

伝達マトリックス法による薄肉開断面 曲線ばかりの2次の応力問題の解析

SECOND-ORDER ELASTIC STRESS ANALYSIS OF THIN-WALLED CURVED BEAMS
WITH OPEN CROSS SECTION BY TRANSFER MATRIX METHOD

遠田良喜*

By Yoshihiro Enda

要旨 一つの対称軸を有する薄肉開断面曲線ばかりの2次の応力問題の解析に対する基礎微分方程式を、エネルギー極小の原理から導かれる変分問題の Euler-Lagrange の微分方程式として誘導し、水平面に円曲線をなす曲線ばかりの弾性域における力学的挙動を、伝達マトリックス法によって解析するものである。

1. まえがき

薄肉開断面曲線ばかりは、ねじり変形が大きく、このねじりを伴う面外への横倒れ座屈の現象は、構造物の耐力に影響を与える重要な要素の一つである。横倒れ座屈の問題は、1899年に Prandtl と Michell の論文で、矩形断面のはりについて考察されたのが最初とされており¹⁾、その後多くの研究者によって理論的、実験的研究が進められた。K. Basler と B. Thürlmann の plate girder の耐力に関する一連の研究は²⁾、横倒れ座屈によるはりの耐力低下の究明が、構造部材の設計に対して重要な役割をなすことを示している。また、鋼構造部材の安定問題に関する最近の研究として、TH Darmstadt における、K. Klöppel の理論的、実験的研究があり^{3)~8)}、I-断面のはりの横倒れ座屈解析の研究にも力を入れている。

水平面に円曲線をなす I-断面の曲線ばかりに鉛直荷重が作用する場合は、ねじり変形が著しく大きくなり、これに伴い、弱軸まわりの曲げモーメントと曲げねじりモーメントが大きくなるため、横断面上の応力分布も、直線ばかりの場合に比較して、かなり異なった状態になる。これまでの横倒れ座屈の研究は、主として、直線ばかりおよび鉛直面に曲線をなすアーチ状のはりに対するものが多いうる^{9)~10)}。この論文では、水平面に円曲線をなす薄肉開断面の曲線ばかりに、鉛直方向と水平方向との荷重が作用したときの力学的挙動を、主として、2次の応力問題の

解析として展開し、この種の力学的現象の理解にそなえるものである。

この論文では、まず、曲線ばかりの2次の応力問題に対する基礎微分方程式を、エネルギー極小の原理から導かれる変分問題の Euler-Lagrange の微分方程式として誘導し、この微分方程式が、曲線ばかりの変形形状を考慮して、力のつり合い条件式から求めた微分方程式系と力学的等価性をもっていることを示す。つぎに、この微分方程式に立脚して、薄肉開断面曲線ばかりの2次の応力問題の解析を、伝達マトリックス法を用いて展開し、数値解析からこの種の曲線ばかりの弾性域における力学的挙動を解明するものである。

薄肉開断面曲線ばかりの円周面外の変形に対する抵抗は、フランジとウェブの横方向の剛性に関係するが、フランジに比較して、ウェブの板厚が著しく薄い断面構成になると、ウェブの変形によって、薄肉断面としての剛性が低下し、これがねじりを伴う円周面外への力学的挙動に影響を与える。しかし、実際には、このようなフランジとウェブのつり合いのとれない断面構成は好ましいものではなく、また、ウェブの補剛によっても、ウェブ自身の横方向の変形はかなり生じにくくなっている。このような点から、この論文では、断面形状が変形しないという仮定に基づいて解析を行なっている。なお、論文 6), 10) は、I-断面の変形を考慮して、横倒れ座屈の解析を行なっている。

薄肉断面のはりの挙動は、溶接による部材組み立ての際の初期変形や残留応力にも左右される。また、はりの最終耐力の評価は、材料の特性を考慮した弾塑性解析によらなければならないが、この論文では、これらの問題には言及しないで、薄肉開断面曲線ばかりの理想的な状態に対して、2次の弾性応力問題として解析を展開し、この種の問題の解明に対する基礎的研究とするものである。

伝達マトリックス法は、薄肉断面のはりに関する種々の力学的問題の解明に有効に応用されているが^{4), 5), 7)},

* 正会員 石川島播磨重工業(株) 鉄構事業部基本設計部

^{11), 12)}, この論文でも, 伝達マトリック法に関する一連の研究のつづきとして^{12)~15)}, 薄肉開断面曲線ばりの2次の応力問題の解析を行なったものである。

2. 基礎微分方程式の誘導

(1) 内部弾性ポテンシャル

Fig. 1 に示すように, 横断面が z 軸に関して対称で, 水平面に曲率半径 r の円曲線をなす, 長さ l の薄肉開断面曲線ばりを例にとる。曲線ばりに対する直交座標系として, 横断面の図心 S を原点とし, x 軸を接線方向に, y, z 軸を横断面の主軸方向に定める。Fig. 1 に示す断

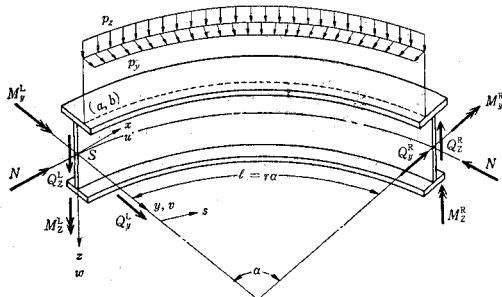


Fig. 1 Curved beam subjected to lateral loads, forces and moments by the small displacement theory.

面力は, 微小変位理論による断面力を表わし, N は軸方向力, M_y, M_z は曲げモーメント, Q_y, Q_z はせん断力を表わす。 p_y, p_z は, y, z 軸方向の分布荷重で, 横断面上の $y=a, z=b$ の位置に作用する。また, u, v, w は x, y, z 軸方向の変位を表わし, それぞれ, 図心 S に関する諸量を表わす。また, 添字 L, R は, はりの左端と右端を表わす。曲線ばりの2次の応力問題の解析は Fig. 1 の荷重と断面力との作用する状態で行なうことになる。

この曲線ばりの2次の応力問題に対する基礎微分方程式をエネルギー極小の原理から誘導する。

薄肉開断面の曲線ばりが, 外力を受けて変形するとき, 曲げに伴うせん断変形を無視して, ねじりに伴うせん断変形のみを考慮すると, 曲線ばりの内部弾性ポテンシャル U は,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F E \varepsilon_x^2 dF ds + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \theta^2 ds \quad (1)$$

によって与えられる。ここに, E は弾性係数, F は断面積, ε_x は垂直ひずみ, GJ は St. Venant のねじり剛性を表わす。また, ds は曲線ばりの微小長さ, θ は水平軸まわりの曲げ変形とねじりの連成を表わす物理量で,

$$\theta = \vartheta' + w'/r \quad (2)$$

と定義する。ただし, $(\cdot)' = d(\cdot)/ds$ を表わす。

また, ϑ はねじり角を表わす。

断面形状保持の仮定が成立するものとすると, 横断面上の任意点 $A(y, z)$ における x, y, z 軸方向の変位成分 u_A, v_A, w_A は, 図心 S に関する変位, 変形量により,

$$\left. \begin{aligned} u_A &= u - \psi' y - w' z - \theta \varphi_s, \\ v_A &= v - z \vartheta, \\ w_A &= w + y \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

によって与えられる。式(3)の第1番目の式における ψ は鉛直軸まわりの曲げ変形と縦軸方向の変位との連成を表わし, 次のように定義される。

$$\psi = v' + u/r \quad (4)$$

また, $\theta \varphi_s$ は, ねじりの結果として生ずる Bernoulli-Navier の平面保持の仮説にしたがわない相対的変位成分を表わし, φ_s は図心 S に関するそり関数を表わす。

式(3)は, 通常考慮されている薄肉断面上の変位の関係式であるが, 2次の応力問題のように有限変位理論に立脚した解析の場合は, 次の2次の変位成分を考慮しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} u_A^* &= -y \vartheta w' + z \vartheta \psi, \\ v_A^* &= -\frac{y}{2} \vartheta^2, \\ w_A^* &= -\frac{z}{2} \vartheta^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(3), (5)より, 点 A の変位量 $\hat{u}_A, \hat{v}_A, \hat{w}_A$ は,

$$\hat{u}_A = u_A + u_A^*, \quad \hat{v}_A = v_A + v_A^*, \quad \hat{w}_A = w_A + w_A^* \quad (6)$$

となる。式(5)の変位成分は, エネルギー法によって基礎微分方程式を誘導するときのみ必要とし, 力のつり合い条件から微分方程式を誘導するときは必要としない¹²⁾。

さて, 内部弾性ポテンシャル U の垂直ひずみ ε_x に対しても, 式(3)の変位成分のみを考慮する。曲線ばりの曲率半径 r に比較して横断面の寸法は小さいと仮定して, これを無視すると, 垂直ひずみ ε_x は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= du_A/ds - v_A/r \\ &= u' - \psi' y - w'' z - \theta' \varphi_s - (v - z \vartheta)/r \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)を式(1)に代入すると, 内部弾性ポテンシャルは,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_F E [u' - \psi' y - w'' z - \theta' \varphi_s \\ &\quad - (v - z \vartheta)/r]^2 dF ds + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \theta^2 ds \end{aligned} \quad (8)$$

となる。

(2) 外部弾性ポテンシャル

曲線ばりがねじり変形をして, 分布横荷重 p_y, p_z の作用点 $P(a, b)$ が $P'(a-a', b+b')$ に移ったとすると

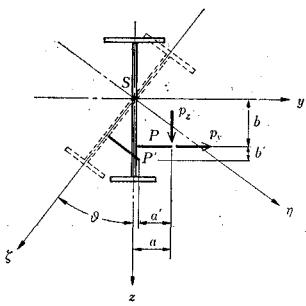


Fig. 2 Loadings and geometry of deformation.

(Fig. 2),

$$a' = b \vartheta + \frac{a}{2} \vartheta^2, \quad b' = a \vartheta - \frac{b}{2} \vartheta^2 \quad \dots \dots \dots (9)$$

であるから、点 P の y, z 軸方向の変位成分 v_P, w_P は

$$v_P = v - b \vartheta - \frac{a}{2} \vartheta^2, \quad w_P = w + a \vartheta - \frac{b}{2} \vartheta^2 \quad \dots \dots \dots (10)$$

となるから、外力 p_y, p_z のなす外部弾性ポテンシャル W_1 は

$$W_1 = \int_0^l \left[p_y \left(v - b \vartheta - \frac{a}{2} \vartheta^2 \right) + p_z \left(w + a \vartheta - \frac{b}{2} \vartheta^2 \right) \right] ds \quad \dots \dots \dots (11)$$

によって与えられる。

曲線ばかりの2次の応力問題の場合は、曲線ばかりの微小変形に伴う外部弾性ポテンシャル W_2 を考慮しなければならない。はりの微小面積 dF に作用する合力 $\sigma_x dF$ と微小伸び量 $\epsilon_x^* ds$ とのなす外部弾性ポテンシャル W_2 は、

$$W_2 = \int_0^l \int_F \sigma_x \epsilon_x^* dFdS \quad \dots \dots \dots (12)$$

によって与えられる。式 (12) における垂直応力 σ_x に対しても、微小変位理論による垂直応力

$$\sigma_x = -N/F - M_y z/I_y + M_z y/I_z + W_M \varphi_M/C_M \quad \dots \dots \dots (13)$$

を用いて線形化する。ここに、 W_M は微小変位理論による曲げねじりモーメント、 φ_M はそり関数、 C_M はそり定数を表わし、横断面のせん断中心 M に関する諸量を表わす。

また、微小変形に伴う垂直ひずみ ϵ_x^* は、式 (3), (5) より

$$\epsilon_x^* = du_A^*/ds - v_A^*/r + \frac{1}{2} [(d v_A/ds)^2 + (dw_A/ds)^2] \quad \dots \dots \dots (14)$$

によって与えられる。ただし、 $(du_A/ds)^2$ の項は、影響が小さいので無視している。

式 (14) における $du_A^*/ds, dv_A/ds, dw_A/ds$ は、曲率半径 r の影響による y 軸まわりの曲げとねじりの連

成、および、 z 軸まわりの曲げと軸方向変位の連成を考えて、

$$\begin{aligned} du_A^*/ds &= -y \vartheta w'' - y \Theta w' + z \vartheta \psi' + z \Theta \psi, \\ dv_A/ds &= \psi - z \Theta, \quad dw_A/ds = w' + y \Theta \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (15)$$

によって与えられる。式 (15) を式 (14) に代入すると、

$$\begin{aligned} \epsilon_x^* &= -y \vartheta w'' + z \vartheta \psi' + \frac{1}{2} y \vartheta^2/r \\ &\quad + \frac{1}{2} [\psi^2 + w'^2 + (y^2 + z^2) \Theta^2] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (16)$$

を得る。式 (13), (16) を式 (12) に代入すると、外部弾性ポテンシャル W_2 は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^l \int_F (-N/F - M_y z/I_y + M_z y/I_z \\ &\quad + W_M \varphi_M/C_M) \left[-y \vartheta w'' + z \vartheta \psi' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} y \vartheta^2/r + \frac{1}{2} [\psi^2 + w'^2 \right. \\ &\quad \left. + (y^2 + z^2) \Theta^2] \right] dFdS \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (17)$$

(3) 系全体の弾性ポテンシャル

式 (8), (11), (17) より、薄肉開断面曲線ばかりに対する系全体の弾性ポテンシャル H は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} H &= U - (W_1 - W_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_F E [u' - \psi' y - w'' z - \Theta' \varphi_s \\ &\quad - (v - z \vartheta)/r]^2 dFdS + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \Theta^2 ds \\ &\quad - \int_0^l \left[p_y \left(v - b \vartheta - \frac{a}{2} \vartheta^2 \right) + p_z \left(w + a \vartheta - \frac{b}{2} \vartheta^2 \right) \right] ds \\ &\quad + \int_0^l \int_F (-N/F - M_y z/I_y + M_z y/I_z + W_M \varphi_M/C_M) \\ &\quad \cdot \left[-y \vartheta w'' + z \vartheta \psi' + \frac{1}{2} y \vartheta^2/r + \frac{1}{2} [\psi^2 + w'^2 \right. \\ &\quad \left. + (y^2 + z^2) \Theta^2] \right] dFdS \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (18)$$

横断面の図心 S に関する断面定数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} F &= \int_F dF, \quad I_y = \int_F z^2 dF, \quad I_z = \int_F y^2 dF, \quad C_s = \int_F \varphi_s^2 dF, \\ i_s^2 &= (1/F) \int_F (y^2 + z^2) dF, \quad r_y = (1/I_y) \int_F z (y^2 + z^2) dF \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (19)$$

横断面の図心 S 、および、せん断中心 M に関する直交性の条件より、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \int_F y dF &= 0, \quad \int_F z dF = 0, \quad \int_F y z dF = 0, \quad \int_F \varphi_s F = 0, \\ \int_F \varphi_M dF &= 0, \quad \int_F y \varphi_M dF = 0, \quad \int_F z \varphi_M dF = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (20)$$

また、横断面が z 軸に関して対称なときは、

$$\left. \begin{aligned} \int_F z \varphi_s dF &= 0, \int_F y(y^2 + z^2) dF = 0, \\ \int_F \varphi_M (y^2 + z^2) dF &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

が成立する。

式 (19), (20), (21) の関係より、弾性ポテンシャル H を変形すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \int_0^l E [Fu'^2 + I_z \Psi'^2 + I_z w''^2 + C_s \Theta'^2 - 2 \bar{z} I_z \Psi' \Theta' \\ & + (Fv^2 + I_y \vartheta^2)/r^2 - 2(Fu'v + I_y w'\vartheta)/r] ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l G J_{red} \Theta^2 ds - \int_0^l \left[p_y \left(v - b \vartheta - \frac{a}{2} \vartheta^2 \right) \right. \\ & \left. + p_z \left(w + a\vartheta - \frac{b}{2} \vartheta^2 \right) \right] ds \\ & + \int_0^l \left[-\frac{1}{2} N(\Psi^2 + w'^2) - M_y \vartheta \Psi' \right. \\ & \left. - M_z \left(\vartheta w'' - \frac{1}{2} \vartheta^2/r \right) \right] ds \dots\dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

ここに、

$$G J_{red} = GJ - (N i_s^2 + M_y r_y) \dots\dots\dots\dots(23)$$

を表わす。また、 \bar{z} は図心とせん断中心の距離を表わす。

3. Euler-Lagrange の微分方程式

曲線ばかりの系全体の弾性ポテンシャル H は、式 (22) に示すように、

$$H = \int_0^l F(s, u, u', v, v', w, w', w'', \vartheta, \vartheta') ds \dots\dots\dots\dots(24)$$

の関数形をとっている。式 (24) の変関数 u, v, w, ϑ に対して、比較関数を導入し、これの第 1 変分をとって、極値条件 ($\delta H=0$) より、関数 u, v, w, ϑ の満足すべき Euler-Lagrange の微分方程式が求められる。式 (24) の場合のように、4 つの変関数を含む変分問題では、個々の変関数に対する Euler-Lagrange の微分方程式を連立させねばよいことになる。これらの微分方程式は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} F_{u'} - F_u &= 0, \frac{d^2}{ds^2} F_{v''} - \frac{d}{ds} F_{v'} + F_v = 0, \\ \frac{d^2}{ds^2} F_{w''} - \frac{d}{ds} F_{w'} + F_w &= 0, \\ \frac{d^2}{ds^2} F_{\vartheta''} - \frac{d}{ds} F_{\vartheta'} + F_{\vartheta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots\dots(25)$$

なお、数式の表現は、文献 16) にしたがっている。式 (22) より、関数 F を式 (25) に代入することにより、曲線ばかりの変位の幾何学量に関する微分方程式が求めら

れる。

式 (24) の積分 H に、曲線ばかりの両端 $s=0, s=l$ における変位量を幾何学的条件として、Lagrange の乗数を用いて導入した付加的条件を有する変分問題を考える。

Lagrange の乗数を α, β, r, κ で表わし、式 (24) の弾性ポテンシャル H に曲線ばかりの両端の幾何学的条件を代入すると、

$$\begin{aligned} H^* = & \int_0^l F(s, u, u', v, v', w, w', w'', \vartheta, \vartheta', \vartheta'') ds \\ & + [\alpha_0 u(0) - \alpha_1 u(l) + \beta_0 v(0) - \beta_1 v(l) + \beta_2 v'(0) \\ & - \beta_3 v'(l) + r_0 w(0) - r_1 w(l) + r_2 w'(0) - r_3 w'(l) \\ & + \kappa_0 \vartheta(0) - \kappa_1 \vartheta(l) + \kappa_2 \vartheta'(0) - \kappa_3 \vartheta'(l)] ds \dots\dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

を得る。 H^* の第 1 変分をとり、これの極値条件は、次のようにになる。

$$\begin{aligned} \delta H^* = & \int_0^l \left[\left(\frac{d}{ds} F_{u'} - F_u \right) \delta u + \left(\frac{d^2}{ds^2} F_{v''} - \frac{d}{ds} F_{v'} \right. \right. \\ & \left. \left. + F_v \right) \delta v + \left(\frac{d^2}{ds^2} F_{w''} - \frac{d}{ds} F_{w'} + F_w \right) \delta w \right. \\ & \left. + \left(\frac{d^2}{ds^2} F_{\vartheta''} - \frac{d}{ds} F_{\vartheta'} + F_{\vartheta} \right) \delta \vartheta \right] ds \\ & + [F_{u'} \delta u]_0^l + \alpha_0 \delta u(0) - \alpha_1 \delta u(l) \\ & + [F_{v'} \delta v]_0^l - [F_{v'} \delta v]_0^l - \left[\frac{d}{ds} F_{v''} \delta v \right]_0^l \\ & + \beta_0 \delta v(0) - \beta_1 \delta v(l) - \beta_2 \delta v'(0) + \beta_3 \delta v'(l) \\ & + [F_{w'} \delta w]_0^l + [F_{w'} \delta w]_0^l - \left[\frac{d}{ds} F_{w''} \delta w \right]_0^l \\ & + r_0 \delta w(0) - r_1 \delta w(l) - r_2 \delta w'(0) + r_3 \delta w'(l) \\ & + [F_{\vartheta'} \delta \vartheta]_0^l + [F_{\vartheta'} \delta \vartheta]_0^l - \left[\frac{d}{ds} F_{\vartheta''} \delta \vartheta \right]_0^l \\ & + \kappa_0 \delta \vartheta(0) - \kappa_1 \delta \vartheta(l) - \kappa_2 \delta \vartheta'(0) + \kappa_3 \delta \vartheta'(l) = 0 \dots\dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

この極値条件より、Euler-Lagrange の微分方程式と、これに対応する境界条件式が、Lagrange の乗数と変位量との対応関係式として求められる。境界条件式における Lagrange の乗数は力学的境界条件式を表わしており、曲線ばかりの端部における断面力に対応する。そこで、変位量 u, v, w に共役な断面力として、軸方向力 H 、せん断力 V_y, V_z を、 y, z 軸まわりの回転変位量 w', v' に共役な断面力として、曲げモーメント B_y, B_z を定義する。また、ねじり角 ϑ とねじり角の変化率 ϑ' に共役な断面力として、ねじりモーメント B_ϑ 、曲げねじりモーメント B_T を定義する。これらの変位量と断面力は有限変位理論の場合の諸量を表わしている。そうすると、式 (27) における α_0, α_1 は H に、 β_0, β_1 は V_y に、 β_2, β_3 は B_z に、 r_0, r_1 は V_z に、 r_2, r_3 は B_y に、 κ_0, κ_1 は B_T に、 κ_2, κ_3 は B_ϑ に対応する。これらの物

理量は Fig. 3(a), (b) に定義する。

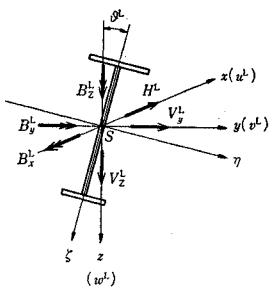


Fig. 3(a) Forces and moments at the left end by the finite displacement theory.

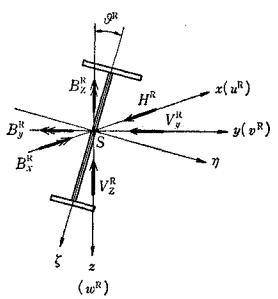


Fig. 3(b) Forces and moments at the right end by the finite displacement theory.

式(25)に式(22)に与えられる関数 F を代入すると、Euler-Lagrange の微分方程式が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} & EF(u'' - v'/r) + EI_z(\psi'' - \bar{z}\theta'')/r \\ & + [N\psi' - (M_y\vartheta')]'/r = 0, \\ & EI_z(\psi''' - \bar{z}\theta''') - EF(u' - v/r)/r \\ & + (N\psi)' - (M_y\vartheta)'' = p_y, \\ & EI_y(w''' - \vartheta''/r) + (EC_s\theta''' - \bar{z}EI_z\psi''')/r \\ & - (GJ_{red}\theta)'/r = (M_z\vartheta)'' - (Nw)' + p_z, \\ & EC_s\theta''' - \bar{z}EI_z\psi'''' - (GJ_{red}\theta)' - EI_y(w'' - \vartheta/r)/r \\ & = M_y\psi' - M_z(w'' + \vartheta/r) - p_y(b + a\vartheta) \\ & + p_z(a - b\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (28 \text{ a} \sim \text{d})$$

式(28 a~d)の微分方程式に対応する境界条件式は、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} H &= -EF(u' - v/r) - EI_z(\psi' - \bar{z}\theta')/r + M_y\vartheta/r, \\ B_z &= -EI_z(\psi' - \bar{z}\theta') + M_y\vartheta, \\ V_y &= EI_z(\psi'' - \bar{z}\theta'') - (M_y\vartheta)' + N\psi, \\ B_y &= EI_y(w'' - \vartheta'/r) + (EC_s\theta' - \bar{z}EI_z\psi')/r \end{aligned} \right\}$$

ここに、 f_z は次のようにある。

$$f_z = 1/EI_z + \bar{z}^2/EC_M \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} & -M_z\vartheta, \\ & V_z = EI_y(w''' - \vartheta''/r) + (EC_s\theta'' - \bar{z}EI_z\psi'') \\ & - GJ_{red}\theta)/r + Nw' - (M_z\vartheta)', \\ & B_T = -EC_s\theta' + \bar{z}EI_z\psi', \\ & B_\xi = -EC_s\theta'' + \bar{z}EI_z\psi'' + GJ_{red}\theta \end{aligned} \right\} \quad (29 \text{ a} \sim \text{g})$$

曲線ばりの変形前の状態に対する座標軸 x, y, z に対応させて、変形後の状態に対する座標軸を ξ, η, ζ を定義する。座標軸 x, ξ に関するねじりモーメント B_x と B_ξ との間は、次の関係がある。

$$B_x = B_\xi + B_\eta\psi - B_\zeta w' = B_\xi + M_y\psi - M_zw'$$

$$\dots \dots \dots \quad (30)$$

ここに、 B_η, B_ζ は η, ζ 軸に関する有限変位理論の場合の曲げモーメントを表わす。

式(29.g)を式(30)に代入すると、次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} B_x &= -EC_s\theta'' + \bar{z}EI_z\psi'' + GJ_{red}\theta + M_y\psi \\ & - M_zw' \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

著者は論文 12)において、薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の場合の基礎微分方程式を曲線ばりの微小要素に対する力のつり合い条件から誘導しているが、これらの微分方程式と、変分問題の Euler-Lagrange の方程式として誘導した微分方程式(28), (29)とは、式の構成がすこし異なった表現になっている。しかし、式(28), (29), (31)を1階の連立常微分方程式系に変換すると、力のつり合い条件から誘導した1階の連立常微分方程式と内容的には同じになっていることがわかり、両者の方で誘導した微分方程式系が力学的に等価であることを示している。

4. 1 階の連立常微分方程式系

式(28 a-d), (29 a-f), (31)を1階の連立常微分方程式系に変換する。その際、式(28 b)と(29 c)との変形から生ずる V_y' に対する B_z/r^2 , 式(28 d)と(31)との変形から生ずる B_x' に対する B_T/r^2 , 式(28 a), (29 b)を変形して生ずる軸方向のひずみ u' に対する $(B_z/r)/EF$ の項は、影響が非常に小さいので無視すると、1階の連立常微分方程式系は次のように求められる。

y 軸方向の変位成分 v に関する方程式:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} v \\ \psi \\ B_z \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_z & 0 \\ 0 & N & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \psi \\ B_z \\ V_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_z M_y & 0 & -\bar{z}/EC_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta \\ \theta \\ B_T \\ B_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ H \\ 0 \\ p_y \end{pmatrix} \quad (32)$$

z 軸方向の変位成分 w に関する方程式：

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} w \\ \phi \\ B_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI_y & 0 \\ 0 & N & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \phi \\ B_y \\ V_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(1/r + M_z/EI_y) & 0 & 1/r \\ 0 & GJ_{red}/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta \\ \theta \\ B_T \\ B_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix} \quad (34)$$

ただし、 $\phi = -w'$ と定義する。

ねじり成分 ϑ に関する方程式：

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vartheta \\ \theta \\ B_T \\ B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{x}M_y/EC_M & 0 & -1/EC_M & 0 \\ 0 & -GJ_{red} & 0 & 1 \\ ap_y + bp_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta \\ \theta \\ B_T \\ B_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{z}/EC_M & 0 \\ 0 & -M_y & 0 & 0 \\ 0 & M_y' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \psi \\ B_z \\ V_y \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_z & 0 & 0 \\ 0 & M_z' & -1/r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \phi \\ B_y \\ V_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ bp_y - ap_z \end{pmatrix} \quad (35)$$

x 軸方向の変位成分 u に関する方程式：

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} u \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/EF \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \psi \\ B_z \\ V_y \end{pmatrix} \quad (36)$$

5. 伝達マトリックス法による解析式の設定

Fig. 4 に示す n 格間の薄肉開断面の曲線ばりを考える。この曲線ばりの任意格間 ($k-1 \sim k$) における曲線長 l_k のはりを支配する 1 階の連立常微分方程式は、式 (32) ~ (36) より、

$$\frac{d}{ds_k} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}_k \quad (37)$$

または、さらに短縮して、

$$dV_k/ds_k = G_k(s_k)V_k + L_k \quad (38)$$

によって表わされる。

ここに、

$$V_1 = \begin{pmatrix} v \\ \psi \\ B_z \\ V_y \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} w \\ \phi \\ B_y \\ V_z \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \theta \\ B_T \\ B_x \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} u \\ H \end{pmatrix} \quad (39)$$

と定義する。式 (39) の定義に対応して、式 (37) の部分マトリックス $G_{11}, G_{12}, \dots, G_{44}$ およびベクトル L_1, L_2, L_3, L_4 が、式 (32) ~ (36) より求められる。

式 (38) の一般解において、 $s_k = l_k$ とおくと、格間 ($k-1 \sim k$) の曲線ばりの両端における物理量を結ぶ伝達方程式が、次の形式で求められる。

$$V_k^R = F_k V_k^L \quad (40)$$

ここに、

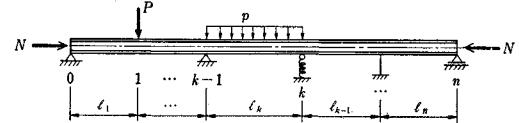


Fig. 4 Continuous curved beam with n fields.

$$\left. \begin{aligned} V_k^R &= \left[\frac{V(l_k)}{1} \right]_k, \quad V_k^L = \left[\frac{V(0)}{1} \right]_k, \\ F_k &= \left[S_k \left| S_k \int_0^{l_k} S^{-1}(s_k) L(s_k) ds_k \right| \right]_k \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

を表わし、 S_k は式 (38) の同次方程式に対する解の係数マトリックスを表わす。また、 F_k は格間伝達マトリックスであるが、これを求める際の数値積分の方法としては、Runge-Kutta, Picard, Romberg, べき級数展開法など多くの方法があるが^{17), 18), 19)}、本研究では、普通の Runge-Kutta の方法によって、実用上十分な精度で、2 次の応力問題に対する数値解析が可能であった。

Fig. 4 に示すように、格点 k の両側の状態量ベクトル V_k^R と V_{k+1}^L を結ぶ伝達方程式は、格点における変位の適合条件（幾何学的条件）と力のつり合い条件から求められ、次式によって表わされる。

$$V_{k+1}^L = P_k V_k^R \quad (42)$$

$$V_{k+1}^L = P_k V_k^R + D_k * M_k \dots \dots \dots \quad (43)$$

ここに、 P_k は中間格点 k の伝達マトリックスを表わす。中間格点が集中荷重の作用点、弾性支点、断面変更点の場合は、式(42)が適用される。また、式(43)における右辺の第2項は、中間格点の横断面が剛支点上にある場合の飛躍量を表わす項で、 M_k は未知量としてあつかわれる支点反力のベクトル、 D_k^* は力のつり合い条件から求まるマトリックスである。新しく未知量になる支点反力に対応して、中間支点においては、変位の条件から中間条件式が求められる。なお、具体的な中間支点の条件に対する伝達方程式と伝達計算については、論文 12) を参照されたい。

n 格間の曲線ばかりの場合は、それぞれの格間と格点とに対して、式 (40), 式 (42) あるいは式 (43) が求められ、左端の格間から順次に右方へ状態量ベクトルの代入計算を繰り返すと、左端と右端との状態量ベクトル V_n^L と V_n^R を結ぶ方程式が次のように求められる。

$$V_n^R = F_n P_{n-1} F_{n-1} \cdots P_1 F_1 V_1^L + \sum_{j=m}^n (F_n P_{n-1} F_{n-1} \cdots F_{j+1} D_j * M_j) \dots \quad (44)$$

ここに、式(44)の右辺の第2項は中間格点 j が剛支点であることを示し、これが m 格点だけあることを表わす。

薄肉開断面曲線ばかりの左端と右端との支持条件に対して、境界条件式はそれぞれ、

$$V_1^L = R \{A, 1\}, \quad R' V_n^R = 0 \dots \dots \dots \quad (45)$$

によって与えられる。ここに R , R' は、それぞれ左端と右端との境界条件を表わすマトリックスで、支持条件に対して、変位の適合条件式と力のつり合い条件式から、格点伝達方程式のときと同じ概念によって求められる。ただし、薄肉開断面曲線ばりの横断面には、14 個の物理量が存在するが、はりの端部では共役対となる物理量 (v, V_y), (ψ, B_z), (w, V_x), (ϕ, B_y), (θ, B_x), (Θ, B_T), (u, H) のどちらか一方が既知条件として与えられる。また、 A は左端の自由度からなる初期ベクトルである。

式(44)と式(45)とから、次の方程式が求められる。

$$R'F_nP_{n-1}F_{n-1}\cdots P_1F_1R\{A, 1\} \\ + \sum_{i=n}^m (R'F_nP_{n-1}\cdots F_{j+1}D_j^*M_i) = 0 \dots \quad (46)$$

また、中間の剛支点における変位と変形量との幾何学的条件から求められる中間条件式は、

$$U\{A_1, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}\} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (47)$$

によって表わされる。ここに、マトリックス U は、それぞれの中間支点の左側における状態量ベクトルと、初期ベクトル A および中間支点の未知ベクトル $M_1, M_2,$

…とを結ぶ伝達方程式の係数マトリックスより機械的に求められる。

式(46), (47)を連立方程式として解くと、初期条件と未知の剛支点反力が求められ、ふたたび、伝達方程式(40), (42), (43)を用いて、左端の格間より右方へ順次に、曲線ばかりの内部領域における状態量ベクトルが計算される。薄肉開断面の曲線ばかりの力学的挙動を2次の応力問題として求める場合は、荷重の漸増に対して、この章に述べた計算を繰り返し、横断面上の応力分布状態を追跡するという方法をとることになる。

6. 応力度の計算

前章までの解析式による計算からは、薄肉開断面曲線ばかりの変形前の状態に対する座標系 xyz に関する有限変位理論の場合の断面力が求められる。これらの断面力より、変形後の状態に対する座標系 $\xi\eta\zeta$ に関するねじりモーメント B_ξ 、曲げモーメント B_η 、 B_ζ は、

$$\begin{bmatrix} B_{\hat{x}} \\ B_{\eta} \\ B_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & -\phi \\ 0 & 1 & \vartheta \\ 0 & -\vartheta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \dots\dots\dots(48)$$

より求められる。また、座標軸 η , ζ 方向のせん断力は、次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} V_\eta &= V_y + (M_y \vartheta)' - H\Psi, \\ V_\zeta &= V_z - (M_z \vartheta)' + H\phi \end{aligned} \right\} \dots \quad (49)$$

z 軸に関して対称な横断面の、せん断中心 M に関する曲げねじりモーメント \bar{B}_T は、次のように求められる。

ここに、 ε は図心とせん断中心との距離を表わす。

有限変位理論の場合のせん断中心に関するねじりモーメント \bar{B}_ξ は、St. Venant のねじりモーメント T_{M_1} 、そり拘束とねじり変形に基因する 2 次的ねじりモーメント T_{M_2}, T_{M_3} 、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} T_{M1} &= GJ\theta, \quad T_{M2} = -EC_M\theta'', \\ T_{M3} &= \int_F \sigma r_M^2 \theta \, dF = -(N i_M^2 + M_y r_{yM})\theta \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

の総和から求められる。ここに、

$$r_M^2 = y^2 + (z - \bar{z})^2, \quad i_M^2 = \frac{1}{F} \int_E r_M^2 dF$$

$$r_{yM} = \frac{1}{I_y} \int_F z r_M^2 dF \dots \dots \dots \quad (52)$$

を表わす。

以上の断面力より、横断面上の点 $A(y, z)$ における垂直応力 σ_x は、次式から計算される。

$$\sigma_x = -\frac{H}{F} - \frac{B_\eta}{I_\eta} z + \frac{B_\zeta}{I_\zeta} y + \frac{\bar{B}_T}{C_M} \varphi_M \dots \quad (53)$$

20 m の3径間連続曲線ばかりの、中央径間中央点に鉛直軸方向の集中荷重が作用した場合の2次の応力問題の解析をする。なお、集中荷重 P は横断面の($y=-1.0 \text{ cm}$, $z=-25.0 \text{ cm}$)の位置に作用している。また、各支点においては、横方向の変位とねじり変形が剛に拘束されているものとする。

解析式におけるマトリックスの数値要素の大きさをそろえるために任意の基準定数を、 $EI_{01}=EI_y$, $EI_{02}=EI_z$, $EC_0=EC_M$, $l_0=\text{格間長}$, $h_0=\text{桁高}$ と定め、

$$\left. \begin{aligned} v^* &= v, \psi^* = \psi l_0, B_x^* = B_x l_0^2/EI_{02}, V_y^* = V_y l_0^3/EI_{02}, \\ w^* &= w, \phi^* = \phi l_0, B_y^* = B_y l_0^2/EI_{01}, V_z^* = V_z l_0^3/EI_{01}, \\ \vartheta^* &= \vartheta h_0, \Theta^* = \Theta h_0 l_0, B_T^* = B_T h_0 l_0^2/EC_0, \\ B_x^* &= B_x h_0 l_0^3/EC_0, \\ u^* &= u, H^* = H l_0^3/EI_{01} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

とおいて、1階の連立常微分方程式と伝達方程式とを換

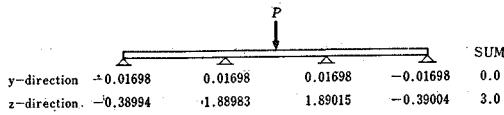


Fig. 6 Reactions due to concentrated load
 $P=3.0 \text{ ton}$ based on the finite displacement theory.

Table 1

(unit, t, m)

point	0	1	2	3	4	5	6
v	0	-0.00129	-0.00217	-0.00160	0	-0.00299	-0.00179
w	0	-0.01800	-0.02591	-0.01878	0	0.01985	0.02845
ϑ	0	0.07975	0.11792	0.08823	0	-0.09213	-0.13596
Θ	0.05385	0.04028	0.00403	-0.04004	-0.06172	-0.04810	0
B_x	0.13187	0.10677	0.03010	-0.09836	-0.27112	-0.15662	-0.06597
B_y	0	0.63190	1.25239	1.87752	2.49458	0.07435	-2.29738
B_z	0	0.02713	0.05409	0.08070	0.10680	0.10784	0.10819
B_t	$= B_z - B_y \vartheta$	0	-0.09359	-0.08495	0.10680	0.11469	-0.20416
B_T	0	0.12199	0.20194	0.18286	-0.02336	-0.13305	-0.29770

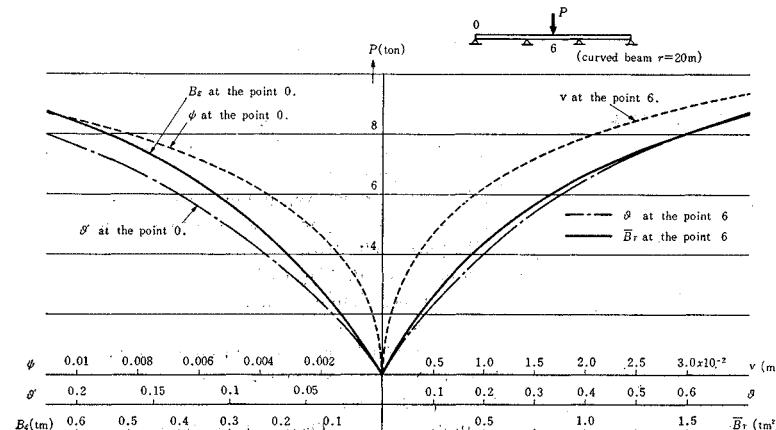


Fig. 7 Displacement, deformations and moments at the point 0 and 6 as the function of the concentrated load P (curved beam).

算して数値計算を行なう。

解析結果：

$P=3.0 \text{ t}$ に対する有限変位理論の場合の各支点反力は、Fig. 6 のように計算されており、満足できる結果となっている。また、断面力と変形量との計算値の一部を Table 1 に示す。

Fig. 7 は、連続曲線ばかりの左端 ($pt. 0$) における弱

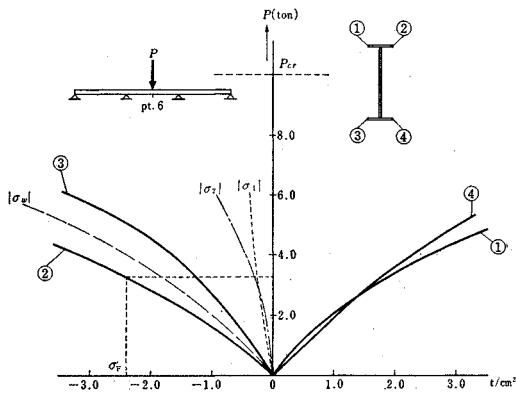


Fig. 8 Stress distribution on the cross section at the point 6.

$$\sigma_i = B_i z / I_y, \sigma_z = B_z y / I_z, \sigma_w = \bar{B}_T \varphi_M / C_M$$

軸 (z 軸) まわりのたわみ角 $\psi (=v')$ 、ねじり角 ϑ の変化率 $\dot{\vartheta}'$ 、ねじりモーメント B_ϑ 、曲線ばかりの中央点 ($pt. 6$) における y 軸方向の変位 v 、ねじり角 ϑ 、曲げねじりモーメント \bar{B}_T を荷重 P の関数として表わしたものである。

Fig. 8 は、荷重 P の漸増に対する格点 6 における横断面上の点①, ②, ③, ④の応力分布状態を表わすものである。曲線ばかりの材料を DIN の st 37 (yield point 24 kg/mm^2) とすると、 $P=3.5 \text{ t}$ で横断面上の点②が降伏点に達する。

Fig. 7, 8 から明らかなように、曲線ばかりの場合は比較的低い荷重に対してもねじり変形が大きくなり、ねじりモーメントおよび曲げねじりモーメントが曲線ばかりの耐力低下に対して一層支配的であることが理解できる。また、この問題に対する座屈荷重は $P_{cr}=10.2 \text{ t}$ と求められている。

なお、この研究における計算プログラムで曲率半径を $r \rightarrow \infty$ として、R. Möll 計算した問題（論文（5），p. 189, Bild 14）を解いたところ、R. Möll の解析結果と全く同じ応力曲線と座屈荷重を得たことを付記しておく。

9. あとがき

薄肉開断面曲線ばかりの 2 次の応力問題の解析に対する基礎微分方程式を変分問題の Euler-Lagrange の微分方程式として誘導し、これが曲線ばかりの微小要素の変形状態を考慮して、力のつり合い条件から誘導した有限変位理論の場合の微分方程式系¹²⁾と力学的等価性を示していくことを示した。

この論文では I-断面曲線ばかりを基本にして基礎微分方程式を求め、解析式の公式化を試みているが、I-断面のみならず π 形断面や鉛直軸に関して対称な開断面の曲線ばかりの 2 次の応力問題の解析に適用することが可能である。また、I-断面直線ばかりの横倒れ座屈の問題は、この論文における一部の式を変形して用いることにより解析できるものである。

この論文では薄肉開断面曲線ばかりの 2 次の応力問題を、弾性領域における解析として展開している。弾性域における解析から、この種のはりの力学的挙動を理解することができる。

はりの最終耐力は材料の性質を考慮した弾塑性問題として求めなければならないが、この論文を基本にして薄肉開断面曲線ばかりの弾塑性解析に発展させることができるものである。

謝辞：

論文を終えるにあたり、伝達マトリックス法による構造解析の一連の研究において多大のご指導とご高配とをいただいている、名古屋大学工学部の成岡昌夫教授に深甚なる謝意を表する次第であります。

付記

論文で用いているおもな記号を次に列記しておく。

$$\left. \begin{array}{l} N, Q_y, Q_z : x, y, z \text{ 軸方向の断面力} \\ M_y, M_z : 曲げモーメント \end{array} \right\} \text{微小変位理論}$$

x, y, z : 変形前の状態に対する座標軸
 ξ, η, ζ : 変形後の状態に対する座標軸
 $u, v, w : x, y, z$ 軸方向の変位

 $B_x, B_\xi : \text{ねじりモーメント} \quad \left. \begin{array}{l} B_y, B_z, B_\eta, B_\zeta : \text{曲げモーメント} \end{array} \right\} \text{有限変位理論}$

F : 断面積、弾性ポテンシャルの関数

$$GJ_{\text{red}} : \text{広義のねじり剛性}, GJ_{\text{red}} = GJ - Ni_s^2$$

$$-M_y r_y$$

$$V_k^L, V_k^R : \text{格間 } l_k \text{ の曲線ばかりの左端と右端との状態量ベクトル}, V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, 1\}$$

F_k, P_k : 格間 l_k と格点 k に対する伝達マトリックス

A : 左端の自由度からなる初期ベクトル

M_k, M_j : 中間の剛支点における未知量のベクトル

R, R' : 左端と右端の境界条件のマトリックス

D^* : 中間支点の飛躍量のつり合いマトリックス

$t(s)$: 薄肉断面の始点 s_0 より s の点の板厚

$S_y(s), S_z(s)$: 断面 1 次モーメント

$S_{y,M}(s)$: そりに関する断面 1 次モーメント

$S(l_k)$: 同次方程式 $dV_k/ds_k = G_k V_k$ の一般解における係数マトリックス

\bar{x} : 横断面の図心とせん断中心との距離

$$\theta = \vartheta' + w'/r$$

$$\psi = v' + u/r$$

{ } : column vector

参考文献

- 1) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- 2) Basler, K., B. Thürlmann : Strength of Plate Girders in Bending, Journal of the Structural Division, ASCE, NO. ST 6 (1968. 8), pp. 153-181.
- 3) Klöppel, K., H. Friemann, D. Reuschling : Beitrag zur Berechnung der Stabilität beliebig gelagerter zweigurtiger Fachwerkträger oder Vollwandträger mit Querschnittsverformung gegen Ausweichen aus der Trägerwerksebene, Veröffentlichungen des Instituts für Statik und Stahlbau der TH Darmstadt, Heft 8, 1969.
- 4) Klöppel, K., R. Möll : Das räumliche Stabilitätsproblem beliebig gelagerter, gebrochener Stabzüge mit doppelt-oder einfachsymmetrischem, offenem dünnwandigen Querschnitt unter feldweise konstanter Momenten-und Normalkraftbeanspruchung, Der Stahlbau 32(1963), pp. 289-296 und pp. 336-342.
- 5) Möll, R. : Kippen von querbelasteten und gedrückten Durchlaufträgern mit I-Querschnitt als Stabilitätsproblem und als Spannungsproblem II. Ordnung behandelt Der Stahlbau 3 (1967), pp. 69-76 und 6 (1967), pp. 184-190.
- 6) Klöppel, K., R. Möll : Die Instabilität des Zuggurtes gekrümmter I-Träger unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung, Der Stahlbau 5 (1967), pp. 129-139.
- 7) Unger, B. : Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfachsymmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt und einer Abwandlung des Reduktionsverfahrens als Lösungsmethode, Gedruckte Dissertation, TH Darmstadt, 1969.
- 8) Klöppel, K., B. Unger : Eine experimentelle Untersuchung des Kippverhaltens von Kragträgern im elastischen und im plastischen Bereich im Hinblick auf eine Neufassung des Kippsicherheitsnachweises der DIN 4114, Der Stahlbau 11 (1971), pp. 321-329 und pp. 375-383.
- 9) Namita, Y. : Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Transactions of JSCE, 155 (1968).

- 7), pp. 32-41.
- 10) 奥村：熔接組立材の座屈に関する研究（第1報）—熔接鋼桁の捩り座屈一，熔接学会誌，Vol. 21（昭 27. 10），pp. 8-15.
- 11) Schrader, K.H. : Übertragungsmatrizen bei Schwingungen dünnwandiger Stäbe mit offenen Profilen bei Kopplung von Biegung und Drillung, Ing.-Arch., 34 (1965), pp. 321-329.
- 12) 遠田：伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の解析，土木学会論文報告集，199(1972.3)，pp. 11-20.
- 13) 成岡・遠田：伝達マトリックス法，コンピュータによる構造工学講座 I-2-B, 培風館, 1970.
- 14) 遠田：遷移行列法による任意骨組構造の解析，土木学会論文集，160（昭 43.12），pp. 1-11.
- 15) 遠田：遷移マトリックス法を応用した剛節合トラスの解析，土木学会論文報告集，181 (1970.9), pp. 15-26.
- 16) 日本数学会編集：数学辞典（第2版），岩波書店，1968.
- 17) Reuschling, D. : Beitrag zur Berechnung mehrfeldriger, beliebig gelagerter dünnwandiger Stäbe mit einfach-oder unsymmetrischem offenem Querschnitt unter Normalkraft-und Querbelastung als Verzweigungsproblem oder Spannungsproblem II. Ordnung nach dem Übertragungsmatrizen-Verfahren, Gedruckte Dissertation, TH Darmstadt, 1969.
- 18) Pestel, E.C., F.A. Leckie : Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
- 19) Schäfer, H. : Die numerische Ermittlung von Übertragungsmatrizen, Der Stahlbau 2 (1970), pp. 54-60.
(1972.6.20・受付)