

# レールのねじれ（小返り）の実用解

## A PRACTICAL SOLUTION FOR THE TORSION (TILTING) OF RAIL

星野陽一\*

By Youichi Hoshino

### 1. 本論文の目的と結果

軌道構造の近代化に伴って生れたレールの弾性締結装置は列車運転の安全に最も直接的にかかわる軌道部品であるが、その機能のうち特に重要なのは車輪荷重によるレールの横転（小返り）を押えることである。したがってこれを設計するに当たっては予想される車輪荷重とレール締結装置の諸性能に対してレールがどのようにねじれ、そのために締結装置にどのような力が荷重として働くかを、あらかじめ理論的に推定することが要求される。これに対してこれまでに求められているねじれの解は上記のような使用目的のためには複雑すぎ、また従来レールの変形（力学的検討）は曲げを主とし、ねじれは第二義的にしか考えられていなかったこともある、実用式としては単純ねじりを仮定した略解がもっぱら用いられている。

本論文の検討によるとレールのような薄肉開断面に属する部材では、たとえそれが実用上の略解であっても単純ねじりと同時に生ずべき曲げねじりを無視するならば、レールのねじれについての次のような実用上も重要な意味を持つ事実が見落とされることがわかった。

(1) 曲げねじりが存在するときのねじりの中心は当然断面のせん断中心であるので、レール頭部に働く水平力（車輪横圧）がレールをねじるモーメント（トルク）を従来のようにレール底面に対してとると、ねじりの荷重値が著しく過大に見積られ、このことは締結装置の所要強度を決定する上できわめて重要である。

(2) レールの曲げねじりに伴う垂直応力（曲げ応力）はレール応力の代表として従来もっぱら考えられていて曲げ応力に十分匹敵する値に達するから、レール応力の面からもこれを無視することはできない。

### 2. レールのねじれについて

図-1においてレールにその長さ方向の  $x$  軸に対してモーメント  $M_x$  (トルク) が働く場合を考えるのに、

レールはこれによつて  $x$  軸のまわりに回転してねじれ（小返り） $\theta$  を生ずる。このねじりが単純ねじりであるならばレ

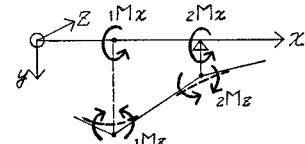


図-1

ル断面に働く断面力（応力の合力）はトルク  $M_x$  であつて、これを  $T_s$  とすると  $T_s \propto \theta' (= d\theta/dx)$  である。ところが荷重作用点から次のまくらぎ（締結点）まで、またはまくらぎとまくらぎの間には外力が存在しないから、この区間では断面力  $T_s$  は一定、すなわち  $\theta'$  は一定であつて、ねじれによってレールは図のように荷重作用点および各まくらぎで“折れる”ことになる。實際にはこれが図の点線のように丸味がつくので、この部分には断面力は上記の  $T_s$  のほかに曲げモーメント  $M_z$  が働く。これがねじれにおける曲げであつて、これを考慮したねじりが“曲げねじり”である（通常“曲げねじり”は単純ねじりによって生ずる断面の“そり”が拘束されると生ずると説明される）。

通常の棒状断面の部材では上記の曲げはきわめて局部的にしか分布しないので当然無視するのであるが、あらゆる断面形状の部材でそうであるのではないので、これを無視してよいかどうかは曲げねじりも考慮した解析結果を数値的に検討した上でなければ決定できない。

以下にこの立場からレールのねじれを考えるのに、座標軸は図-1 のものとし、レールの垂直断面  $y-z$  上面上のねじり角  $\theta$  および荷重トルク ( $M_x$ ) の正の向きは図-2 ④、反力トルクの正の向きはその逆とする。また断面力モーメント  $M_z$  および  $M_x$  のうち  $M_z$  (水平曲

\* 正会員 工博 芝浦工業大学教授 土木工学科

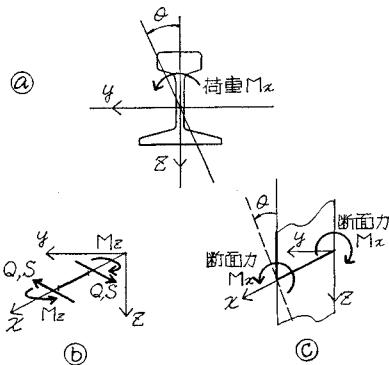


図-2

げの曲げモーメント) およびそれに伴うせん断力の正の向きは⑥図、 $M_x$ (断面力としてのトルク) は⑦図の  $M_x$  のように垂直断面の正の側において正のねじり角を生ずる向き(反対側の面ではその反対の向き)を正とする。

レールのような I 形断面の部材が図-3 のように頭部および底部の図心からそれぞれ  $h_1$  および  $h_2$  の点を中心にして角度  $\theta$  だけねじれた場合、頭部および底部はねじれ  $\theta$  のためにそれぞれ  $h_1\theta$  および  $-h_2\theta$  だけ水平変位するから、それぞれの断面 2 次モーメント(水平曲げに対する)を  $I_1$  および  $I_2$  とすると、両部分には次の曲げモーメント( $M_z$ )が働く。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= -EI_1(h_1\theta)'' \\ \mu_2 &= -EI_2(-h_2\theta)'' \end{aligned} \right\} \dots \quad (1)$$

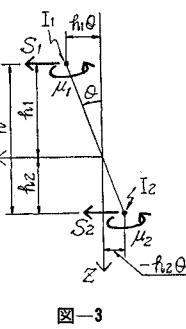


図-3

レールに働く外力が図-1 の  $M_x$  だけであるとき、レールの水平曲げに対するウェブの剛性を無視すると、上記 2 つの  $M_z(\mu_1, \mu_2)$  はつり合っていなければならぬから、この 2 つの曲げモーメント  $\mu_1, \mu_2$  はいわゆる“双モーメント”(バイモーメント)である。すなわち

$$\mu_1 + \mu_2 = 0 \quad \therefore I_1 h_1 = I_2 h_2 \quad \dots \quad (2)$$

式(2)の条件を満足する点は断面のせん断中心すなわち部材がねじれを伴わずに純粹に曲がったときのせん断力(それぞれ  $I_1$  および  $I_2$  に比例する)の中心にはかならないから、曲げねじりが存在するときのねじりの中心は断面のせん断中心である。

いま  $h = h_1 + h_2$  とすると式(2)を満足するねじりの中心(せん断中心)の位置は

$$h_1 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} h, \quad h_2 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} h \quad \dots \quad (3)$$

またこのときのねじりの断面力は

$$\bullet \text{単純ねじりの断面力 } T_s = C\theta' \quad \dots \quad (4)$$

( $C$  は断面のねじり剛性)

のほかに上記の曲げモーメント  $\mu_1, \mu_2$  に伴う次式のせん断力  $S_1, S_2$  のモーメントが存在する。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{d\mu_1}{dx} = -EI_1(h_1\theta)''' \\ S_2 &= \frac{d\mu_2}{dx} = -EI_2(-h_2\theta)''' \end{aligned} \right\}$$

上記で  $I_1 h_1 = I_2 h_2$  であるから 2 つのせん断力  $S_1, S_2$  は偶力をなしトルク  $M_x = S_1 h (= -S_2 h)$  を持つ。これが曲げねじりの断面力であって

• 曲げねじりの断面力

$$T_w = S_1 h = -E \frac{I_2}{I_1 + I_2} h^2 \theta''' = -Dh^2 \theta''' \quad \dots \quad (5)$$

ただし  $D = E \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}$ ,  $Dh^2$ : 曲げねじり剛性

図-1 の例図でもわかるように、部材がその長さの両端(固定端を除く)以外の点に外力をうける場合は必ず曲げねじりを伴うので、ねじりの断面力は式(4), (5)の 2 種類が存在し、ねじりの中心は断面のせん断中心である。

理論によると曲げねじり(図-1 の点線の丸味づけの部分)は上記 2 種類のねじり剛性  $C$  および  $Dh^2$  の比  $\alpha = \sqrt{C/Dh^2}$  によって  $e^{-\alpha x}$  曲線で減衰(集中力作用点を  $x=0$  として)するが、数値計算によるとレールのような薄肉開断面またはそれに近いものではその他の断面に比して  $C/Dh^2$  が小さいため、曲げねじりの断面力  $T_w$  の値が単純ねじりのそれの  $T_s$  に対して無視できない値になり、またその分布範囲もまくらぎスパンに匹敵する長さにおよぶことがわかる。

### 3. レールのねじれの基礎方程式とその近似解

いま本論文の目的からいって、一定間隔に配置された弾性締結装置によって底部を支持されたレールの頭部の 1 点に車輪荷重(垂直および水平)が働く場合の横変形(水平曲げおよびねじれ)を考える。荷重位置は通過車輪が 1 つの締結装置に最大の負担を与える位置すなわち締結点(まくらぎ)直上とする。

図-4 においてレールに車輪荷重  $P, H$  が働くときレールの変形による底部の垂直変位  $z$ 、水平変位  $y$  および回転  $\theta$  に対してそれぞれ反力  $F_z, F_y$  および  $M_\theta$  が働くが、荷重  $P, H$  および反力  $F_y$  は断面のせん断中心 A を通らないから、これを A 点を通る力と、これに対するモーメントの 2 つに分けると、前者によっ

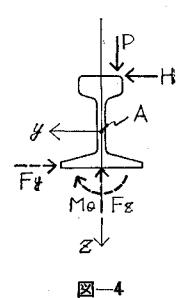


図-4

てレールには純粹の曲げ（ねじれを伴わない）を生じ、後者によって純粹のねじれ（曲げを伴わない）を生ずる。したがっていまはレールのねじれを考えるから、外力は後者 ( $P, H, F_y$  のせん断中心に対するモーメント) および反力  $M_\theta$  を考える。

各まくらぎ位置に上記の外力（モーメント  $M_x$ ）をうけてねじれているレールにおいて、まくらぎとまくらぎの間の任意のスパン  $i$  における断面力（トルク  $M_x$ ）を  $T_i$  とすると、スパン内には外力が存在しないから  $T_i$  は一定であり、この  $T_i$  は式(4), (5) の和である。すなわち

$$-Dh^2\theta''' + C\theta' = T_i \quad (\text{一定})$$

これを書き替えて

$$\left. \begin{aligned} \text{スパン } i \text{ に対し: } \theta''' - \alpha^2\theta' &= -\frac{\alpha^2}{c}T_i \\ \text{ただし } \alpha &= \sqrt{\frac{c}{Dh^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)がレールのねじれに対する基礎方程式であって、これを各スパン両端における連続条件を用いて解けばレールのねじれ  $\theta$  が求まる。八十島博士<sup>1)</sup>はこの方法によって式(6)を解いたが、同博士は各種形式のレールにおけるねじれの特性を比較するためにこれをされたので特別な条件におけるものが数値計算されているにすぎず、解の形が複雑であるため本論文の意図する自由な数値を与えて各種の計算を行なうような目的には添いにくい。このため上記の目的にもっと適した形の近似解を以下に求めることにする。

式(6)の解は

$$\theta = A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x + \frac{T_i}{c}x + B$$

ここでスパン  $i$  の左端を  $x$  の原点として各積分定数を原点における  $\theta, \theta', \theta''$  の値  $\theta_i, \theta'_i, \theta''_i$  におき替える<sup>2)</sup> と上式は

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_i + \frac{\theta'_i}{\alpha} \sinh \alpha x + \frac{\theta''_i}{\alpha^2} (\cosh \alpha x - 1) \\ &\quad + \frac{T_i}{\alpha c} (\alpha x - \sinh \alpha x) \end{aligned} \quad (7)$$

いまは荷重は集中荷重がただ1個働く場合を考えるので、これによるレールのねじれはごく少數のまくらぎスパンの間に分布するにすぎない。したがって変形は集中荷重作用まくらぎから次のまくらぎまでの第1スパンにおけるものを求めることうを主眼とする。このときレール支持のまくらぎ間隔を  $a$  とすれば、荷重作用点を原点にしてスパン端  $x=a$  からある程度以上離れた断面における断面力またはそれ以遠のまくらぎ反力を第1スパンの変形に対してわずかの影響しか持たないから、これらの力は必ずしも実際には即さない適当な値を想定してもよい。このためにレールの長さを荷重点を中心にしていま

かりに片側  $l=3a$  程度とし（この点の断面力=0）、レールはこの端部だけが支持されている（支持条件は特に限定しない）場合の  $\theta$  を  $\delta$  で表わすと（以下図-5 参照），

変形の対称性によって式(7)  $\theta_i = \delta_i = 0$

また原点に働く外力（荷重-反力）を  $L_0$  とすれば、原点における力のつり合い  $L_0 + 2T_0 = 0$  から

$$\text{式 (7)} \quad T_i = T_0 = -\frac{1}{2}L_0$$

したがってこのレールのねじれ  $\delta$  は

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 + \frac{\delta_0''}{\alpha^2} (\cosh \alpha x - 1) \\ &\quad - \frac{L_0}{2\alpha c} (\alpha x - \sinh \alpha x) \end{aligned}$$

上式右辺第2項の  $\delta_0''$  は原点における曲げねじりを表わす量（ねじれによる曲げ  $h_{1,2} \times \delta_0$  の曲率）であるが、式(5)で表わされる曲げねじりの断面力  $T_w = -Dh^2\delta'''$  は外力作用点からの減衰が著しいので、レールにおいては  $x=a$  (第1スパン端に相当する位置) では0と見なしてよいとすると、上記  $\delta$  式から

$$(\delta''')_{x=a} = \alpha \delta_0'' \sinh \alpha a + \frac{\alpha^2 L_0}{2c} \cosh \alpha a = 0$$

レールにおいては  $\alpha a \gg 1$  であって  $\sinh \alpha a = \cosh \alpha a$  としてよいとすると

$$\frac{\delta_0''}{\alpha^2} = -\frac{L_0}{2\alpha c}$$

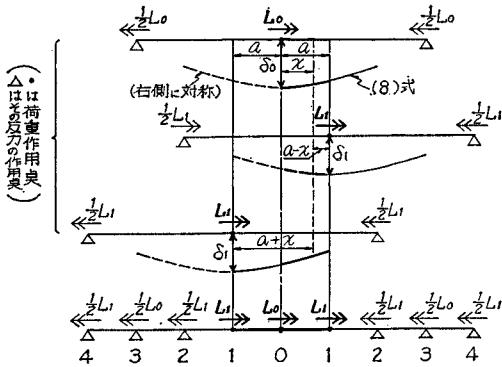
以上の各値を用いて、たとえば  $x \leq 2a$  において

$$\delta = \delta_0 - \frac{L_0}{2\alpha c} (\alpha x + e^{-\alpha x} - 1) \quad (8)$$

実際のレールはまくらぎ間隔  $a$  をもって支持されており、 $x=a$  にはさらに外力  $L_1$  ( $L_0$  に対する第1まくらぎの反力) が働くから、この場合  $L_1$  作用点を原点とした変形は式(8)において  $\delta_1, L_0$  を  $\delta_1, L_1$  としたものであり、この式の原点を式(8)と同じ  $L_0$  作用点に移すと  $(\delta_1, L_1)$  式では  $x$  を  $(a-x)$  とすればよい。

$L_0$  の反力  $L_1$  は  $L_0$  の左側にも働くから、これは同じ  $(\delta_1, L_1)$  式で  $x$  を  $(a+x)$  とすればよい。

以上3種の変形およびそれにおける外力は図-5 のとおりであって、これを重ね合わせたものをもって連続したレールに間隔  $a$  をもって  $L_1, L_0, L_1$  の3力が働く場合の  $L_0 \sim L_1$  間の変形と考える。もちろん図-5の上段の3本のレールはそれぞれに3, 4, 2点を端部（断面力0）としており、連続レールとはこれら各点における断面力も外力（反力）も相違するが、上記の仮定から導いた後出式(10)の外力  $L_0 \sim L_1$  間の変形式によると、レールにおいては左端に  $L_0$  が働くスパンの右端における外力  $L_1$  でさえこのスパンの変形に対して無視しうる程度の影響しか持たない<sup>3)</sup>ので、さらにそれより遠い



图—5

2, 3, 4 点の断面力ないしは外力が実際と異なることは問題にしなくてよい。

式(8)と、これに上記の  $L_1$  に対する書き替えを行なった2つの  $\delta$  を加え合わせると

ただし、 $\delta_0$ 、 $\delta_1$  はそれぞれ  $L_0$ 、 $L_1$  に比例するから、  
 $\delta_1 = (L_1/L_0)\delta_0$  とする。

式(9)で  $x=0$  とおいたものは  $L_0$  作用点の  $\theta$  すなわち  $\theta_0$  であって

$$\theta_0 = \left(1 + 2\frac{L_1}{L_0}\right)\delta_0 - 2(\alpha a - 1)\frac{L_1}{2\alpha c}$$

ただし  $e^{-\alpha a} \ll 1$

上式と式(9)から $\delta_0$ を消去し、また $L_0$ をもとの $T_0$ に戻す( $T_0+2L_0=0$ )と

本式における仮定  $(\delta''')_a = 0$  は後記式 (25), (26) によると  $e^{-aa} = 0$  (ただし  $\times \sinh aa, \cosh aa \neq 0$ )としたことであり、本近似解はこの仮定が成立するとき有限って有効である。レールについてはこの仮定が妥当であり、また上式右辺第 3 項は省略してよいことがわかる。

第2スパンではその左端 ( $x=a$ ) を原点とする座標  $\xi$  に対して式 (7) が成立し、式中の定数は

において  $\theta_a, \theta_{a'}, \theta_{a''}$  は式 (10) およびその微分係数で

$x=a$  としたものである。このときの  $\theta(\xi)$  を  $\phi$  で表わすと第2スパンでは

$$[a \leq x \leq 2a, \quad (0 \leq \xi \leq a)]$$

$$\varphi = \theta_0 + \frac{T_0}{\alpha f} \{ \alpha(a+\xi) - 1 \}$$

$$-\frac{L_1}{\alpha c} \left( \alpha \xi + \frac{1}{2} e^{-\alpha \xi} \right) \dots \dots \dots \quad (11)$$

式(10)を導くとき外力は  $L_0$  と  $L_1$ だけを考えたので、上式はスパン右端の外力  $L_2$  の項を持たないが、式(10)によるとレールの場合スパンの変形量に対しては右端の外力(θ式の  $L_1$  の項)を無視してよい。

#### 4. 式(10), (11) の $L_1$

式(10), (11)を導くときの  $L_0$ ,  $L_1$  は荷重であったが、いまの場合原点に働くねじれの荷重(モーメント)を  $M_0$ 、これに対して間隔  $a$  の各まくらぎに働くモーメント反力を  $R_0$ ,  $R_a$ ,  $R_{2a}$ , … とすれば、反力は荷重と反対の向きを正とすることに定めたから

$$L_0 = M_0 - R_0, \quad L_1 = -R_a, \quad L_2 = -R_{2a}, \quad \dots$$

レールに働く荷重は頭部に働く車輪荷重  $P, H$  であるからねじれの荷重  $M_0$  はこれのせん断中心に対するモーメントであり、レールには同時にせん断中心に働く  $P, H$  によって曲げを生ずる。このとき レールの支持ばね定数を

- ・ねじれによる底部の単位回転角に対して、レールの単位長さ当たり  $k(t)$ 、1 締結当たり  $ak$
  - ・曲げによる底部の単位水平変位に対して、レールの単位長さ当たり  $K(t/cm^2)$ 、1 締結当たり  $aK$

すると、レールに生ずる上記2つの変形に対して次の2つのモーメント反力を生ずる。ただし  $P$  による垂直曲げに対する反力はレールの対称軸上に働きねじりに対してモーメントを持たない。

$i$  まくらぎの  $\begin{cases} \text{ねじれ } \theta_i \text{ に対し } ak\theta_i \\ \text{曲げ } y_i \text{ に対し } aKy_i \times h_i \end{cases}$

したがって

$$R_a = ak\theta_a - aky_a \times h_2$$

ただし、ねじれによる底部水平変位  $h_2\theta_i$  に対する反力のモーメント  $aK(h_2\theta_i) \times h_2$  は省略する。この反力モーメントの  $ak\theta_i$  に対する比  $k : Kh_2^2$  は現在一般に用いられている締結装置では 10:1 の程度である。

以上によるとねじれの反力  $R$  には式 (10), (11) で与えられるねじれ  $\theta$  のほかに水平曲げ  $y$  が関係するので、水平荷重  $H$  によるレールの曲げ  $y$  は次式で与えられるとする。



は佐藤<sup>3)</sup>が提示した次のものである。まずレールのねじれを“単純ねじり”と考えて“曲げねじり”を無視する。すなわちねじれの断面力のうちの式(5)  $T_w=0$  とし、またレールのねじれの中心をレール底面と考える。このとき底面に働く水平反力はねじれに関係しないことになる。

このときの基礎方程式は荷重  $M_0$ 、断面力  $T_s=c\theta'$  および支点反力  $ak\theta_i$  のつり合いから

$$-c\theta' = \frac{M_0}{2} - \sum_i ak\theta_i, \quad \theta_i \text{ は各支点のねじり角}$$

解は上式を隣接する両スパン端において  $\theta$  が等しいこと、およびあまり長くない延長内のあるまくらぎで  $\theta_j=0$  になることを条件として解くと次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} [\theta_i]_A &= t_i(\lambda) \frac{a}{c} M_0 \\ \lambda &= \frac{a^2 k}{c} \\ t_i=j \text{ を适当に仮定することによって} \\ \text{定まる } \lambda \text{ の関数} \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

また  $\theta$  の一般的な状況を知るために別解として、前記の仮定によるねじれで反力が各まくらぎごとではなくて連続分布するとして、後記式(26)のティモシェンコの基礎方程式(b)において上記の基本仮定にしたがって  $\theta''=0$ ,  $h_2=0$  とした式:  $-c\theta''+k\theta=0$  から得られる次の解が提示されている。

$$[\theta]_B = \frac{r M_0}{2k} e^{-rx}, \quad r = \sqrt{\frac{k}{c}} \dots (21)$$

### 式(17) $n$ の求め方

解式(10), (11)に含まれる未知定数  $\theta_0$ ,  $T_0$  を決定する条件式のうちの式(19)には式(17)で示される未知量  $n$  が含まれている。この  $n$  を決定するためにはあらかじめ全支点のねじり角  $\theta_a$ ,  $\theta_{2a}$ , … がわかっていないなければならないが、数値計算によると  $n$  の値に相当大きな相違があつても式(16), (19)から得られる  $\theta_0$ ,  $T_0$  の値にはきわめてわずかの差しか生じない。このため実際の数値計算上は  $n$  は比較的大まかな推定値であつてよい。またこの値は  $\theta_a$  以下 ( $x>a$ ) すなわち荷重作用点から十分離れた部分のねじり角に関するものであり、この区間ではねじれに関する(4), (5)両式の2つの断面力  $T_w$ ,  $T_s$  のうちの  $T_w$  は  $T_s$  に比して軽微である。この  $T_w$  は図-3に記号  $\mu$  ( $\mu_2=-\mu_1$ ) で示した“1つの断面上でたがいにつり合った2つのモーメント”に関するものであり、サンプナンの原理によってこれによる変形(応力)は速かに減衰する局部現象である。このことからいうと  $T_w$  を無視した式(20), (21)の解は、これが支配的である荷重作用点の近傍さえ除外するならば、それから離れて逆に  $T_s$  が支配的になるたとえば  $x>a$

の区間に対しては十分な近似を持つことが推定される(後出 図-10~12 参照)。

式(17)  $n$  についての上記のような2つの特性を利用して、本解では  $n$  の値を式(20), (21)の実用解を利用して求めることにする。このとき計算によると式(20)によるものと式(21)によるものとでは  $n$  の間にある程度の差があるから両者の平均をもって  $n$  と考える。

式(20)からは

$$n_A = 1 + \frac{1}{t_1} (t_2 + t_3 + \dots) \dots (22)$$

式(21)による場合は、いま考えている  $\theta$  はねじり角そのものではなくて、それによる反力であるから

$$\theta_a \text{ (による反力)} \propto \int_{0.5a}^{1.5a} \theta dx \propto e^{-0.5ax} - e^{-1.5ax}$$

$\theta_{2a}$  以下の合計

$$(\text{による反力}) \propto \int_{1.5a}^{\infty} \theta dx \propto e^{-1.5ax}$$

したがって

$$n_B = \frac{e^{-0.5ax}}{e^{-0.5ax} - e^{-1.5ax}} \dots (23)$$

### $\theta$ の計算方法

以上によるとレールのねじれ  $\theta(\varphi)$  は次の順序によつて求められる。

(1) 式(22), (23)によって  $n$  を求める。

(2) 式(16), (19)を連立して  $\theta_0$ ,  $T_0$  を荷重  $M_0$  で表わす(締結装置設計上は  $T_0$  は求めなくてよい)。

(3)  $\theta$  の分布の形やレール応力を求める場合は上記で求めた  $\theta_0$ ,  $T_0$  および式(14)  $L_1$  を式(10), (11)または後記式(25), (26)に入れる。

## 6. 数値計算例

本計算例はレール弹性締結装置の設計を目的として対象を一般軌道ではなくて現在わが国で標準的に用いられている形の弹性締結軌道とする。

### (1) レール

水平曲げに対してウェブの剛性を頭部および底部のそれに対して無視し、また頭部および底部を長方形であるとして 50 N レールの断面を図-8 とする。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{25.4}{12} \times 6.5^2 = 89 \text{ cm}^4 \\ I_2 &= \frac{18.4}{12} \times 12.7^2 = 247 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right\} I = 336 \text{ cm}^4$$

$$h = 12.5 \text{ cm}$$

せん断中心の位置は式(3)により

$$h_2 = \frac{89}{336} \times 12.5 = 3.3 \text{ cm}$$

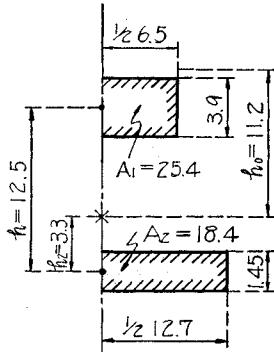


図-8

また

$$h_0 = 15.2 - 3.3 - \frac{1}{2}1.45 = 11.2 \text{ cm}$$

曲げねじり剛性

$$Dh^2 = 2100 \text{ t/cm}^2 \times \frac{89 \times 247}{336} \times 12.5^2 \\ = 21.5 \times 10^6 \text{ t} \cdot \text{cm}^4$$

ねじり剛性  $c$  の値はレールのような複雑な断面ではこれを理論的に求めることが困難であるが、いまは国鉄で用いられている次の値を用いる。

$$c = 0.16 \times 10^6 \text{ t} \cdot \text{cm}^2$$

上記の  $Dh^2$  および  $c$  に対し

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{Dh^2}} = \sqrt{\frac{0.16}{21.5}} = \frac{1}{11.5} \text{ cm}$$

## (2) 締結装置

まくらぎ間隔  $a = 60 \text{ cm}$  とする。

軌道の横ばね定数は佐藤裕博士が明らかにしたところによると、水平荷重が左右レールにそれぞれ反対の向きに同じ大きさのものが働くか、または“直結軌道”（道床がなく、レールが直接コンクリート床に取りつけられているもの）の場合には水平荷重によってまくらぎは移動しないと考えて、ばね定数は締結装置のばねだけを考えればよいが、軌道の設計上問題になるような“異常横圧”は片側レールに偏して働くから、この場合は直結軌道でない限り、まくらぎが道床中を移動して“道床ばね”がこれに加わり、また反対側レールも変形する。このとき締結部のばね定数を  $K_1$ 、道床ばね（片側レール当たり）を  $K_2$  とすると、片側レールだけに水平荷重  $H$  が働いたときの荷重側レールのたわみは佐藤博士<sup>4)</sup>によると

$$y = \frac{\beta_1 H}{2 K_1} + \frac{1}{2} \left\{ f_1 + \left( 1 + \frac{K_1}{K_2} \right)^{3/4} f_2 \right\} \quad \dots \dots \dots (24)$$

ただし

$$\begin{cases} f_1 = e^{-\beta_1 x} (\cos \beta_1 x + \sin \beta_1 x) \\ f_2 = \text{上式で } \beta_1 \text{ の代りに } \beta_2 \text{ としたもの} \end{cases}$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{K_1}{4EI}}, \quad \beta_2 = \sqrt[4]{\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{1}{4EI}}$$

片側レールだけに荷重が働くときの  $y$  は式 (13) ではなくて上式である。

式 (24)において弹性締結軌道を考えると

弹性締結部の横ばね  $K_1 = 1$  締結当たり  $25 \text{ t/cm}$   
道床ばね  $K_2$  はこの  $1/2$  の程度であるから

$$\beta_2 = \frac{1}{1.32} \beta_1$$

$\beta_1$  と  $\beta_2$  の相違は上式の程度であるから式 (24) に含まれる 2 つの関数  $f_1, f_2$  はたがいに比較的近似した周期を持ち、これらを 1 つの関数すなわち共通の  $\beta$  を持つ関数で表わすことになると、式 (24) の  $f_1$  と  $f_2$  のそれぞれの係数に着目して共通の  $\beta$  を  $\beta_1$  に重さ  $(1 + K_1/K_2)^{3/4} = 2.28$  を付した  $\beta_1$  との平均値とする。

$$\beta = \frac{1}{1+2.28} \left( \beta_1 + 2.28 \times \frac{\beta_1}{1.32} \right) = 0.83 \beta_1$$

$\beta$  がこの値になる  $K$  は、 $K$  が  $\beta^4$  に比例することより

$$K = (0.83)^4 K_1 = 0.48 K_1$$

式 (24)において  $x=0$  のとき

$$y_0 = \frac{\beta_1 H}{2 K_1} \times 1.64$$

となるが、上記の  $K, \beta$  を用いたときの  $y$  は

$$\frac{y}{(24) \text{ 式 } y} = \frac{0.83}{0.48} = 1.73$$

となり、上記の  $K, \beta$  を用いた近似式はやや大きな (5% 大)  $y$  を与えるが、 $y$  の分布曲線は式 (24) に対してきわめて高い近似を持つことがわかる。

偏った横圧が働いてまくらぎが移動する場合の  $y$  に上記の近似式を適用することになると、その場合の  $K$  は

$$K = 25 \text{ t/cm} \times \underbrace{\frac{1}{60 \text{ cm}}}_{(K_1)} \times 0.48 = 0.20 \text{ t/cm}^2$$

したがってまた

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{0.20}{4 \times 2100 \times 336}} = \frac{1}{61} \text{ cm}$$

レールのねじれ（小返り）に対する支持ばね定数  $k$  については上記のような配慮は必要なく

“軌道パッド”  $120 \text{ t/cm}$ , 幅  $12.5 \text{ cm}$

レール押え（クリップ） $2.4 \text{ t/cm}$

押え間隔  $8.5 \text{ cm}$

のとき

$$k = \left( \frac{120}{12} \times 12.5^2 + \frac{2.4}{2} \times 8.5^2 \right) \times \frac{1}{60} = 27.5 \text{ t}$$

また単純ねじりだけを考えた式 (20), (21) 実用解における係数  $\lambda$  および  $r$  は

$$\lambda = \frac{a^2 k}{c} = \frac{60^2 \times 27.5}{160000} = 0.62$$

$$r = \sqrt{\frac{k}{c}} = \sqrt{\frac{27.5}{160000}} = \frac{1}{76} \text{ cm}$$

### (3) 計 算

まず式(17)のnを式(22), (23)によって求める。

式(22)の各 $t_i$ は $\lambda=0.6$ ,  $t_0=0$ のとき

$$t_1=0.282, t_2=0.131, t_3=0.059, t_4=0.023 \quad (\text{文献 } 3))$$

$$\therefore n_A = 1 + \frac{1}{0.282} (0.131 + 0.059 + 0.023) = 1.76$$

式(23)では

$$e^{-0.5ar} = 0.67, e^{-1.5ar} = 0.31$$

$$\therefore n_B = \frac{0.67}{0.67 - 0.31} = 1.86$$

両者の平均をとると $n=1.8$

このnを用いて式(16), (19)から $\theta_0$ ,  $T_0$ を求め、これを式(10), (11)に入れて $\theta_a$ ,  $\varphi_a$ を求める

$$\varphi_a/\theta_a = 0.24/0.58 = 0.41$$

これに対し上記の $n=1.8$ を定める基準とした式(22), (23)における $\theta_{2a}/\theta_a$ は

$$\left. \begin{aligned} \text{式 (22)} \quad & \frac{[\theta_{2a}]}{[\theta_a]} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{0.131}{0.282} = 0.46 \\ \text{式 (23)} \quad & \frac{[\theta_{2a}]}{[\theta_a]} = \frac{e^{-2ar}}{e^{-ar}} = \frac{0.206}{0.473} = 0.44 \end{aligned} \right\} \text{平均}$$

すなわち $n=1.8$ として求められた $\varphi_a/\theta_a(0.41)$ はこのnを定めた $\theta_{2a}/\theta_a(0.45)$ より約10%小さいから、 $n$ をいま少し小さくとて

$$n=1.7$$

とする。

このnを式(19)に入れ、式(16)との連立から $T_0$ ,  $\theta_0$ を求める

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= -0.357 M_0 \\ \theta_0 &= \frac{M_0}{3820 \text{ t} \cdot \text{cm}} \end{aligned} \right\} \dots \quad (\text{a})$$

これを式(10), (11)に入れてスパン $0 \leq x \leq a$ および $a \leq x \leq 2a$ のねじり角 $\theta$ および $\varphi$ を求める

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta}{\theta_0} &= 1 - 0.098(\alpha x + e^{-\alpha x} - 1) \\ &\quad + 0.022 \times 0.011 \cosh \alpha x \\ \frac{\varphi}{\theta_0} &= 0.59 - 0.098 \alpha \xi \\ &\quad + 0.044 \left( \alpha \xi + \frac{1}{2} e^{-\alpha \xi} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (\text{b})$$

なお $\varphi$ 式に含まれる係数 $m$ すなわち各まくらぎのモーメント反力に対する水平変位 $y$ の影響係数は

$$m=0.63 \dots \quad (\text{c})$$

### $T_0$ , $\theta_0$ について

反力が連続分布しているときは原点における2つの $T_0$ が荷重 $M_0$ とつり合うから $T_0=-0.5 M_0$ であり、

これと式(a)  $T_0$ の値との差は荷重作用点のまくらぎのモーメント反力( $ak\theta_0$ )と、レールの水平たわみによる水平反力のモーメント( $h_2 \times aK_y$ )である。

実用上最も重要な値である $\theta_0$ (荷重作用点のねじり角)は従来の実用解式(20), (21)においては

$$[\theta_0]_A = t_0 \frac{a}{c} M_0 = \frac{M_0}{4440 \text{ t} \cdot \text{cm}} \quad (\lambda=0.6, t_0=0.601)$$

$$[\theta_0]_B = \frac{r}{2k} M_0 = \frac{M_0}{4180 \text{ t} \cdot \text{cm}}$$

これと本解の式(a)を比較すると

$$[\theta_0]_A/(a) \text{ 式 } \theta_0 = 0.86$$

$$[\theta_0]_B/(a) \text{ 式 } \theta_0 = 0.91$$

すなわち $\theta_0$ については従来の解法と本解とは近接した値を与える。

ところがこの $\theta_0$ によって荷重作用点の締結装置に働くモーメント荷重はそれぞれの解で

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= ak\theta_0 = \frac{ak}{3820} M_0 \\ [R_0]_A &= \frac{ak}{4440} M_0 \\ [R_0]_B &= 2k \int_0^{a/2} [\theta] dx = 0.326 M_0 \end{aligned} \right\}$$

本解と従来解の比は

$$[R_0]_A/R_0 = 0.86$$

$$[R_0]_B/R_0 = 0.326 \frac{3820}{1650} = 0.75$$

ここで注意すべきは、従来の実用解のうちの式(21)(反力を連続分布と仮定)であって、この解は荷重作用点の $\theta_0$ は本解と9%しか相違しないのに、それによる反力の値は本解と25%も相違することである。これは後記の図-10に見るよう従来の実用解 $[\theta]$ は特に荷重作用点の近く( $x < a$ )において $\theta$ の分布の形が本解の $\theta$ と大きく相違するためである。

いま1つレールのねじれの計算における問題点は荷重 $M_0$ のとり方であって、従来はねじれの中心をレール底面と考え、したがって水平荷重のモーメントをレール底面に対してとるが実際は断面のせん断中心(レール底部の図心から $h_2=3.3 \text{ cm}$ )を中心として生じるから、水平荷重のモーメントはこれに対してとらなければならぬ。従来の計算法におけるこのための誤差は図-9により $15.3 \text{ cm}/11.2 \text{ cm} = 1.37$ 、すなわち上記の同じ $M_0$ に対する $[R_0]/R_0$ と逆に37%だけ過大である。この誤差は図-9のように水平荷重 $H$ の他に垂直荷重 $P$ がレールの中心から $H$ 側に偏心することを考えるとさらに大きくなり、たとえば図において $P=10 \text{ t}$ ,  $H=6 \text{ t}$ ,  $e=3 \text{ cm}$ とすると

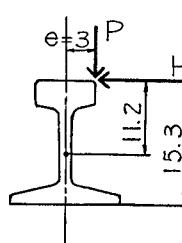


図-9

$$\left. \begin{array}{l} \text{せん断中心に対するモーメント:} \\ 6t \times 11.2 \text{ cm} - 10t \times 3 \text{ cm} = 37.2 \text{ t} \cdot \text{cm} \\ \text{レール底面に対するモーメント:} \\ 6t \times 15.3 \text{ cm} - 10t \times 3 \text{ cm} = 61.8 \text{ t} \cdot \text{cm} \end{array} \right\}$$

両者の比: 1.66

この場合前記の  $\theta$  の分布に対する誤差と合わせると

$$\left. \begin{array}{l} [R_o]_A/R_o = 0.86 \times 1.66 = 1.43 \\ [R_o]_B/R_o = 0.75 \times 1.66 = 1.25 \end{array} \right\}$$

従来の計算法では締結部のモーメント荷重が上記の値だけ過大に算出されることになる。

式 (a) に算出された  $\theta_0$  に関する重要なことは、本解法 (および一般に行なわれている  $y$  の解法) では  $h_2\theta \ll y$  として、 $y$  に対して  $\theta$  の影響を無視したことである。このことを式 (a)  $\theta_0$  と式 (13)  $y_0$  を用いてチェックすると

$$h_2\theta_0 : y_0 = \frac{h_2}{3820} M_0 : \frac{\beta}{2Kh_0} M_0 = 0.24 : 1$$

すなわち 1 に対して 0.24 を無視したのであって、このような大きな省略は通常は許されない。したがって式 (13) の  $y$  の解には当然ある程度の誤差が含まれる。しかしこれをねじれの側から見ると  $\theta$  に関する各算式の中で  $y$  は一種の修正項にすぎないから、その誤差が  $\theta$  の算出値に及ぼす影響は比較的軽微である。

いまかりに上記の無視によっても  $y$  および  $\theta$  の値には比較的小さな誤差しかないとすれば、締結装置に対する水平荷重 (反力  $akY$ ) は従来の計算方法では実際はレール底部が  $(y - h_2\theta)$  だけ変位するのを  $y$  することによって荷重が 24% 過大に見積られることになる。

### ねじり角 $\theta(\varphi)$ の分布

式 (b) によってねじり角の分布を求めるとき表-1 および図-10 のようになる。なお同表および図には従来の実用解  $[\theta]$  (式 (20), (21)) および水平たわみ  $y$  を表-1

$x$	0	10 cm	20	30	45	(a) 60	70	90	(2a) 120
$\theta/\theta_0$	1	0.97	0.91	0.84	0.71	0.59	0.55	0.45	0.30
$[\theta]_A/\theta_0$	0.86	—	—	—	—	0.40	—	—	0.19
$[\theta]_B/\theta_0$	0.91	0.80	0.70	0.62	0.50	0.41	0.37	0.28	0.19
$y/y_0$	1	0.98	0.91	0.83	0.67	0.52	0.42	0.25	0.07

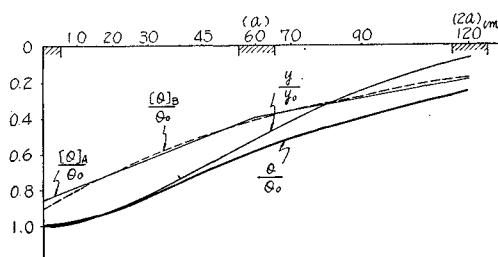


図-10

併記した。

図によるとレールのねじれ  $\theta$  について次のことがいえる。

(1) レールの横変形 ( $\theta$  および  $y$ ) はその主要部分は図示された範囲内 (荷重作用点から片側でまくらぎ 2 スパン) にある。 $\theta$  については第 2 スパン端 ( $x=2a$ ) においても変形量  $\varphi_a$  はなお相当量 (最大値の 30%) を持つが、第 2 スパン中央付近から先では  $\theta$  の分布が直線に近く応力の変化がきわめて緩慢な部分である (後記の図-12 参照) から力学的の意味は少ない。

(2) 本解の  $\theta$  と従来解の  $[\theta]$  とを比較すると、図示の範囲の両端すなわち荷重点の  $\theta$  および荷重作用点から十分離れた第 2 スパン後半以降の  $\theta$  の分布の形において両者はよく近似するが、最も重要な荷重作用点に続く第 1 スパンにおいて変形量がかなり相違し、また分布曲線が両者において曲率の正負を逆にしている。

(3) 変形の主要部分が図示された範囲であれば、その中で反力は図に影線を施した区間にしか働くかないで、これを全長に分布した力と考えることは無理のように思われる。しかし図に示された 2 つの  $[\theta]$  は一方は集中力、他方は分布力を考えたものであるのに両者がきわめてよく一致していることから見ると、本例のような相当極端な場合でさえ集中力を分布力と仮定する従来の慣例は十分有効であることを示している。ただしこれは変形量についてのことであって、一般に変形量についての近似式がその微分係数で与えられる断面力 (応力) に対してまで妥当するとは限らないから注意が必要である。

ねじれ  $\theta$  が上記の分布をするとき、各まくらぎに働くモーメント反力をすなわち締結部に働くモーメント荷重は荷重作用点:

$$ak\theta_0 = 1650 \times \frac{M_0}{3820} = 0.43 M_0$$

次位まくらぎ:

$$ak\theta_a = 1650 \times \frac{M_0}{3820} \times 0.59 = 0.26 M_0$$

第 3 まくらぎ:

$$ak\varphi_a = 1650 \times \frac{M_0}{3820} \times 0.26 = 0.11 M_0$$

.....(d)

式 (d) の各反力を合計すると  $M_0=1$  に対する反力が  $0.43 + 2(0.26 + 0.11) = 1.17$

となり、第 3 まくらぎまですでに反力が荷重を超過することは一見奇異に感じられるが、これは車輪荷重によってねじれと同時に水平変位を生じその水平反力が荷重と同じ正のモーメントを持つので、レールの全長における両者の合計は

$$\left(1 + \frac{h_2}{h_0}\right) M_0 = 1.29 M_0 \text{ (図-7 参照)}$$

これに対していまの場合  $n=1.7$ , すなわち  $\sum \theta_{2d} \sim / \theta_d = 0.7$  と考えたから、反力の合計は

$$0.43 M_0 + 2 \times 1.7 \times (0.26 M_0) = 1.31 M_0$$

すなわち略算の誤差を考慮すれば外力はつり合っているのである。

## 締結装置の試験荷重

締結装置をただ1個とり出してその強度を室内実験する場合、その試験荷重を現場軌道のレールが所定の荷重をうけたときの締結部反力と同じ値にする条件を求める。

現場軌道のレールが荷重として水平力  $H$  およびトルク  $M_0$  をうけたとき、レール底部の回転（小返り）角  $\theta_0$  および水平変位  $\eta_0$  は本計算例の場合次のとおりである。

$$\theta_0 = \frac{M_0}{3820 \text{ t} \cdot \text{cm}}$$

$$\eta_0 = \eta_0 - h_2 \theta_0 = \frac{\beta}{2K} H - \frac{h_2}{3820 \text{ t.cm}} M_0$$

1 個の締結装置に装着されたレール片の高さ  $h_t$  の点に試験荷重として水平力  $H_t$  をかけたとき上記と同じ値の回転および水平変位を生ずるとすれば、この試験装置における荷重と反力のつり合いから

反力  $ak\theta_0$ =荷重  $H_t h_t$ , 反力  $aK\eta_0$ =荷重  $H_t$   
このつり合い式に上記の  $\theta_0$ ,  $\eta_0$  を入れて

$$\left. \begin{aligned} h_i H_t &= \frac{ak}{3820 \text{ t.cm}} M_0 \\ H_t &= \frac{a}{2} \beta H - \frac{aKh_2}{3820 \text{ t.cm}} M_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(e)$$

式 (e) によって現場荷重  $H$ ,  $M_0$  に相当する試験荷重  $H_t$  とその作用高さ  $h_t$  (レール底部厚さの中央から) が求められる。

(例) 現場荷重を図-9において  $P=10\text{ t}$ ,  $H=6\text{ t}$  とすれば式 (e) によって

$$H_t = \frac{30}{61} \times 6 - 0.38 = 2.57 \text{ t}$$

締結装置の耐横圧強度を試験するときは上記の試験荷重を用いればよい。垂直荷重  $P$  に対しても同時に試験するときは、現場軌道の垂直荷重  $P$  に相当する試験荷重 ( $P$  の偏心効果は  $M_0$  に含まれるから、この荷重はレールの対称軸上に加える) を  $P_t$  とすると、式 (e) の第 2 式で  $H_t, H$  を  $P_t, P$  に代え、また右辺は第 1 項だけを考えて

ただし  $\beta_p$  は軌道の垂直変位に対する  $\beta = 1/86 \text{ cm}$   
このとき

$$P_t = \frac{30}{86} \times 10 = 3.49 \text{ t}$$

試験は締結装置を下記の角度だけ傾斜させ、そのレールの対称軸上  $h_t$  の点を通って下記の鉛直荷重をかけねばよい。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{傾斜角} = \frac{H_t}{P_t} = \frac{2.57}{3.49} = 0.74 \quad (36^\circ 30') \\ \text{鉛直荷重} = \sqrt{H_t^2 + P_t^2} = 4.3 \text{ t} \end{array} \right.$$

## 7. ねじれの断面力

レールは構造部材としてはその剛性を利用して支持部の反力を軽減するのが目的であるから、実用上は前節式(a)の  $\theta_0$  (および (13) 式による  $y_0$ ) が求まればそれ以上の解析は必要ない。しかし、応力が全く問題にされないわけではなく、またレールの変形をよりよく理解するためにも断面力すなわち変形を支配する力の分布を知ることはむだではない。

レールのねじれに対して働く断面力（トルク）は式(4), (5)による次の2種類が存在する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{“曲げねじり”により } T_w = -Dh^2\theta''' \\ \text{“単純ねじり”により } T_s = c\theta' \\ \text{全体の断面力 } T = T_w + T_s \end{array} \right\}$$

上式の  $\theta$  に式 (10) を適用すると

$$\left\{ \begin{array}{l} T_w = -Dh^2\theta'''' = -\frac{c}{\alpha^2}\theta'''' = T_0 e^{-\alpha x} \\ \qquad \qquad \qquad - \text{mak } \theta_a e^{-\alpha a} \sinh \alpha x \\ T_s = c\theta' = T_0(1 - e^{-\alpha x}) \\ \qquad \qquad \qquad + \text{mak } \theta_a e^{-\alpha a} \sinh \alpha x \\ \qquad \qquad \qquad ..... \end{array} \right. \quad (25)$$

ただし  $L_1 = -\max \theta_a$

なお上式を導くに当たって式(10)は  $\theta$  の計算においては右辺第3項を省略してよいが、上記のようにその微分係数を用いるときには安易に同じ省略を行なってはならないので、上式は省略なしで求めた。

第2スパンに対しては式(11)は右端の外力  $L_2$  を無視したのでこれの微分係数に式(25)からの類推によって  $L_2$  の項を加え

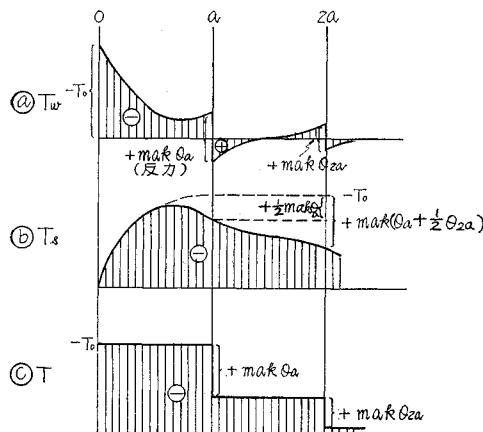


図-11

ただし  $e^{-\alpha a} \sinh \alpha a = 1/2$  とする ( $\alpha a \gg 1$ )

なお断面力にはいま 1 つ図-3 に示す  $\mu$ , すなわち曲げねじりの曲げモーメントがあり, 式(25)によるものと式(26)によるものが  $x=a$ ,  $\xi=0$  で連続でなければならぬが, これは  $\theta''$ ,  $\varphi''$  に比例するので上式における 2 つの  $T_s$  について微分係数を求めるとき, これらは  $e^{-\alpha a} = 0$  のとき  $x=a$ ,  $\xi=0$  で連続になる。

式(25), (26)を図示すると図-11 のようになり, ④ 図によると  $T_w$  は各外力作用点における最大値が急激に減衰し, 曲げねじりは大局的には無視されてよい性質

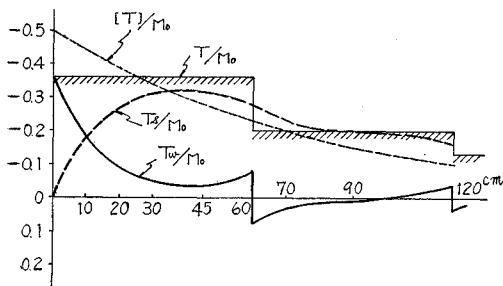


図-12

→ 荷重  $M_0 = 1$   
 $0.36 \leftarrow \rightarrow 0.36$  (断面力  $T_w$ )  
 $\rightarrow 0.15 (\mu \text{による反力})$   
 $\leftarrow 0.43 (\theta'' \text{, } \varphi'')$

図-13

のものであるが, レールにおいては変形の主たる部分である第 1 スパン内 ( $x < a$ ) に限ってはこれを無視することは許されない。

$T_s$  は ④ 図のように  $T_w$  と相補的に働き, また  $T_w$  と異なって荷重作用点からの減衰は緩慢であるが, その最大値が荷重作用点でなくして次位まくらぎ点に近く現われるのが特徴的である。両者を合計した ④ 図の  $T$  は各スパンごとに一定値を保ちつつ漸減する。従来の実用解の  $[T]_B$  はこのような階段状の断面力を  $e^{-\alpha x}$  曲線で代替したことになる。

式(25), (26)に前節式(a)の  $T_0$  および表-1の  $\theta_a$  値を入れると

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq a \\ T_w/M_0 &= -0.357 e^{-\alpha x} \\ &\quad -0.161 \times 0.0055 \sinh \alpha x \\ T_s/M_0 &= -0.357 (1 - e^{-\alpha x}) \\ &\quad +0.161 \times 0.0055 \sinh \alpha x \\ a \leq x \leq 2a \quad (0 \leq \xi \leq a) \\ T_w/M_0 &= \frac{1}{2} 0.161 e^{-\alpha \xi} \\ &\quad -0.071 \times 0.0055 \sinh \alpha x \\ T_s/M_0 &= -0.357 + 0.161 \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha \xi} \right) \\ &\quad +0.071 \times 0.0055 \sinh \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

その計算結果およびそれを図示したものは表-2 および図-12 である。各スパンにおける断面力は

$$T_0 = -0.357 M_0$$

$$T_1 = T_0 + mak \theta_a = -0.196 M_0 (= 0.55 T_0)$$

$$T_2 = T_1 + mak \varphi_a = -0.125 M_0 (= 0.35 T_0)$$

また荷重作用における力の配分は 図-13 のようになりモーメント荷重の 43% が反力に,  $2 \times 36 = 72\%$  が断面力に配分される (レールの水平変位により見掛けの荷重が 115% になる)。

## 8. 水平荷重によるレール応力

レール応力は垂直荷重  $P$  によるものが代表的に考えられているので水平荷重  $H$  によるものがこれに対してどの程度になるかを求めてみる。

表-2

$x$	0	10 cm	20	30	45	60-	(a)			(2a)		
							60+	70	90	120-	120+	
$T_w/M_0$	-0.36	-0.18	-0.09	-0.05	-0.04	-0.08	0.08	0.03	0.01	-0.04	0.04	
$T_s/M_0$	0	-0.18	-0.27	-0.31	-0.32	-0.28	-0.23	-0.20	-0.16			
$[T]_B/M_0$	$T_0 = -0.36 M_0$						$T_1 = -0.20 M_0$			$T_2 = -0.13 M_0$		
	-0.50	-0.44	-0.39	-0.34	-0.28	-0.23	-0.20	-0.15	-0.10			

### (1) 垂直応力

水平荷重  $H$  によって生ずる垂直応力  $\sigma$  は式(10)のねじれ  $\theta$  に対して式(1)  $\mu$ , よび式(13)の曲げ  $y$  に対して  $-EIy''$  で与えられる合計 2 つの曲げモーメントに対するものであり, その荷重作用点  $x=0$  における値を本計算例の数値を用いて求めると

曲げねじりの垂直応力

$$\sigma_w = \frac{H}{7.4 \text{ cm}^2}; \frac{H}{10.6 \text{ cm}^2}$$

水平曲げの垂直応力

$$\sigma_b = \frac{H}{6.8 \text{ cm}^2}; \frac{H}{3.5 \text{ cm}^2}$$

ただし右辺の第 1 は頭部, 第 2 は底部の値である。

これによるとレール頭部では曲げねじりによる応力が従来もっぱら考えられていた曲げによるものと同程度の値を持つ。

水平荷重  $H$  による垂直応力  $\sigma_H$  は上記  $\sigma_w$ ,  $\sigma_b$  の合計であるが, 頭部と底部における両者の符号(曲げの向き)の相違を考慮して

$$\text{頭部 } \sigma_H = \sigma_w + \sigma_b = \frac{H}{3.5 \text{ cm}^2}$$

$$\text{底部 } \sigma_H = \sigma_b - \sigma_w = \frac{H}{5.2 \text{ cm}^2}$$

一方, レール応力の代表とされる垂直荷重  $P$  による曲げ応力は, レールの垂直曲げに対して  $K=0.3 \text{ t}/\text{cm}^2$ ,  $I=1960 \text{ cm}^4$  のとき  $\beta_p=1/86 \text{ cm}$ , また断面図心の高さ(底面から) 7.2 cm として

$$\sigma_p = \frac{P}{11 \text{ cm}^2}; \frac{P}{13 \text{ cm}^2}$$

$H$  と  $P$  の関係は通常  $H=1/4 \cdot P$  の程度であるから前記  $\sigma_H$  式の  $H$  を  $P$  に書き代えると

$$\sigma_H = \frac{P}{14 \text{ cm}^2} = 0.8 \sigma_p; \frac{P}{21 \text{ cm}^2} = 0.6 \sigma_p$$

横圧  $H$  は上記の平常値に対し異常値は  $0.6P$  程度のものが図-9 の形で働くと考えるから, この異常  $H$  によるモーメントの平常値に対する比は

$$\frac{6 \text{ t} \times 11.2 \text{ cm} - 10 \text{ t} \times 3 \text{ cm}}{2.5 \text{ t} \times 11.2 \text{ cm}} = 1.36$$

$\sigma_H$  が異常時には上記の程度増大することを考えると, 水平荷重による曲げ応力  $\sigma_H$  はレール応力の代表とされている垂直荷重による  $\sigma_p$  とちょうど同じ程度の値である。すなわちレールに働く垂直応力は通常考えられている  $\sigma_p$  の 2 倍を考えなくてはならない。

### (2) せん断応力

水平荷重  $H$  によるせん断応力は曲げによる  $\tau_b$ , ねじれによる  $\tau_w$  と  $\tau_s$  の合計 3 種類が働くが, まず単純ね

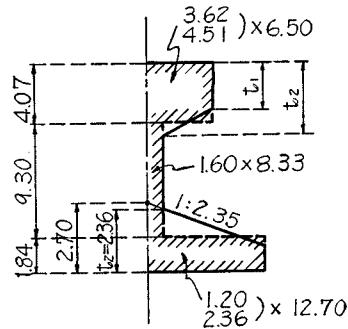


図-14

じりによる  $\tau_s$  はいまはその概略を知るために断面を図-14 の影線の長方形の集合と考えて, 細長い長方形に対する応力公式: 最大  $\tau_s = Gt \theta'$  ( $t$  は長方形の短辺の長さ, また頭部は細くないので係数 0.864 を乗ずる) によって各長方形ごとの最大値(長辺の中央付近に働く)を求める。またこのとき最大  $\tau$  の生ずるレール位置は  $\theta'$  最大の点であるが, いまの場合 図-12 によるとそれは第 1 スパンの約 2/3 のところにあり, その値は図によると

$$c \theta'_{\max} = T_0 \times 0.9, T_0 = 0.357 h_0 H$$

この点におけるレール断面各部の最大  $\tau_s$  は

$$\text{頭部 } \tau_s = \frac{H}{15 \text{ cm}^2}; \text{ ウェブ } \tau_s = \frac{H}{34 \text{ cm}^2}$$

$$\text{底部 } \tau_s = \frac{H}{23 \text{ cm}^2}$$

なお図-14 の長方形についてねじり剛性  $c$  を計算すると  $0.11 \times 10^6 \text{ t} \cdot \text{cm}^2$  となり, 本計算例で用いた国鉄算式によるものより大分小さい。したがって長方形の応力公式中の  $\theta'$  として別方式で求めた  $c$  によるものを用いることはもちろん誤りであるが, いまは  $\tau$  の概略を簡単に推定するためにあえてこれを行なった。

曲げによる  $\tau_b$  は水平曲げに対しては頭部および底部を長方形と考えるから, 最大  $\tau_b$  はせん断力/断面積の 3/2 倍とし, 荷重作用点のせん断力  $Q_0$  は図-15 の力のつり合い:  $H + 2Q_0 = aK_y y_0$  ( $h_2 \theta_0 \ll y_0$  として) により

$$Q_0 = -\frac{H}{2} \left( 1 - \frac{a}{2} \beta \right)$$

このとき

$$\tau_b = \frac{H}{250 \text{ cm}^2}; \frac{H}{65 \text{ cm}^2}$$

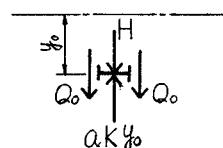


図-15



当然であり、本実用解でもこの区間にはこの略解を適用したが、力学的に重要な、たとえば第1スパンでは図一 10 または同博士の例題（文献 3）の図 2・2・5）でも明らかに曲げねじりを考慮したものに対して明らかに相違する。

さらにまた佐藤博士の厳密解はティモシェンコ式に対する数学的厳密解に止まるのであって、たとえば本論文のように力学的に意味のあるまくらぎ 2 スパン程度（荷重点の片側）を対象とするならば、この区間で反力を分布力と仮定する基礎方程式そのものが近似であり、いわば近似的な基礎方程式の厳密解と本論文におけるいわば厳密な基礎方程式の近似解のいずれが真に近いかは簡単

に速断できない。

#### 参考文献

- 1) 八十島義之助：レールのねじれの理論について、土木学会誌 35 卷 11 号、昭 25.11.
- 2) Timoshenko (「材料力学」鶴戸口訳中巻 p. 243) によれば Krylov の解法.
- 3) 佐藤 裕：横圧に対する軌道強度の研究、鉄道業務研究報告 110 号、昭 35.2.
- 4) 佐藤 裕：軌道力学、p. 21、鉄道現業社、昭 39.11 刊.
- 5) Timoshenko : Stress in Railroad Track, Trans. of ASME.

(1971.7.13・受付)  
(1972.1.27・再受付)

---