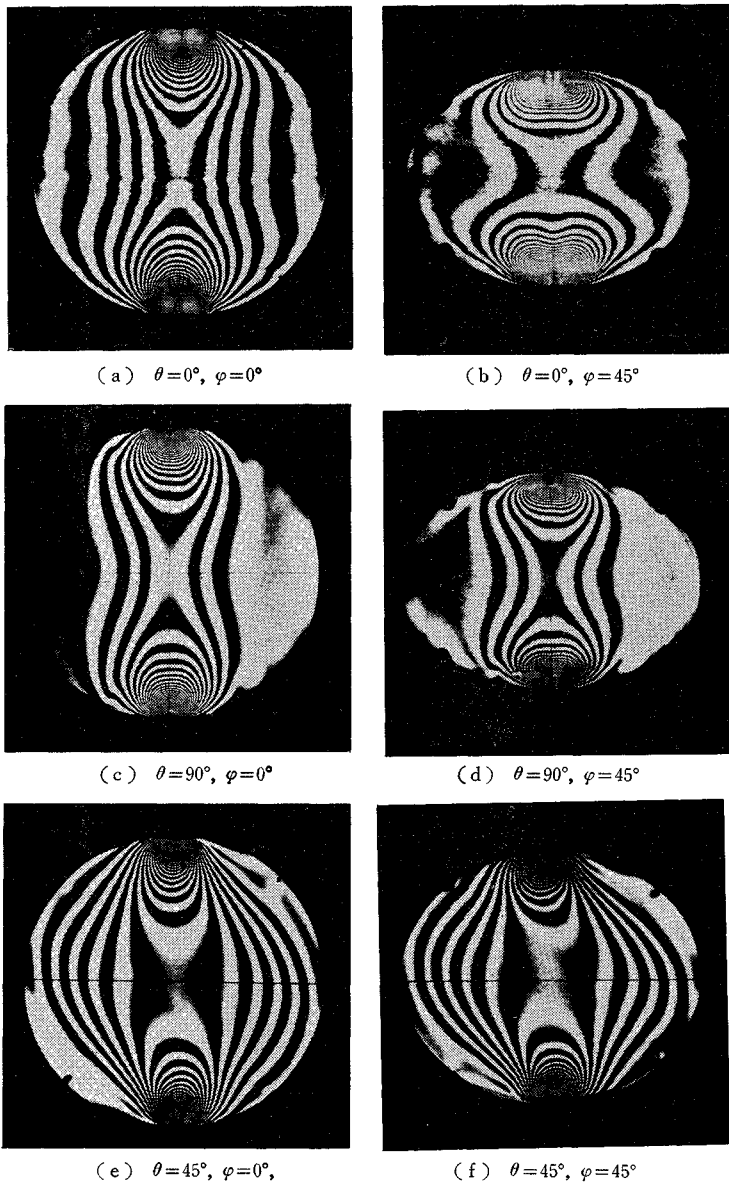


写真-2 円盤の圧縮実験

の資料を用い、傾斜入射法を適用し、図-18の断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  を実験から求め、FEM 値と比較した。実験により得られた垂直入射と傾斜入射の縞写真を写真-3に、垂直入射縞次数  $N_{e=0^\circ}$  と傾斜入射縞次数  $N_\phi$  を図-19に、断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  を図-20に、それぞれ示す。

この場合には、等色線縞の乱れは少なく、FEM 値ともかなりよい一致を示している理由は、はりの純曲げ実験で述べたように、中間層の応力状態が近似的に 2 次元応力状態であるから。

#### 4. 結 論

Drucker の傾斜入射法を応力凍結サンドウィッチ法に併用して、直交異方性板の内部応力を解析する方法の適性を調べるために、純曲げを受けるはりの実験を行なった。その結果、応力凍結サンドウィッチ法に Drucker の傾斜入射法を併用する方法は、直交異方性板の内部応力解析法としての適性が存在することが認められた。この方法の応用例として、さらに適性を検証するため、円盤の圧縮実験、他の実験において得られた資料を用いることにより、断面 A-A' 上の直応力  $\sigma_y$  を求め、FEM 値と比較検討した結果、応力凍結サンドウィッチ法に Drucker の傾斜入射法を併用して得られた実験値は、直交異方性板の内部応力の近似性を有することが認められた。しかしながら、各実験において誤差の大きな点も存在することは事実であるが、誤差

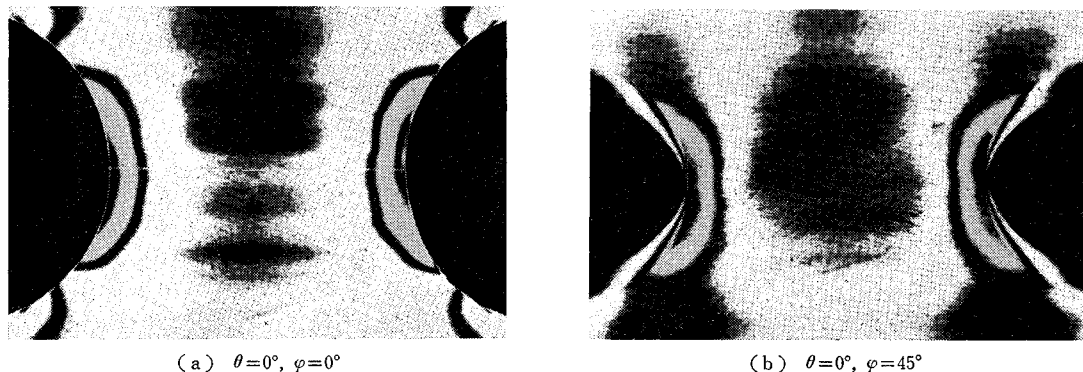


写真-3 双設円孔の垂直入射と傾斜入射の縞写真

表—4 円盤の寸法と荷重条件

試験片 番号	$\theta$	直径・ $d$ (cm)	板厚・ $T$ (cm)	荷重・ $P$ (kg)	スライス厚 ・ $l_s$ (cm)
1	0°	6.00	1.630	24.72	0.375
2	90°	6.00	1.550	24.72	0.350
3	45°	6.00	1.555	24.72	0.275

の大なる点は、各実験において共通な性質 ( $E_2$  軸方向の変形が大なる場合) を有しているから、これらの誤差の傾向を知ることにより、修正も可能と思われ、今後さらに実験を重ね研究することにより、これらの問題を解決したいと考える。

謝 辞：本研究を行なうに当たり終始懇切なるご指導、ご教授を頂いた都立大学土木応用力学教授・山本稔氏に深甚の謝意を表すとともに、実験に際し常に適切な助言を頂いた同研究室・山崎良一氏ならびに計算に当りご助力頂いた都立大学電算機室の皆様へ感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) Hearmon: An introduction to applied anisotropic elasticity, Oxford University Press Chapter 1.
- 2) Lekhnitskii: Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, Holden-day Chapter 1.
- 3) Sawin, G. N.: Spannungs-erhöhung am Rande von Löchern, Veb Verlag Technik Berlin.
- 4) 樋口正一: 直交異方2次元弾性論の境界値問題, 九州大学応用力学研究所報, 第10号 (昭32年).
- 5) 池田 健: 直交異方性板の平面応力に就いて, 日本航空学会誌, 昭17年, 第9巻, 第90号.
- 6) Sonntag, G.: Einfluß der Anisotropie auf die Bean-

spruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen, Der Bauingenieur, August 1958 Heft 8.

- 7) 川本脩万: 異方性地山における素掘円形トンネルの変形について, 土木学会論文集, 第71号 (昭35年).
- 8) 川本脩万: 直交異方性弾性岩盤のトンネルにおける応力集中について, 第1回岩盤力学シンポジウム, 1962年.
- 9) 丹羽・平島: 異方性弾性地山に開削した水平坑道周辺の重力による応力状態, 土木学会論文報告集, 第182号 (1970年).
- 10) 丹羽・小林・平島: 3次元直交異方性弾性岩盤内の円形坑道周辺の応力および変形, 土木学会論文報告集, 第173号 (1970年).
- 11) 久保敏彦: 2だ円孔を含む直交異方性無限板の応力, 機械学会論文集, 第25巻, 第159号, p.1101.
- 12) 日本鋼構造協会編: マトリックス構造解析法講座.
- 13) Zienkiewicz, O.C., Holister, G.S.: Stress Analysis, Chapter 6, 7.
- 14) Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K.: The finite element method in Structural and Continuum mechanics, Mc. GRAW-Hill
- 15) 藤野 勉: 有限要素法による連続体解析, 三菱重工業技報, 第6巻, 第2号.
- 16) 林 毅: 直交異方性板による光弾性実験法, 応用物理, 第31巻, 第10号 (1962年).
- 17) 丹羽・川本: 円孔を有する直交異方性板の光弾性実験, 土木学会論文集, 第83号 (昭37年).
- 18) 山本・安井: Producing of orthotropic plate for photoelastic experiment and its application to experiment, 土木学会論文報告集, 第177号 (1970年).
- 19) 安井将文: 一様引張を受ける直交異方性板内の双設円孔の周辺応力解析, 第25回土木学会年次学術講演会講演集, I-120.
- 20) 応力測定技術研究会編: 応力測定法 第10, 11章.

(1971.12.7 受付)  
(1972.11.17 再受付)