

切欠きを有する半無限弾性体の縦せん断応力

LONGITUDINAL SHEAR STRESS OF A SEMI-INFINITE ELASTIC BODY WITH A NOTCH

長谷部 宣男*
By Norio Hasebe

1. 緒 言

切欠きを有する弾性体に縦せん断荷重の作用する問題は、破壊力学におけるき裂 Mode (Tearing) の一つであり、その弾性応力分布に関する知見は、基礎的な問題として必要と思われる。

線形弾性理論に基づく線形破壊力学は、応力拡大係数の概念の導入により破壊理論への広い応用が可能になり、縦せん断荷重の場合に限らず、種々の場合の応力拡大係数が求められている^{1), 2)}。

縦せん断荷重に対しても複素応力関数と等角写像を利用した Sih の研究³⁾、2 直線割れを有する場合の玉手らの研究⁴⁾などがある。

本報告では、図-1 に示すような t 方向に一定の切欠きを有する均質な等方性および主せん断弾性係数の方向が xt, yt 面に平行な直交異方性の半無限弾性体に、静的な一様縦せん断荷重や集中荷重が作用した場合の応力分布を解析的に求める。そして特に切欠き先端の隅角部の角度、曲率半径、最大応力、せん断弾性係数との関係などを考察する。

2. 等方性弾性体の場合

(1) 解 法

今、図-1 に示すごとく x, y, t を直交座標とし、弾性体の断面は t 方向に一定とすれば、縦せん断応力における変位成分および応力成分は次のように与えられる。

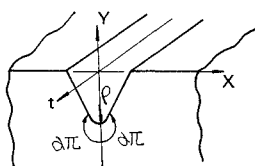


図-1

$$\left. \begin{aligned} u=v=0, w=w(x, y) \\ \sigma_x=\sigma_y=\sigma_t=\tau_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\tau_{xt}=G \cdot \partial w / \partial x, \tau_{yt}=G \cdot \partial w / \partial y \dots\dots\dots(2.2)$$

ここに G はせん断弾性係数である。

また、今の場合の有効なつり合い方程式

$$\partial \tau_{xt} / \partial x + \partial \tau_{yt} / \partial y = 0 \dots\dots\dots(2.3)$$

と、式 (2.2) より変位 w は

$$G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

を満足しなければならない。したがって変位 w は、調和関数である。

ここで $w(x, y)$ に共役な調和関数を $\phi(x, y)$ とし、複素変数 $Z=x+iy$ を引数とする正則な応力関数 $\phi(Z)=w(x, y)+i\phi(x, y)$ を導入すると、応力成分および変位は、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xt}-i\tau_{yt}=G\phi'(Z) \\ w=[\phi(Z)+\bar{\phi}(Z)]/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

と表わされる。

また境界条件式は、図-2 を参照し、式 (2.2) および Cauchy-Riemann の微分方程式を用いて

$$\begin{aligned} G\phi(x, y) &= G\{\phi(Z)-\bar{\phi}(Z)\} \\ &= 2i\int\{\tau_{xt}\cos(n, x) \\ &\quad +\tau_{yt}\cos(n, y)\}ds \\ &\quad + \text{定数} \\ &= 2i\int\tau_{yt}ds + \text{定数} \dots\dots\dots(2.5) \end{aligned}$$

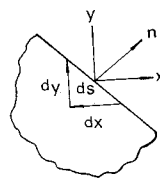


図-2

となる。

次に写像関数を導入したときの式を導く。

解析しようとする物理平面の領域の内部を ζ 平面の単位円内 (または外) に等角写像する関数 $Z=\omega(\zeta)$ を使い、 $\phi(Z)=\phi(\omega(\zeta))=\Phi(\zeta)$ とおくと式 (2.4), (2.5) は

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xt}-i\tau_{yt}=G\Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta) \\ w=[\Phi(\zeta)+\bar{\Phi}(\zeta)]/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

* 正会員 工修 名古屋工業大学講師 土木工学科

$$G\{\Phi(\sigma) - \overline{\Phi(\sigma)}\} = 2i\int \tau_{r\theta} ds + \text{定数} \dots\dots(2.7)$$

となる。 σ は、単位円周上の ζ の値である。

また、 x, y 方向応力成分を曲線座標の応力成分に変換するには、

$$\tau_{rt} - i\tau_{\theta t} = e^{i(n, x)} [\tau_{xt} - i\tau_{yt}] \dots\dots(2.8)$$

を用いればよい。ここに $e^{i(n, x)} = \zeta \omega'(\zeta) / |\zeta \omega'(\zeta)| (n, x)$ は x 軸と曲線の法線とのなす角 (図-2 参照) である。

(2) 計算例

著者は先に、図-3 (a) に示す切欠きを有する領域を単位円内部に等角写像する関数を

$$Z = \omega(\zeta) = E/(1-\zeta) + \sum E_k/(\zeta_k - \zeta) \dots\dots(2.9)$$

の形に作り、これを用いて平面弾性問題や薄板の曲げの解析を行なった⁵⁾が、ここでもこの写像関数を用いて一様な縦せん断荷重や集中荷重の作用した場合の応力分布を求める。

a) 一様縦せん断荷重の場合

求めたい応力関数を $\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta)$ とする。ここに $\phi_2(\zeta)$ は、無限遠での一様なせん断応力状態を決める応力関数で、式 (2.6) より

$$\phi_2(\zeta) = \tau/G \cdot \omega(\zeta)$$

である。ここに τ は縦せん断荷重の大きさである。

$\phi_1(\zeta)$ は、無限遠での応力が 0 になる応力関数で次のようにして求められる。

今の場合境界上に外力は作用していないから、境界条件式 (2.7) は、

$$G\{\Phi(\sigma) - \overline{\Phi(\sigma)}\} = G\{\phi_1(\sigma) + \phi_2(\sigma) - \overline{\phi_1(\sigma)} - \overline{\phi_2(\sigma)}\} = \text{定数}$$

となる。これより

$$G\{\phi_1(\sigma) - \overline{\phi_1(\sigma)}\} = -\tau\{\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}\} + \text{定数}$$

上式両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ を乗じ、単位円周上で積分すると、

$$G\{\phi_1(\zeta) - \overline{\phi_1(0)}\}$$

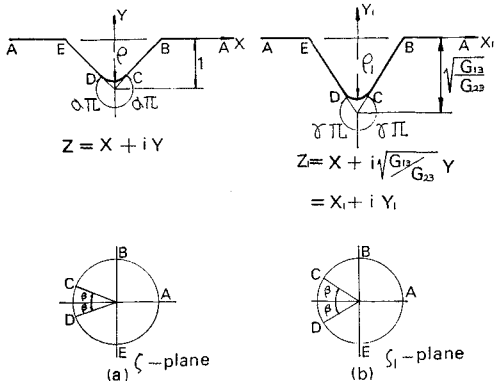


図-3

$$= -\tau \left\{ \omega(\zeta) + \frac{\overline{E} - E}{2(1-\zeta)} - \omega(0) \right\} + \text{定数}$$

$\therefore G\phi_1(\zeta) = -\tau\{\omega(\zeta) + (\overline{E} - E)/2(1-\zeta)\} + \text{定数}$ を得る。

以上より応力成分は、式 (2.6), (2.8) を用いて

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xt} - i\tau_{yt} &= G\Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta) \\ &= -\tau \frac{\overline{E} - E}{2(1-\zeta)^2} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \\ \tau_{rt} - i\tau_{\theta t} &= -\tau \frac{\overline{E} - E}{2(1-\zeta)^2} \frac{\zeta}{|\zeta\omega'(\zeta)|} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.10)$$

となる。

図-4, 表-1 および 図-5, 表-2 には、 $\tau=1.0$ のときのせん断応力分布の例を示す。ここで寸法の基準は、隅角部に丸味のない切欠き深さを 1.0 としている⁵⁾。

b) 集中荷重の場合

一対の集中荷重の作用する場合の応力分布の例を図-6, 7 に示す。この場合の応力関数は荷重を p として、境界条件式 (2.7) およびコーシーの積分定理を用いて容易に

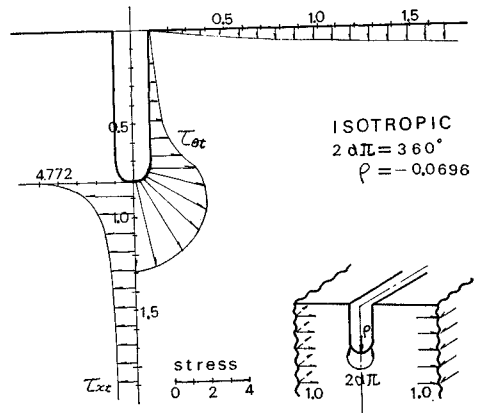


図-4

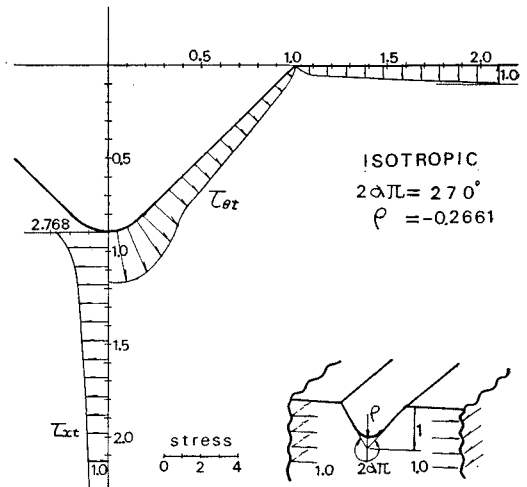


図-5

表-1 一様せん断荷重

($2\alpha\pi=360^\circ, \beta=1.1$ ラジアン, 等方性の場合)

曲率半径 ρ	境界線に沿う応力		対称軸上の応力		
	座標 x	座標 y	$\tau_{\theta t}$	座標 y	τ_{xt}
-0.0696	0.0	-0.81166	4.772	-0.81166	4.772
-0.0702	0.00911	-0.81106	4.747	-0.81267	4.704
-0.0772	0.03376	-0.80311	4.432	-0.82293	4.134
-0.1017	0.06193	-0.77880	3.626	-0.83740	3.578
-0.1702	0.08453	-0.72849	2.463	-0.85608	3.098
-8.1857	0.08951	-0.60994	1.139	-0.88032	2.689
7.9397	0.08941	-0.17260	0.211	-0.95327	2.054
0.0223	0.09587	-0.00610	0.016	-1.07860	1.621
-0.1182	0.12543	-0.00015	0.043	-1.45908	1.247
-48.69	0.43786	0.00002	0.384	-1.97445	1.118
-6.483×10^3	1.48720	-0.00001	0.853	-2.98415	1.047
-2.527×10^5	2.93547	-0.00000	0.956	-5.45290	1.014
3.919×10^8	18.94902	-0.00000	0.999	-18.05869	1.001

表-2 一様せん断荷重

($2\alpha\pi=270^\circ, \beta=0.7$ ラジアン, 等方性の場合)

曲率半径 ρ	境界線に沿う応力		対称軸上の応力		
	座標 x	座標 y	$\tau_{\theta t}$	座標 y	τ_{xt}
-0.2661	0.0	-0.89170	2.768	-0.89170	2.768
-0.2679	0.02736	-0.89029	2.753	-0.89472	2.737
-0.3175	0.13394	-0.85677	2.434	-0.94449	2.344
60.511	0.32731	-0.68397	1.367	-0.96625	2.221
69.582	0.62947	-0.38178	0.891	-1.01759	2.000
2.6404	0.98993	-0.02129	0.305	-1.16131	1.651
0.0096	1.01160	-0.00071	0.122	-1.54168	1.313
-0.0832	1.02004	-0.00002	0.204	-1.99047	1.176
-4.0740	1.07301	-0.00008	0.388	-2.72074	1.091
5.26×10^3	2.10947	0.00001	0.858	-4.01824	1.041
5.89×10^4	3.73357	0.00000	0.954	-9.43137	1.007
7.16×10^7	16.4264	0.00000	0.998	-14.91297	1.003

$$G\phi(\zeta) = p/\pi \cdot \log\{(\sigma_2 - \zeta)/(\sigma_1 - \zeta)\}$$

と求められる。 σ_1, σ_2 は荷重載荷点の位置を表わし、図示の例では、対称性より $\sigma_1 = \sigma_2$ である。

単一の集中荷重の作用する場合の応力関数は、 σ_1 を荷重載荷点とし、 $\sigma_2 = 1$ とすればよい。

3. 直交異方性弾性体の場合

(1) 解法

t 軸に垂直な弾性対称面を有する異方性弾性体に縦せん断荷重の作用する場合の変位成分および応力成分は、式(2.1)および、 C_{44}, C_{45}, C_{55} を弾性定数として

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yt} &= C_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + C_{45} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{xt} &= C_{45} \frac{\partial w}{\partial y} + C_{55} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

である。上式を式(2.3)に代入すると

$$C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

を得る。ここで特性方程式

$$C_{44} \mu^2 + 2C_{45} \mu + C_{55} = 0$$

の複素根を $\mu_1 = \mu_2 = \alpha_1 + i\beta_1$ (実根の存在しないことは証明されている⁶⁾) とし

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x + \alpha_1 y \\ y_2 &= \beta_1 y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

なる変数変換を行なうと変位 w は、 x_2, y_2 を引数とする調和関数であることがわかる。

また特に直交する主せん断弾性係数 G_{13}, G_{23} の方向がそれぞれ xt 面、 yt 面に平行な直交異方性の場合には簡

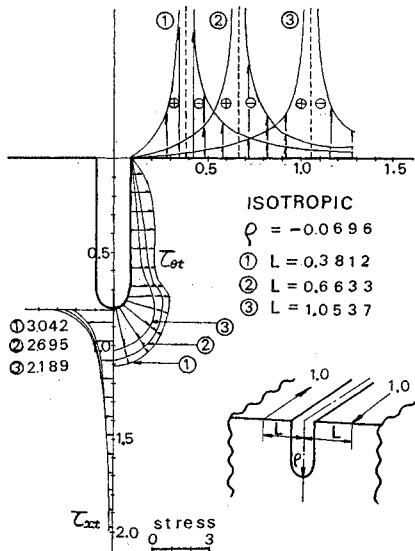


図-6

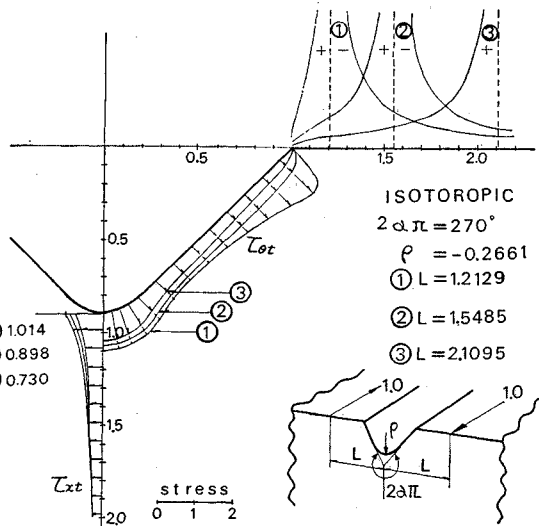


図-7

単になって、その変位成分および応力成分は、式 (2.1) および

$$\tau_{xt} = G_{13} \cdot \partial w / \partial x, \tau_{yt} = G_{23} \cdot \partial w / \partial y \dots \dots (3.3)$$

となる。これを式 (2.3) に代入し、さらに

$$x_1 = x, y_1 = \sqrt{G_{13}/G_{23}} y \dots \dots (3.4)$$

なる変換を行なうと、変位 w は x_1, y_1 を引数とする調和関数であることがわかる。

以下この直交異方性弾性体の場合の解法を述べる。

変位 $w = w(x_1, y_1)$ およびそれに共役な調和関数 $\phi(x_1, y_1)$ 、そして複素変数 $Z_1 = x_1 + iy_1$ を引数とする正則な応力関数

$$\phi(Z_1) = w(x_1, y_1) + i \psi(x_1, y_1)$$

を導入すると等方性の場合と同じようにして

境界条件式は

$$\phi(Z_1) - \overline{\phi(Z_1)} = 2i / \sqrt{G_{13}G_{23}} \int \tau_{rt} ds + \text{定数} \dots \dots (3.5)$$

応力の式は

$$\tau_{xt} - i \sqrt{G_{13}/G_{23}} \tau_{yt} = G_{13} \phi'(Z_1) \dots \dots (3.6)$$

変位の式は

$$w = [\phi(Z_1) + \overline{\phi(Z_1)}] / 2 \dots \dots (3.7)$$

となる。

等方性の場合と同じように写像関数を用いる。

図-3 を参照して Z 平面で表わされる物理平面を式 (3.4) の変数変換、すなわちいわゆるアフィン変換を行なって得られる Z_1 平面を考える。そしてこの Z_1 平面を ζ_1 平面の単位円に等角写像する写像関数 $Z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ を考える。そうすれば式 (3.5), (3.6), (3.7) は、この写像関数を用いて容易に表わされる。

次に写像関数 $Z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ を用いた応力成分の変換式 (2.8) の $e^{i(n, x)}$ および曲率半径 ρ を計算する式を導く。

ζ_1 の偏角を $\theta_1, \mu = \sqrt{G_{13}/G_{23}}, \cdot = \partial / \partial \theta_1$ とおき

$$\dot{x} = i(\omega_1' \zeta_1 - \overline{\omega_1' \zeta_1}) / 2, \dot{y} = (\omega_1' \zeta_1 + \overline{\omega_1' \zeta_1}) / 2 \mu$$

$$\ddot{x} = -(\omega_1'' \zeta_1^2 + \omega_1' \zeta_1 + \overline{\omega_1'' \zeta_1^2 + \omega_1' \zeta_1}) / 2$$

$$\ddot{y} = -(\omega_1'' \zeta_1^2 + \omega_1' \zeta_1 - \overline{\omega_1'' \zeta_1^2 + \omega_1' \zeta_1}) / 2 i \mu$$

を考慮すると

$$e^{i(n, x)} = dy/ds - i \cdot dx/ds = (\dot{x} - i \dot{y}) / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ = \frac{(1 + \mu) \omega_1' \zeta_1 + (1 - \mu) \overline{\omega_1' \zeta_1}}{\sqrt{(\omega_1' \zeta_1 + \overline{\omega_1' \zeta_1})^2 - \mu^2 (\omega_1' \zeta_1 - \overline{\omega_1' \zeta_1})^2}}$$

$$1/\rho = (\dot{x} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x}) / (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} \dots \dots (3.8)$$

ここに

$$\dot{x} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x} = |\zeta|^2 R_e [\omega'' \zeta \overline{\omega'} + \omega' \overline{\omega''}] / \mu$$

$$[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}$$

$$= \{-\mu^2 (\omega_1' \zeta_1 - \overline{\omega_1' \zeta_1})^2 + (\omega_1' \zeta_1 + \overline{\omega_1' \zeta_1})^2\}^{3/2} / 8 \mu^3$$

である。いずれも $\mu = 1$ の場合には周知の式になる。

(2) 計算例

計算例としては式 (3.3) 以下で述べた主せん断弾性係

数の方向と xt, yt 面が平行な切欠きを有する半無限弾性体の場合を示す。

a) 一様せん断荷重

その応力関数は、式 (2.9) の形の写像関数を用いて、等方性の場合と同じようにして

$$\phi(\zeta_1) = -\tau / G_{13} \cdot (\overline{E} - E) / 2 (1 - \zeta_1)$$

と求められる。

図-8, 表-3 には、 $2\alpha\pi = 360^\circ, \rho = -0.1391$, せん断弾性係数の比 $G_{13}/G_{23} = 2$ の場合の対称軸上および境界線上のせん断応力の分布などを示す。寸法の基準は、今までと同じように、隅角部に丸味のない $\rho = 0$ のときの切欠き深さを 1.0 としている。

表-1, 表-3 を比べてみて次のようなことがわかる。

この 2 つの場合いずれも寸法の基準として深さを同じにしているから y 座標の値は同じであるが、 x 座標の値は直交異方性の方が $\sqrt{G_{13}/G_{23}} = \sqrt{2}$ 倍になっている。また応力を求める式 (2.10) と式 (3.6) および応力関数の式とを比べてわかるように応力成分 τ_{xz} は同じで、

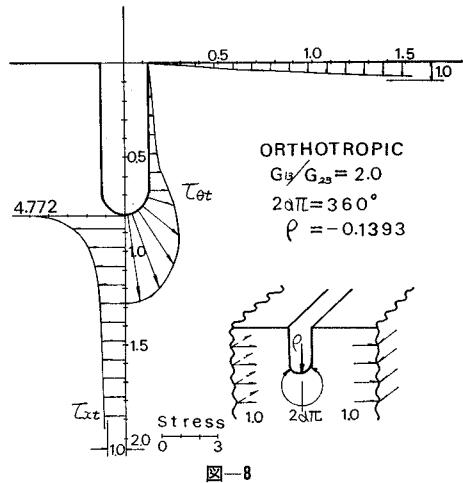


図-8

表-3 一様せん断荷重

($2\alpha\pi = 360^\circ, \beta = 1.1$ ラジアン, 直交異方性, $G_{13}/G_{23} = 2$ の場合)

曲率半径 ρ	境界線に沿う応力		対称軸上の応力		
	座標 x	座標 y	$\tau_{\theta t}$	τ_{xt}	
-0.1393	0.0	-0.81166	4.772	-0.81166	4.772
-0.1385	0.01288	-0.81106	4.727	-0.81267	4.704
-0.1298	0.04774	-0.80311	4.182	-0.82293	4.134
-0.1154	0.08759	-0.77880	3.002	-0.83740	3.578
-0.1296	0.11954	-0.72849	1.785	-0.85608	3.098
-5.7881	0.12659	-0.60994	0.805	-0.88032	2.689
5.6143	0.12644	-0.17260	0.149	-0.95327	2.054
0.0290	0.13559	-0.00610	0.014	-1.17218	1.466
-0.2357	0.17738	0.00015	0.043	-1.45908	1.247
-97.386	0.61923	0.00002	0.384	-1.97445	1.118
-1.297 × 10 ⁴	2.10321	-0.00001	0.916	-2.98415	1.047
-5.053 × 10 ⁵	4.15138	-0.00000	0.956	-5.45290	1.014
7.837 × 10 ⁶	26.7980	-0.00000	0.999	-18.05869	1.001

表-4 一様せん断荷重
($2\alpha\pi=270^\circ$, 直交異方性, $G_{13}/G_{23}=1/3$, $2\gamma\pi=240^\circ$)

曲率半径 ρ	境界線に沿う応力		対称軸上の応力		
	座標 x	座標 y	$\tau_{\theta t}$	座標 y	τ_{xt}
-0.2605	0.0	-0.87597	1.971	-0.87597	1.971
-0.2656	0.03094	-0.87414	1.974	-0.88187	1.957
-0.3375	0.11703	-0.84959	1.992	-0.93989	1.830
-0.5906	0.22965	-0.77348	1.920	-0.97637	1.764
-33.50	0.32215	-0.68220	1.616	-1.06007	1.643
94.72	0.68485	-0.31946	1.134	-1.21850	1.486
84.04	0.95943	-0.04498	0.720	-1.71067	1.255
0.0039	1.00439	-0.00033	0.260	-2.62315	1.114
8.8885	1.10469	0.00006	0.658	-3.68289	1.060
4.43×10^3	1.78191	0.00001	0.903	-5.52856	1.027
-2.87×10^5	4.23360	0.00000	0.984	-9.30748	1.010
4.62×10^7	13.23747	0.00000	0.998	-20.77834	1.002

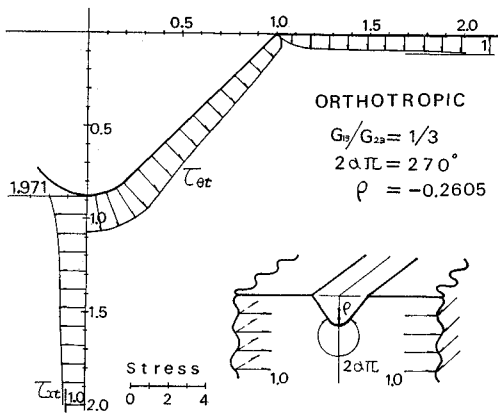


図-9

τ_{yt} は $1/\sqrt{G_{13}/G_{23}}=1/\sqrt{2}$ になっている。したがって $2\alpha\pi=360^\circ$ のとき、等方性の場合と y 座標を同じにすれば、 x 座標を $\sqrt{G_{13}/G_{23}}$ 倍、 x 座標を同じにすれば、 y 座標を $1/\sqrt{G_{13}/G_{23}}$ 倍して得られる形状の直交異方性弾性体の応力分布は、等方性の場合と τ_{xt} は同じ値、 τ_{yt} は $1/\sqrt{G_{13}/G_{23}}$ 倍した値として求められる。

また以上のことより同一形状の弾性体の応力集中は、 $G_{13}/G_{23} > 1$ の場合が等方性 $G_{13}/G_{23}=1$ の場合の応力集中より大になり、 $G_{13}/G_{23} < 1$ の場合は小さくなることわかる。

図-9、表-4 は、 $2\alpha\pi=270^\circ$, $\rho=-0.2605$, $G_{13}/G_{23}=1/3$ の場合の応力分布を示す。表-4 より隅角部の底部より少し離れたところに最大応力が生じているが、これは隅角部の曲線の形によるものと思われる。

$G_{13}/G_{23} > 1$ のときは、アフィン変換して得られる Z_1 平面の隅角部角度 $2\gamma\pi$ は、 $2\gamma\pi > 2\alpha\pi$ となり応力集中要素は厳しくなり、 $G_{13}/G_{23} < 1$ の場合はその逆である。したがって同一形状の弾性体について、 $G_{13}/G_{23} > 1$ の直交異方性の場合、等方性の場合の応力集中より大

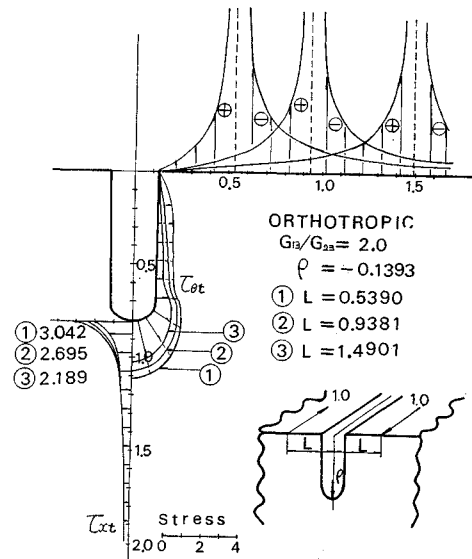


図-10

きく、 $G_{13}/G_{23} < 1$ のときは小さくなることわかる。

b) 集中荷重

図-10 には、 $2\alpha\pi=360^\circ$, $\rho=-0.1393$, $G_{13}/G_{23}=2$ の場合の直交異方性弾性体に一對の集中荷重の作用した場合の応力分布を示す。

この場合の応力関数は、

$$\phi(\zeta_1) = \frac{1}{\sqrt{G_{13}G_{23}}} \frac{p}{\pi} \log \frac{\sigma_2 - \zeta}{\sigma_1 - \zeta}$$

となる。 σ_1, σ_2 は荷重の位置を示す単位円周上の点で、図示の例では $\sigma_1 = \bar{\sigma}_2$ である。1 個の集中荷重のみが作用するときは、 σ_1 を荷重点とし、 $\sigma_2=1$ とすればよい。

4. 隅角部の応力と角度と曲率半径

縦せん断荷重を受ける場合の隅角部の応力の order に関して G.C. Sih⁹⁾ の研究がある。ここでも平面問題や薄板の曲げの場合の隅角部の order や角度、曲率半径などの関係を考察した⁵⁾ のと同じ考え方で考察してみる。

(1) 等方性弾性体の場合

図-11 (a) に示す隅角部に丸味のない鋭い角を持つ弾性体を考える。

いま、応力の order を m として極座標形式で関数 $\phi(r, \theta)$ を

$$\phi(r, \theta) = r^{m+1} f(\theta)$$

とおく。 $\phi(r, \theta)$ は調和関数だから

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi = 0$$

を満足しなければならない。これより A, B を定数として

$$f(\theta) = A \sin(m+1)\theta + B \cos(m+1)\theta$$

を得る。

今、境界が自由な場合は、境界条件式 (2.5) より

$$[\phi(r, \theta)]_{\theta=\pm\alpha} = 0$$

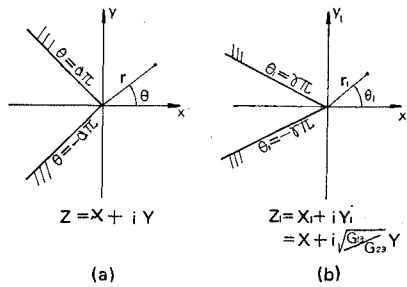
である。ここで A, B ともに 0 でない解が存在する条件より

$$\sin 2(m+1)\alpha = 0$$

$$\therefore m_j = j/2 \alpha - 1 \dots \dots \dots (4.1)$$

を得る。ここに j は正または負の整数である。

応力成分 τ_{xt}, τ_{yt} は、式 (2.2) と関数 $\phi(r, \theta)$ から、応力の order r^{m_j} を持つことがわかる。



図—11

表—5 最大応力 (等方性の場合)

2α	β ラジアン	座標 y	曲率半径	最大応力 (1)	式(4.2)の τ_{max} (2)	誤差(%) [(1)-(2)] /100	式(4.3)の τ_{max} (3)	誤差(%) [(1)-(3)] /100
360°	0.3	-0.981 65	-0.005 6	17.936	17.869	0.37	17.915	0.12
	0.5	-0.954 10	-0.014 5	10.806	10.950	-1.33	10.871	-0.60
	0.8	-0.893 64	-0.037 1	6.674	6.652	0.32	6.610	0.96
	1.1	-0.811 66	-0.069 6	4.772	4.719	1.11	4.773	-0.02
	1.3	-0.745 09	-0.096 6	3.978	3.946	0.80	4.015	-0.92
	1.57	-0.639 18	-0.139 4	3.212	3.254	-1.30	3.197	0.46
320°	0.3	-0.978 93	-0.016 5	9.439	9.396	0.46	9.418	0.22
	0.4	-0.965 22	-0.026 0	7.575	7.641	-0.87	7.615	-0.53
	0.7	-0.909 50	-0.069 2	4.872	4.864	0.16	4.842	0.63
	1.1	-0.804 46	-0.153 4	3.372	3.347	0.75	3.377	-0.14
	1.3	-0.738 91	-0.205 3	2.927	2.916	0.37	2.942	-0.52
	1.57	-0.635 42	-0.284 8	2.478	2.499	-0.86	2.469	0.35
270°	0.15	-0.989 01	-0.022 4	6.118	6.127	-0.15	6.112	0.10
	0.2	-0.983 15	-0.033 5	5.278	5.284	-0.11	5.291	-0.25
	0.4	-0.952 84	-0.116 1	3.676	3.629	1.28	3.659	0.47
	0.7	-0.891 70	-0.266 1	2.768	2.787	-0.67	2.785	-0.63
	1.1	-0.785 08	-0.521 4	2.184	2.211	-1.21	2.175	0.40
	1.57	-0.621 10	-0.881 2	1.792	1.776	0.87	1.794	-0.10
240°	0.005	-1.0	-0.002 7	8.042	8.040	0.03	8.042	-0.003
	0.15	-0.984 52	-0.095 6	3.318	3.305	0.38	3.302	0.50
	0.2	-0.977 17	-0.132 1	3.027	3.051	-0.79	3.047	-0.65
	0.7	-0.875 97	-0.781 5	1.971	1.963	0.40	1.965	0.31
	1.2	-0.736 93	-1.596 0	1.632	1.631	0.03	1.637	-0.28
	1.57	-0.607 17	-2.272 8	1.475	1.477	-0.13	1.473	0.11
200°	0	-1.0	-0.184 0	1.920	1.919	0.04	1.919	0.06
	0.2	-0.963 78	-2.271 2	1.446	1.449	-0.21	1.449	-0.24
	0.4	-0.918 94	-5.326 4	1.336	1.333	0.23	1.333	0.20
	0.7	-0.845 25	-9.849 4	1.254	1.254	-0.03	1.254	-0.02
	1.2	-0.704 26	-17.897	1.177	1.178	-0.10	1.178	-0.04
	1.55	-0.586 94	-23.748	1.140	1.139	0.05	1.140	0.02

また式 (4.1) の m_j は、任意の角度 2α に対して $m_j \geq -0.5 (j=1, 2, \dots)$ が、 $r=0$ の隅角部付近の応力の振舞いを、 $m_j \leq -1 (j=0, -1, -2, \dots)$ が $r=\infty$ の応力の振舞いを表すのに対応している。

m_j の値はすべて実根で、平面問題の場合複素根が存在したのとはかなり違う。

次に隅角部に丸味を有するときの応力の order, 角度, 曲率半径などの関係を考察してみる。表—5 は、2. で求めた隅角部に丸味を有する弾性体の最大せん断応力と曲率半径の値を 5 通りの隅角部角度について示したものである。図—12 の考察から、各角度の曲線の勾配が、曲率半径 ρ の小さいところでは式 (4.1) の第 1 根にほぼ一致することがわかる。そして大きくなるにつれて第 2 根や第 3 根が関係してくると思われる。

実際

$$\tau_{max} = k_1 \rho^{m_1} + k_2 \rho^{m_2} + k_3 \rho^{m_3} \dots \dots \dots (4.2)$$

や

$$\tau_{max} = k_1 \rho^{m_1} + k_2 \rho^{m_2} + k_3 \rho^{m_3} + k_4 \rho^{m_4} \dots \dots \dots (4.3)$$

をもって図—12 の曲線を近似させることができる。

表—6 には、式 (4.2), (4.3) の各角度に関する m_j

($j=1 \sim 4$) の値と、それぞれの角度について最小二乗法によって決めた係数 $k_j (j=1 \sim 4)$ の値を示す。また表—5 には式 (4.2) や (4.3) の示す τ_{max} との誤差を示す。これより式 (4.2), (4.3) は、ほぼ 1% 以内の誤差で近似され、式 (4.3) は式 (4.2) よりも誤差の小さいことがわかる。

一般に最大せん断応力は、式 (4.1) の m_j および曲率半径 ρ をもって

$$\tau_{max} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \dots (4.4)$$

の形に表わされる。ここに k_j は各角度で決められる係数である。

$2\alpha = 360^\circ$, 切欠き深さ a , 一樣せん断荷重の大きさ τ の作用する場合の応力拡大係数は、 $K_{II} = \tau \sqrt{\pi a^2}$ であるが、式 (4.3), 表—6 より求められる応力拡大係数は $K_{II} = 1.374 \tau \sqrt{\pi a}$ となり、かなり大きな値を示す。これに関しては、最大応力や隅角部付近の応力分布と隅角部の曲線との関係などについてもっと考察する必要がある。

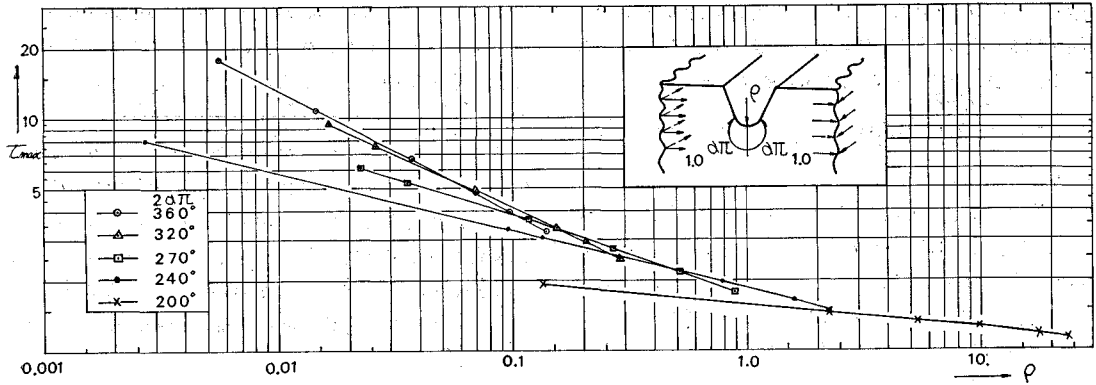


図-12

表-6 式(4.2)および(4.3)の係数

$2\alpha\pi$	m_1	m_2	m_3	m_4	k_1	k_2	k_3	k_4
360°	-0.5	0.5	1.0	1.5	1.3510 1.3737	-2.8374 -8.8805	4.9835 44.5082	- -64.7635
320°	-0.4375	0.125	0.6875	1.25	1.6058 1.6867	-0.4957 -1.7136	0.3346 5.3707	- -6.0210
270°	-0.3333	0.3333	1.0	1.6667	1.6971 1.6645	0.4132 0.8669	-0.4425 -1.7409	- 0.9391
240°	-0.25	0.5	1.25	2	1.8322 1.8331	0.0378 0.0129	-0.0259 0.0207	- -0.0187
200°	-0.1	0.8	1.7	2.6	1.5695 1.5691	0.0019 0.00245	-0.0001 -0.00022	- 0.0000036

$2\alpha\pi$ より大きくなるか、小さくなるかで応力の order は厳しくなったり、緩やかになつたりする。3.(2) の計算例での考察は以上のことに符合していると思われる。

次に隅角部に丸味を有する場合を考察してみる。図-3 を参照して、物理面での隅角部の曲率半径を ρ 、アフィン変換した座標面での曲率半径を ρ_1 とすると、

あると思われる。

b) 直交異方性弾性体の場合

この場合も主せん断係数の方向が xt, yt 平面に平行な場合を考えている。

図-11 (a) をアフィン変換した図-11 (b) の (r_1, θ_1) 平面を考える。今、関数 $\psi(r_1, \theta_1)$ を

$$\psi(r_1, \theta_1) = r_1^p g(\theta_1)$$

とおくと、この $\psi(r_1, \theta_1)$ は調和関数であるから C, D を未定定数として

$$g(\theta_1) = C \cos(p+1)\theta_1 + D \sin(p+1)\theta_1$$

となる。境界が自由のとき

$$[\psi(r_1, \theta_1)]_{\theta_1 = \pm \pi} = 0$$

である。これよりともに 0 でない C, D が存在するためには

$$\sin 2(p+1)\pi = 0$$

$$\therefore p_j = j/2 - 1 \dots \dots \dots (4.5)$$

となる。 j は正または負の整数である。

式(4.5) から求まる p_j の値は任意の角度に対して、 $p_j \geq -0.5 (j=1, 2, \dots)$ が隅角部付近の応力分布に、 $p_j \leq -1 (j=0, -1, -2, \dots)$ が無限遠での応力分布に対応しているのは等方性の場合と同じである。

隅角部の応力の order は、アフィン変換して得られた領域の角度を用いて式(4.5)の p_j の値で与えられることがわかる。したがって G_{13}/G_{23} の大きさによってアフィン変換して得られる隅角部角度 $2\pi\alpha$ が、もとの角度

ρ と ρ_1 の間には式(3.8)より

$$\rho = G_{13}/G_{23} \cdot \rho_1 \dots \dots \dots (4.6)$$

の関係があることがわかる。

直交異方性の場合、アフィン変換した座標面での領域を等方性弾性体とみなして解析しているのと同じである。したがって最大応力 τ_{max} と曲率半径 ρ_1 との間には式(4.4)の関係

$$\tau_{max} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho_1^{p_j}$$

表-7 最大応力(直交異方性の場合)

$2\alpha\pi$	曲率半径(ρ)	$\tau_{max}(1)$	式(4.7)の第3項まで $\tau_{max}(2)^*$	誤差(%) [(1)-(2)]/100	式(4.7)の第4項まで $\tau_{max}(3)^*$	誤差(%) [(1)-(3)]/100
360°	0.0112	17.936	17.859	0.43	17.914	0.12
	0.0289	10.806	10.961	-1.43	10.871	-0.60
	0.0742	6.674	6.651	0.33	6.610	0.96
	0.1393	4.772	4.718	1.13	4.773	-0.02
	0.1932	3.978	3.946	0.81	4.015	-0.92
0.2788	3.212	3.254	-1.31	3.197	0.46	
270°	0.0319	3.318	3.306	0.36	3.302	0.50
	0.0440	3.027	3.051	-0.80	3.047	-0.65
	0.1246	2.382	2.359	0.98	2.355	1.11
	0.2605	1.971	1.963	0.41	1.965	0.31
	0.4742	1.684	1.683	0.06	1.688	-0.27
0.7576	1.475	1.477	-0.11	1.472	0.18	
240°	0.0672	6.118	6.127	-0.15	6.112	0.10
	0.1065	5.278	5.284	-0.12	5.291	-0.25
	0.3484	3.676	3.629	1.29	3.659	0.47
	0.7982	2.768	2.787	-0.69	2.785	-0.63
	1.5641	2.184	2.211	-1.19	2.175	0.40
2.6435	1.792	1.776	0.87	1.794	-0.10	

* 表-6 の係数を使用。

が成り立つ。 k_j の値はアフィン変換して得られる領域と同じ領域の等方性弾性体において決められた係数である。上式と式(4.6)から物理面の曲率半径 ρ をもって

$$\tau_{\max} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (G_{23}/G_{13} \cdot \rho)^{P_j} \dots \dots \dots (4.7)$$

が成り立つことがわかる。

表-7には、式(4.2)および(4.3)の k_j の係数(表-6)および式(4.5)の p_j を用いて、式(4.7)の第3項および第4項まで採ったときの τ_{\max} の値を3通りの $2\alpha\pi$ と G_{13}/G_{23} の値に対して示す。いずれもその誤差は、ほぼ1%以内で近似されていること、第4項まで採った方が第3項まで採った場合より誤差の小さいことがわかる。以上より直交異方性の弾性体の形状をアフィン変換して得られる形状と同じ形状の等方性弾性体に関する式(4.4)の係数が求まっていれば、直交異方性弾性体の最大せん断応力は簡単に求められる。

5. 結 語

切欠きを有する等方性および一つの主せん断弾性係数の方向と半無限体の平面が平行な直交異方性半無限弾性体に縦せん断荷重の作用した場合の応力分布、最大せん断応力と曲率半径との関係などを考察した。

平面弾性問題や薄板の曲げの場合と同様、最大せん断応力と曲率半径との間には、関係式(4.4)が成立すること、そして直交異方性の場合も式(4.7)が成り立ち、等方性の場合と密接な関係があることがわかる。

直交異方性の場合の応力集中は、 G_{13}/G_{23} の比の大き

さによって得られる形状がもとの形状の応力集中要素に比べて厳しくなるか、緩やかになるかにより、等方性の場合の応力集中より大きくなったり、小さくなったりする。

式(3.1)に示す一般の異方性弾性体や、直交異方性弾性体でも、主せん断弾性係数の方向と半無限体の半無限平面とが平行でない傾いた場合の解析も、本論で述べた場合と同じ考え方で行なうことができる。しかし式(3.2)や(3.4)のアフィン変換して得られる形状が対称でなくなるので、写像関数の作成は煩雑になる。

最大応力と曲率半径の関係はわかったが、隅角部の応力分布と隅角部の曲線の形との関係を考察することが、今後さらに必要と思われる。

本論文中の数値計算には、名古屋大学大型計算機センターを利用した。

参 考 文 献

- 1) Horold Liebowitz : Fracture, Volume 2, Chapter 2 Academic Press, 1968
- 2) ASTM (1964) : Fracture Toughness Testing and its Applications, No. 381
- 3) Sih, G.C. : Stress Distribution Near Internal Crack Tips for Logitudinal Shear Problems, Jour. App. Mech., 1965-3, pp. 51~58
- 4) 玉手 統・山田哲義 : 2直線割れを有する弾性体の縦せん断応力, 日本機械学会論文集 37 巻 303号, 昭46-11.
- 5) 長谷部宣男 : 三角形切欠きおよび突起を有する半無限板の応力解析, 土木学会論文報告集第194号, 1971-10.
- 6) Lekhnitskii, S.G. : Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Chapter 9 Holden-Day, 1963.

(1972. 8. 7・受付)