

## 【討 議】

太田 俊昭著 “一様な断面棒の弾塑性ねじり解析”への討議

(土木学会論文報告集 第201号, 1972年5月号掲載)

討議者：吉 田 博（金沢大学工学部）  
西 田 進（金沢大学工学部）

本論文は、薄膜屋根類似の理論を用いて非硬化材料の棒のねじりモーメント  $T$  とねじり率  $\omega$  の曲線の定量的式化をはかり、実用に便ならしめたものであり、誠に有用な研究と考えられます。ただし、著者の計算方法に関してご教示願いたい点が二、三ありますので、以下にその要点を記します。

(1) 著者は序言において“構造用材に多用される矩形、I形およびT形などの断面形に対する解は見られず、いわんや構造解析に即用できるような形の解は、いまだ一般的に、えられていない。”と述べておられます。一般に構造物に用いられる薄肉開断面に対する弾塑性ねじりについては、以下のように導かれます。

図-A に示すような厚さ  $t$ 、幅  $b$  の長方形断面のうち、厚さの中心より  $t_0/2$  より外側の部分が降伏しているとすると、この断面に張られた石けん膜は、断面A-A

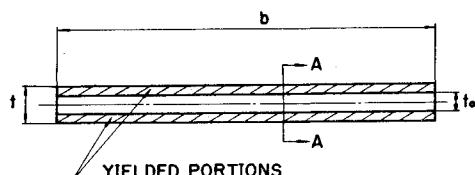
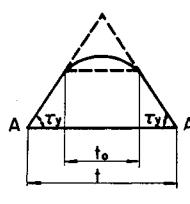


図-A



(a)

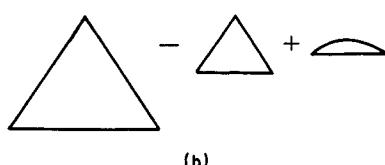


図-B

について、図-B (a) に示されるように、降伏している部分の石けん膜の傾きは一定  $\tau_y$  である。図-B (a) に示される石けん膜の断面を図-B (b) のように3つの部分に分割して考えると、

$$T = T_p(t) - T_p(t_0) + T_y(t_0) \quad \dots \dots \dots \quad (a)$$

のようく表わされる。ここに

$$\left. \begin{aligned} T_p(t) &= 2V = 2 \times \left( \frac{1}{2} \times \tau_y t \times t \right) \times b = \frac{bt^2}{2} \tau_y \\ T_p(t_0) &= \frac{bt_0^2}{2} \tau_y \\ T_y(t_0) &= \frac{bt_0^2}{3} \tau_y \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (b)$$

となり、式 (b) を式 (a) に代入して

$$T = \frac{1}{2} bt^2 \tau_y \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 \right] \quad \dots \dots \dots \quad (c)$$

$\omega_y = \tau_y/Gt$  および  $\omega = \tau_y/Gt_0$  より、

$$t = \frac{\tau_y}{G\omega_y}, \quad t_0 = \frac{\tau_y}{G\omega} \quad \dots \dots \dots \quad (d)$$

および  $T_y = 1/3(bt^2\tau_y)$  を用いて、

$$\bar{T} = \frac{T}{T_y} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3(\omega/\omega_y)^2} \right] = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3\bar{\omega}^2} \right] \quad (e)$$

が得られる。

これが薄肉長方形断面に対する解であり、これを組合せて各種の断面の近似解を得ることができる。

たとえば図-C に示す断面を考える。断面を2つの部分に分割し、 $t_1 \times b_1$  の部分を断面 I,  $t_2 \times b_2$  の部分を断面 II とする。断面 I, II の弾性限界時のねじり率  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{y2}$  は、それぞれ

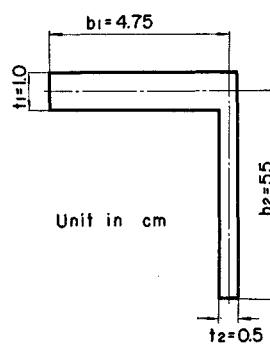


図-C

$$\omega_{y_1} = \frac{\tau_y}{Gt_1}, \quad \omega_{y_2} = \frac{\tau_y}{Gt_2}$$

にて与えられる。いま、 $t_1 > t_2$  とすると、 $\omega_{y_1} < \omega_{y_2}$  となる。

a)  $\omega \leq \omega_{y_1}$  の場合（弾性範囲内）

弾性限界時の降伏ねじりモーメントは

$$T_y = \frac{1}{3} b_1 t_1^2 \tau_y + \frac{1}{3} b_2 t_2^2 \left( \frac{t_2}{t_1} \right) \tau_y \quad \dots \dots \dots (f)$$

にて与えられる。また、ねじりモーメントは

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\omega}{\omega_{y_1}} T_{y_1} + \frac{\omega}{\omega_{y_2}} T_{y_2}$$

$$\bar{T} = \frac{T}{T_y} = \bar{\omega} \left( \frac{T_{y_1}}{T_y} + \frac{\omega_{y_1}}{\omega_{y_2}} \frac{T_{y_2}}{T_y} \right) = \bar{\omega} \quad \dots \dots \dots (g)$$

b)  $\omega_{y_1} \leq \omega \leq \omega_{y_2}$  の場合（断面Iが一部降伏、断面IIは弾性範囲内）

$$T = T_1 + T_2 = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3(\omega/\omega_{y_2})^2} \right] T_{y_1} + \frac{\omega}{\omega_{y_2}} T_{y_2}$$

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T}{T_y} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3\bar{\omega}^2} \right] \frac{T_{y_1}}{T_y} + \bar{\omega} \frac{\omega_{y_1}}{\omega_{y_2}} \frac{T_{y_2}}{T_y} \\ &= 1.3103 \left( 1 - \frac{1}{3\bar{\omega}^2} \right) + 0.1264 \bar{\omega} \quad 1.0 \leq \bar{\omega} \leq 2.0 \end{aligned}$$

c)  $\omega_{y_2} \leq \omega$  の場合（断面I、IIともに一部降伏）

$$T = T_1 + T_2 = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3(\omega/\omega_{y_2})^2} \right] T_{y_1}$$

$$+ \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3(\omega/\omega_{y_2})^2} \right] T_{y_2}$$

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T}{T_y} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3\bar{\omega}^2} \right] \frac{T_{y_1}}{T_y} \\ &\quad + \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3\bar{\omega}^2(\omega_{y_1}/\omega_{y_2})^2} \right] \frac{T_{y_2}}{T_y} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ 0.8736 \left( 1 - \frac{1}{3\bar{\omega}^2} \right) + \left( 1 - \frac{4}{3\bar{\omega}^2} \right) 0.2529 \right\} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ 1.1265 - \frac{1.8852}{3\bar{\omega}^2} \right\} \quad 2.0 < \bar{\omega} \end{aligned}$$

のように得られる。これを図示したのが図-Dである。

もとより著者が例示しておられます太肉断面には適用

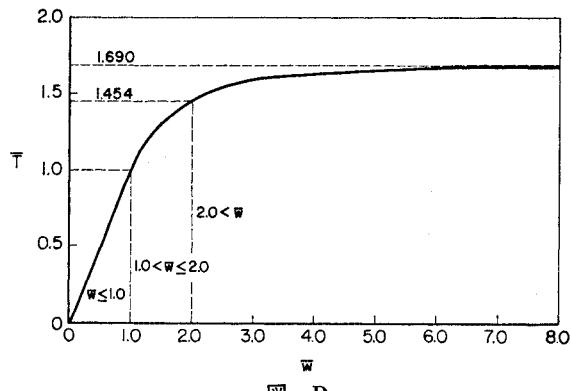


図-D

できませんが、板幅が厚さの 10 倍以上の場合の一般構造用断面について十分な精度があると考えられます。もしできれば著者の方法でこの例題を計算して比較していただければ幸いです。

(2) 式(34)の  $\bar{T}-\bar{\omega}$  曲線式において、 $\bar{\omega}$  を無限大とすると  $\bar{T}$  は表-1 に示されている  $T_p/T_y$  (ねじりに関する Shape factor) に一致しなければならないと思われますが、かなりの相違が見られます。また式(e)からもわかりますように薄肉長方形断面では Shape factor は 1.5 で、長方形断面の長辺と短辺の比が大きくなるにしたがって 1.5 に近づかなければならないと思いますがいかがでしょうか。

(3) 著者は表-1 の  $T_p$  を厳密解と比較して分割数を論じておられます、 $T_p$  に対する  $\chi$  分布は最も精度がよく得られる特殊な場合だと思われます。これで分割数を論ずるには問題があると思われます。

(4)  $\omega_y$  を決定するのに式(27)を用いておられます、肉厚が薄い場合は問題があると思います。表-1 の  $T_y$  は原文の 図-5～図-10 の分割数に対するものでしょうか。分割数を多くした場合の計算結果をお持ちでしたら比較していただけませんでしょうか。

## 【回 答】

回答者：太田俊昭（宮崎大学工学部）

原論文は、太肉断面棒の弾塑性ねじり挙動、なかんずく塑性域の2次元的広がりや、ねじりせん断応力分布の推移を忠実に追跡解明したものであります。

これに対して吉田・西田両氏、ご提案の方法は、薄肉開断面に対する近似解法であり、同断面については、筆者も前にはほぼ同様な観点（討議者の導いておられる式

(c) は、文献 1) の式(9)に相当する。ただし式(c)では長軸両端部のねじり応力関数の変化が考慮されていないから論<sup>1),2),3)</sup>じたことがあります。汎用性と解式の簡易性を有するこの種近似解法は、長辺/短辺の比  $b/a$  が 10 以上の薄肉断面に対しては一見有効であるかのように思われます ( $b/a=10$  の矩形断面で  $T_p$  の値の誤差 3 %)。しかしながらご承知のように薄肉開断面部材のねじり変形解析では、断面性状の2次の変形によって生じる曲げねじり応力<sup>4)</sup>の影響が大となり、いわんや大きな変形量を対象とする弾塑性ねじり問題ではその度合はいっそう著しくなると考えられます。このため、このような

曲げとねじりの複合応力作用下の弾塑性挙動を単純ねじり理論によって論じてみても、それは、結果的には実態とかけ離れた空論に止まる恐れがあるといえましょう。

したがって討議者の問題の一つとするところ（薄肉断面に対する近似解法の有効性の検討）は、結論的には、ひずみ増分理論<sup>5)</sup>による厳密な3次元解析の結果を持たなければならぬといえます。

なお、薄肉矩形断面のShape factorは、単純ねじり理論の上から1.5になる( $b/a \rightarrow \infty$ )ことは筆者も文献1), 2)で確認しております。

さて、これまでにえられている理論値である降伏ねじりモーメント $T_y$ と塑性ねじりモーメント $T_p$ を基にして精度を検討した結果、 $b/a=1\sim 5$ の断面に対しては、筆者の方法の誤差は、いずれも高々4%に止まり、実用解がえられた（原論文表-1参照）といえます。また、正方形断面を例にとり、分割数を増した場合について $T$ 値の比較を行なえば次のとおりです（他の矩形断面も同様な傾向を示す）。

$$14 \times 14 \text{ の場合 } T/T_y = 1.502 (\omega = 2.3\omega_y)$$

$$16 \times 16 \text{ の場合 } T/T_y = 1.503 (\omega = 2.3\omega_y)$$

$$18 \times 18 \text{ の場合 } T/T_y = 1.503 (\omega = 2.3\omega_y)$$

よって、 $b/a=1\sim 5$ の矩形要素1~2で構成される断面、矩形、T形、L形について、原論文の図-5~図-10の分割数の程度で十分実用的な解がえられるといえましょう。ただし原論文でも指摘しましたように、かなり複雑な断面では（I形断面で7.4%の誤差）、適宜分割数を増大する必要があると思います（たとえば[形、]形など）。

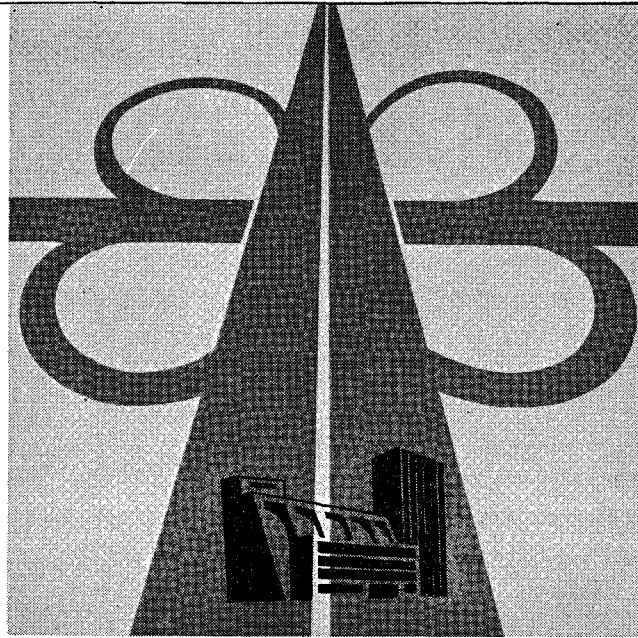
次に、原論文の式(34)について説明すれば次のとおりです。すなわち、同式は、元来、有限個数の $\bar{\omega}$ ならびに $\bar{T}$ 値（いずれも有限値）を用いて導かれた実用算式であります。したがってこの種の式の本質からいって

$\bar{\omega}=\infty$ は、適用外のcaseにあたります。もちろん、あらかじめ文献2)の方法を用いて $\bar{\omega}=\infty$ の条件を満たす実用式の誘導も可能ですが（したがってshape factor条件も満足される），その場合は、使用頻度の高い $\bar{\omega}=1$ の近傍で精度が低下します。このため、実用式を求めるにあたっては、用いるデータである $\bar{\omega}$ をどの範囲にとるかが問題となりますが、ここで対象とする例題に限っていますと、いろいろ計算した結果、 $\bar{\omega}=1\sim 12$ が最も良い解がえられることがわかりました。

さらにまた、筆者の行なった軟鋼のねじり実験<sup>6), 7)</sup>において $\bar{\omega}=6\sim 7$ でひずみ硬化現象が現われるという事実を考え合せれば、 $\bar{\omega}=10\sim 12$ をもって実際上の $\bar{\omega}$ の極限値と見なすのが、むしろ実状に合っていると考えられます。ここに $\bar{\omega}=10$ の実用式のshape factorは $b/a=1, 1.604; b/a=2, 1.74; b/a=3, 1.71; b/a=5, 1.68$ となり、ほぼ原論文表-1の結果と合致します。

## 参考文献

- 1) 山崎・太田：弾塑性振りの補足エネルギーに対する実用式、第20回年次学術講演会講演概要、昭和40年5月
- 2) 山崎・太田・速水：棒の弾塑性振り挙動に関する基礎的研究とその応用について、九州大学工学集報、第39巻第4号、昭和42年1月
- 3) 佐野・太田：棒の弾塑性振りモーメントに関する実用公式、昭和45年度研究発表論文集、土木学会西部支部、昭和46年2月
- 4) 山本善之：弾性、塑性、朝倉書店
- 5) 山田嘉昭：塑性力学、日刊工業新聞社
- 6) 太田・岡本・大津留：歪増分理論による鋼材の弾塑性振り解析、昭和46年度研究発表論文概要集、土木学会西部支部、昭和47年2月
- 7) 太田・大津留：歪硬化現象を考慮した鋼材の弾塑性振り挙動について、第27回国土木学会年次学術講演会講演概要、昭和47年10月



最良の製品を以て奉仕する

# "The Performance Admixture"

## 性能の混和剤…それはポゾリスの代名詞です

設計者、施工業者、品質に忠実な生コンメーカーに、  
ポゾリスは圧倒的な信頼をいただき今日も、明日もポ  
ゾリスが指定されております。——何故でしょうか。

それはポゾリスが性能を重視するからです。即ち  
工場で、現場で、完成したコンクリート構造物に種々  
の利益をもたらすからです。

研究所で、一定の環境の下に行われるテストでは、  
良い性能を出す混和剤は他にもあります。然し現場で  
研究所に於て予知した通りの立派な性能を（地域、材  
料、コンクリートの性質の条件がいかなるものであっ  
ても）つくりだすことをポゾリスは実証しております。

これらが、ポゾリスをして“性能の混和剤”の名を  
ほしいままにしている理由であります。



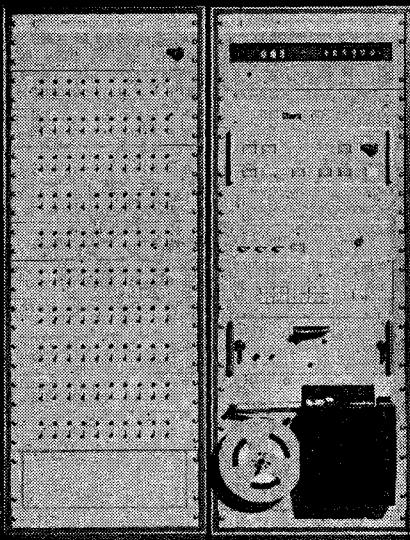
標準型 / 遅延型 / 早強型

大阪市東区北浜3～7(庄錦ビル) ☎ 202-3294  
仙台市一番丁3-1-1(富士ビル) ☎ 24-1631  
名古屋市中区栄4-1-7(第一生命館) ☎ 262-3661  
広島市八丁堀12-2(榮地ビル) ☎ 21-5571

ポゾリス物産株式会社  
日曹マスター・ビルダーズ株式会社  
東京都港区六本木3-16-26 ☎ 582-8811

福岡市中央区天神1-10-17(西日本ビル) ☎ 75-7471  
札幌市北三条西3の144(札幌富士ビル) ☎ 251-2691  
新潟県中頸城郡中郷村(日曹二本木工場) ☎ 中郷 51  
高岡・千葉・高松

## 《コアメモリ採用》



# 0.1秒/1点

## 高速ディジタルひずみ測定装置

ひずみ計測の省力化、高速化に最適

本装置は、コアメモリによる記憶装置と、デジタル演算方式を組み合わせて、計測時間を一段と短縮させました。測定値は、記憶されている初期値と負荷時の値を純電子的に演算して求めます。

電算機用テープさん孔機を内蔵できるので、効率的な計測データ処理に最適な機器です。

### 特長

- 測定点は切換器1台で100点、10台1000点まで接続可能
- 総合計測時間0.1秒/点、100点わずか10秒
- 開始、終了点および測定点とびこしは自由に選択できる
- 自動スタート用タイマの併用で無人計測ができる
- ゲージの自己加熱の影響のない方式を採用
- 1、2、4枚ゲージ法が各点自由に選択できる
- I Cを大巾に採用した高信頼型

### ASB-100B SD-1000B

仕様	
測定点数	100点/1台、10台、1000点可能
測定範囲	0~60000×10 <sup>-6</sup> ひずみまたは 0~60000μV
表示、印字桁数	10桁
精度	±(指示値の0.05%+フルスケールの0.005%)
標準等価ひずみ	+5000×10 <sup>-6</sup> ひずみ

応力測定機器の専門メーカー

**共和電業**  
本社・工場 東京都調布市調布ヶ丘3-5-1  
電話 東京調布0424-83-5101