

# 土の力学における塑性の基本理論と 三軸試験への適用

正員 工学博士 星 堃 和

## A BASIC THEORY OF PLASTICITY IN SOIL MECHANICS AND ITS APPLICATION TO TRIAXIAL TEST RESULTS

(Trans. of JSCE. No. 21, Dec. 1954)

By Dr. Eng., Kanō Hoshino, C.E. Member.

**Synopsis** Further developments in the theory of Soil Mechanics will never be attained without establishing a basic law of deformation of soils which will connect elasticity, plasticity, and criterion of failure.

In this paper the Author presents a basic theory of plasticity which is a full revision of the fundamental theory published in a paper (Ie 10) submitted to the Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering at Rotterdam in 1948, by referring to the experimental results of the triaxial tests carried out since then in his laboratory.

Based on the same principle as in the former theory that the deformations and failure of such a plastic material as soils may be governed by the amount of energy or the work done by external forces, this new basic theory is perfectly free from the defects in the former theory, having clear physical meanings and showing definite relationships to the elasticity. The criterion of failure was discussed with proposal on a novel definition of angle of internal friction and cohesion.

By solving some fundamental problems have been derived the formulae for determining the volume change, shearing strains, and yield stress of a soil body under such a stress condition as pure compression (hydrostatic pressure), pure shear, triaxial compression, unconfined compression, or such a strain condition as consolidation with lateral confinement. Formulae were also given for expressing the change of the amount of energy during the application of stresses. Those formulae will be able to give clear and rational interpretations of the test results in Soil Mechanics.

The analysis of the experimental data of triaxial tests has resulted in satisfactorily good agreements with the theoretical derivations, determining reasonable values for the theoretical constants from the observed data. It may be concluded that the validity of the theory has been duly proven.

**要 旨** 土の力学における諸問題は土が弾性から塑性を経て降伏あるいは破壊に至る間に示す力学的性質の変化を法則化することによつて始めて解決への途が開かれるとの見解に立つて、著者はここに一つの理論体系を提出する。この理論はさきに発表した基礎理論（土木学会論文集，昭24，及び第2回土質力学国際会議論文集，1948）を、その後実施した三軸試験結果に照して修正発展させたもので、土のような塑性材料の変形と降伏が外力による仕事量すなわちエネルギー量によつて左右されるとの思想から出発している。新しい基本理論は旧理論の持つ本質的な欠陥から免かれ、その力学的な意味及び弾性との関係も明かかつ多くの実験的裏付けの上に立つている。

このような土の塑性に関する新理論に基いて、降伏の条件について論じ、従来と異なる一見解を示し、次いで応力条件または歪条件が与えられた基本的な場合に適用して、体積変化、剪断歪、降伏応力などを求める算式を導き、終りにこの基本理論を三軸試験による実験結果に適用し、実測値から塑性の常数を求め、理論が実験とよく符合することを確かめ、その妥当性を立証した。

### 目 次

- |                           |                    |
|---------------------------|--------------------|
| 1. 概 説                    | (C) 三軸圧縮（側圧を一定とした） |
| 2. 応力，歪，及びエネルギーの新しい表示     | (D) 一軸圧縮           |
| 3. 旧理論の概要とおもな実験事実との相違点    | (E) 圧密（側方への歪を妨げた）  |
| 4. 新しい塑性の基本理論             | 9. 三軸試験への適用        |
| 5. 新理論の力学的な意味             | (A) 概 説            |
| 6. 弾性との関係                 | (B) 三軸試験の方法        |
| 7. 降伏の条件について              | (C) 基本理論の三軸試験への適用  |
| 8. 基本的な応力条件または歪条件における問題の解 | (D) 三軸試験結果の検討      |
| (A) 純粋圧縮                  | (E) 結 び            |
| (B) 純粋剪断                  |                    |

\* 東京大学教授，生産技術研究所  
Prof., The Institute of Industrial Science, Univ. of Tōkyō.

## 1. 概 説

塑性力学つまり弾性域を越えた材料の力学についてはかなり古くから研究されており<sup>1)2)</sup>, 特に金属の塑性に関する研究は最近急速な進歩を遂げ実用の域に入ろうとしている<sup>3)4)</sup>。

土の力学で取扱かれる土質材料は岩石に近いものや硬い粘土などでかなり弾性を示すものもあるが、一般に砂や軟かい粘土はわずかの応力によつて塑性を呈し、降伏(破壊)を起こしやすい。また締固めや圧密の現象は土のきわめて重要な性質であるが、これらはいずれも弾性域を越えた塑性学上の問題であつて、土の力学の問題の大半は塑性力学の領域に属するといつて過言ではない。例えば、土の力学の工学上の応用として擁壁のうける土圧や地盤支持力を求める問題を解くに当つて、土体内部における三次元的な応力の変化とこれともなう歪みの変化は当初弾性的であるとしても応力の増大ともなつて塑性性質が支配的となり、ついには降伏するに至る。その間に応力と歪みはあらゆる過渡的な経過をたどり、また弾性域と塑性域とが同時に存在するものとされている。このような応力と歪みの変化をこれまでのように弾性理論と降伏条件からだけで説明することはできないし、問題を完全に解くことは望めない。著者の基礎支持力に関する研究<sup>5)</sup>もこの点できわめて不満足なものであつた。

このような土の力学の基本問題がほとんど未開拓のまま放り出されている原因の一つには、金属のように単純で均質な材料と異なり、土は少なくとも土粒子、水、空気、固、液、気の三相からなるきわめて複雑な材料と考えられているためと思われるが、そのため土の力学の進歩が滞つている現状を歎かざるを得ない。ここに弾性から塑性を経て降伏に至る一連の力学現象を系統だつた理論で説明しようとする試みの重要性があるわけで、この試みが少しでも成功すればそだけ土の力学の発展に役立ち、その実用性を高めることができると信ずるのである。

著者は15年このかたクーロン公式で表わされる降伏条件から求められる摩擦角や粘着力が、土の力学常数としてきわめて重要な値であるにもかかわらずその本質が明かでなく、かつ実測の方法によつて異なつた値をうることなどから土の力学に関心と疑問を持ちつづけ、土の塑性について理論と実験の両面から研究を重ねてきた。

1948年ロッテルダムで開かれた第2回土質力学基礎工学国際会議に提出した論文<sup>6)7)</sup>は、土の塑性変形と降伏をエネルギーの増減と関連させて説明しようとしたもので、不完全ながら新しい理論を組み立てて塑性の領域へ踏みこむ足がかりを与えたのである。

この理論をこのたび求めた新理論に対して旧理論と呼ぶならば、旧理論の概要は後述するがその要点は土が一樣な外圧力で圧縮されるときは締固められて変形しにくくなることから、土が形を保ち変形に抵抗するのは一樣に働いている内部的な圧力、すなわち内部応力と一樣な外圧力の働きによるものと考え、また剪断応力が加わることによつて変形が増大しついに降伏に達するものと考えて、外力による応力を一樣な圧縮応力と応力の差から生ずる剪断応力に区分し、それぞれのなす仕事量すなわちエネルギー変化を弾性の場合の和の形から差の形に改め、二つの変形係数がエネルギーに比例するものとして理論を組み立て、降伏の条件を導き、応力-歪曲線を求め、またモールの円の包絡線につき論じた。

当時この理論の当否を確かめうる適当な実験結果がなかつたため、この理論はやや突飛な着想による仮説であるにとどまり、一般の承認をうるに至らなかつた。

オランダの Coenen 博士はこの理論に対して討議を寄せ<sup>8)</sup>、歪及びエネルギーの式が応力の経路のいかんによらず一定の値をとるため積分可能の条件 (Condition of Integrability) を満足する必要があるとの見地から、この理論の成立を否定するとの結論を下したが、著者は歪の値が経路の異なる場合に異なることは塑性力学において起りうることを考え、ただエネルギーの式だけは経路に無関係な一定値をとり、積分可能の条件にも当てはまるので、この理論は成立するとの見解を発表して同氏への解答とした<sup>9)10)</sup>。この討議の結論は新理論の組み立てに対し重要な手がかりとなつたことを記して Coenen 氏に感謝したい。

旧理論から得られた重要な結論の一つとして、直接剪断試験によるよりも三軸試験による方がより合理的な結果が期待できることがわかり、正しい力学常数を決定できる見込みであつたので、その後三軸試験機の試作に力を注ぎ、昭和26年(1951)第1号機を完成、さらにこれを改良した第2号機を製作実用化し、多くの実験を行つて理論と対比して結果を検討した<sup>11)</sup>。

その結果、旧理論によつて適切に説明できるいくつかの事実が得られた反面、事実と相違し説明できない点もいくつか発見された。これらの実験的事実を取り入れこれと調和できる二、三、の修正公式も作つてみた<sup>12)</sup>が理論的に筋の通つたものでなかつた。本年(1954)になつてようやく最後の難点を解決して新しい理論の組み立てを終り、三軸試験結果に照してその妥当性を検証することができた。

この新理論は旧理論に含まれた理論的欠陥を完全に取り除き、三軸試験結果とよく符号し、合理的な容積変化、

応力歪曲線、降伏条件を与えることができるので、土の力学の基本原則として理論と実際の両方面に応用できるものと考えられる。

しかしながら実際の土が示す力学的性質はきわめて複雑なものであつて多くの副因的な要素を含んでいるから、この理論にあつたような変形をする土はいわば完全塑性体といつた理想材料と見なければならぬのは、厳密に弾性の法則に従う完全弾性体が実在しないのと同様と考えられる。土が塑性変形をする間にエネルギーが熱やその他の形に変換し土粒子の変形、破碎、回転運動などに消費される場合や、砂のような粗粒子間の相互運動などは理論に考えられていない。また粘性や間隙圧の影響を副次的な因子として無視することはできないであろう。

この研究の本来の目的は土の力学を土圧や基礎支持力の工学的な問題に応用しようとするものであつて、応用上さらに研究を要する問題が山積して今後この方面に向つて努力したいと考えている。

この理論を繰返し荷重の場合に拡張できれば 舗装版の設計に役立つものと思われ、また土以外の類似な材料例えばコンクリートの塑性に適用することもできるであろう。これらはいずれも今後の研究課題である。

## 2. 応力、歪及びエネルギーの新しい表示

弾性理論においては実験的事実に基づいて応力と歪の関係を弾性係数  $E$  とポアソン比  $\nu$  の 2 常数でつないで表わすのが普通である。

しかし塑性力学では弾性理論の基本式をそのまま用いるのは何かと不便が多いので、これらに次のような全く新しい表示を与えた。

主応力：土の力学で普通用いられるように応力はすべて圧縮を正、引張りを負で表わし三主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を次のごとく表示する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_m + \sqrt{2} \cos \omega \cdot \tau_m \\ \sigma_2 &= \sigma_m + \sqrt{2} \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) \cdot \tau_m \\ \sigma_3 &= \sigma_m + \sqrt{2} \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) \cdot \tau_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

これらの式から

$$\begin{aligned} \cos \omega + \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) &= 0 \\ \left\{ \cos \omega - \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) \right\}^2 + \left\{ \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) - \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) \right\}^2 + \left\{ \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) - \cos \omega \right\}^2 &= \frac{9}{2} \\ \cos \omega \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) &= \frac{1}{4} \cos 3\omega \end{aligned}$$

の諸関係を用いると次の諸式が得られることは容易にわかる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \tau_m &= \frac{2}{3} \sqrt{\left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2} \\ \cos 3\omega &= \frac{\sqrt{2}}{\tau_m} (\sigma_1 - \sigma_m) (\sigma_2 - \sigma_m) (\sigma_3 - \sigma_m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

これから三主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  に代つて  $\sigma_m, \tau_m, \omega$  を用いて応力を表わすことができることがわかる。 $\sigma_m, \tau_m, \omega$  のもつ力学的な意味はあとで説明する。

主応力は弾性理論と異なり外力による応力のみでなく内部圧応力  $\sigma_0$  も加えた全応力である。

$\frac{\pi}{3} > \omega > 0$  の範囲では、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  である。

主歪：新しい応力の表示に対する主歪の微小変化は次の形になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} (\doteq d\varepsilon_1) &= \frac{d\sigma_m}{3V} + \sqrt{2} \cos \omega \cdot \frac{d\tau_m}{3U} \\ \frac{d\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} (\doteq d\varepsilon_2) &= \frac{d\sigma_m}{3V} + \sqrt{2} \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) \frac{d\tau_m}{3U} \\ \frac{d\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3} (\doteq d\varepsilon_3) &= \frac{d\sigma_m}{3V} + \sqrt{2} \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) \frac{d\tau_m}{3U} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで歪の符号は縮みを正、伸びを負とする。また  $d\omega$  を含む項は含まれないものとしている。式中の  $V, U$  はそれぞれ直応力と剪応力の変化に対する変形係数であつて、弾性理論では  $E, \nu$  を含む常数として取扱つているが、この理論ではエネルギー従つて応力の関数と考える。弾性理論との関連性については後述する。

エネルギー：応力の変化によるエネルギーの変化は次式から求められる。

$$dA = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 + \sigma_3 d\epsilon_3$$

(1) 式と (3) 式を用い

$$\begin{aligned} \cos \omega + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \omega\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) &= 0 \\ \cos^2 \omega + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \omega\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

を利用すると上の式は次のようになる。

$$dA = \frac{\sigma_m}{V} d\sigma_m + \frac{\tau_m}{U} d\tau_m \dots\dots\dots(4)$$

この式には  $\omega$  を含まないから、 $V, U$  をエネルギーの関数と考えるとエネルギーは  $\omega$  と無関係になる。

### 3. 旧理論の概要とおもな実験事実との相違点

先年発表した旧理論<sup>9), 7)</sup>を簡単に説明する。旧理論に用いた符号に ' をつけて区別すると、

$$\tau_m' = \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_m, \quad G = \frac{3}{4} U, \quad \mu' = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu, \quad X = A$$

となる。まず (4) 式のエネルギーの形を差の形に直し

$$dA = \frac{\sigma_m}{V} d\sigma_m - \frac{\tau_m}{U} d\tau_m \dots\dots\dots(5)$$

とした。これはやや突飛な思いつきで、弾性理論とのつながりが切断されるので旧理論の難点の一つである。次に  $V, U$  がいずれも  $A$  に比例するとして、

$$V = \frac{V_0}{A_0} A, \quad U = \frac{U_0}{A_0} A$$

かつ  $U_0 = \mu^2 V_0$

とおいた。これは塑性変形の間ポアソン比が一定に保たれることを仮定したことになり後に実験事実と合わないことがわかつた。上の関係を用いてエネルギーの式を積分しかつ初期条件として

$$\sigma_m = \sigma_0 \text{ において } A = A_0$$

とすると、  $A_0 = \frac{\sigma_0^2}{V_0}$

をうるから、結局エネルギーの式は

$$A = \frac{\sigma_0}{V_0 \mu} \sqrt{(\mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \dots\dots\dots(6)$$

従つて  $V = \frac{V_0}{\mu \sigma_0} \sqrt{(\mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}, \quad U = \frac{\mu V_0}{\sigma_0} \sqrt{(\mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \dots\dots\dots(7)$

をうる。降伏の条件として  $A=0$  とすると

$$\tau_m = \mu \sigma_m \quad \therefore \mu = \frac{\tau_m}{\sigma_m} \dots\dots\dots(8)$$

をうる。式 (8) の比例関係は実験結果とよく一致し、また一様圧縮をうけた時の体積変化と剪断時における応力歪曲線も理論と実験結果がほぼ符合している。しかるに3軸試験において上下方向歪  $\epsilon_v$  と体積変化  $e$  の関係はこの理論から側方の歪  $\epsilon_l$  が

$$\epsilon_l = -\frac{1-\mu^2}{2+\mu^2} \epsilon_v$$

であるから  $e = \epsilon_v + 2\epsilon_l = \frac{3\mu^2}{2+\mu^2} \epsilon_v \quad \therefore \mu = \sqrt{\frac{2\frac{e}{\epsilon_v}}{3-\frac{e}{\epsilon_v}}}$

となるはずである。すなわち  $e$  は  $\epsilon_v$  に比例することが予想されるのであるがこれは実験と合わない。かりに応力のかかり始めのときの  $e/\epsilon_v$  をとつて  $\mu$  の値を求めても降伏条件 (8) 式から求めた  $\mu$  と一致しない。この点

も旧理論の大きな欠陥である。

また旧理論によると側方への歪を許さない圧密の場合に  $\mu^2 > 0.5$  ( $\mu'^2 > 3/8$ ) において降伏が起こることになるが、これも合理的とは考えにくい。

新しい理論は上記の難点をすべて解決しており理論的にも実験的にもずっと固い基礎の上に打ち建てられている。

#### 4. 新しい塑性の基本原理

新しい理論の組み立ては

- 1) 一様な圧縮 (静水圧) (以下純粋な圧縮とよぶ) のみの場合
- 2) 純粋な剪断のみの場合
- 3) 圧縮と剪断が同時に起る場合

に別けて順を追って進める。

- 1) 純粋な圧縮 (静水圧縮) この場合は剪応力は起らないから  $\tau_m = 0$  で

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$$

したがって式 (4) の第1項だけとつて

$$dA_N = \frac{\sigma_m}{V} d\sigma_m,$$

$V$  が  $A_N$  に比例すると仮定して

$$V = \frac{V_0}{A_{N_0}} A_N$$

ここに  $V_0 : \sigma_m = \sigma_0$  における  $V$ ,  $A_{N_0} : \sigma_m = \sigma_0$  における  $A_N$

とおき積分し,  $\sigma_m = 0$  において  $A_N = 0$  から積分常数をきめると  $A_N^2 = \frac{A_{N_0}}{V_0} \sigma_m^2$ ,

初期条件として  $\sigma_m = \sigma_0$  において  $A_N = A_{N_0}$  とすると

$$A_{N_0} = \frac{\sigma_0^2}{V_0}$$

をうるから, エネルギー  $A_N$  と変形係数  $V$  はそれぞれ

$$A_N = \frac{\sigma_0}{V_0} \sigma_m, \quad V = \frac{V_0}{\sigma_0} \sigma_m \dots \dots \dots (9)$$

$A_N, V$  ともに  $\sigma_m$  に比例することがわかる。この結果は旧理論と変りはない。

2) 純粋な剪断 ここに云う純粋な剪断は二次元的な平面応力の場合だけでなく, 一般に  $\sigma_m$  を一定に保つたまま  $\tau_m$  だけが変化する場合を考える。まず土は内部応力  $\sigma_0$  と一様な外力によつて  $\sigma_m$  だけの純粋な圧縮をうけている状態から出発して純粋剪断が加えられるものとする。

(4) 式の第2項だけをとつて

$$dA_S = \frac{\tau_m}{U} d\tau_m$$

ここで 
$$U = \frac{U_0}{A_{R_0}} (A_R - A_S)$$

とおき, 式中の記号はそれぞれ次のとおりとする。

$U_0 : \sigma_m = \sigma_0$  のときの剪断に対する変形係数の値

$A_R$  : 剪断抵抗エネルギーで,  $A_N$  に比例して増すものとする。すなわち  $\lambda$  を比例常数として

$$A_R = \lambda^2 A_N = \lambda^2 \frac{\sigma_0}{V_0} \sigma_m \dots \dots \dots (10)$$

$A_{R_0} : \sigma_m = \sigma_0$  における  $A_R$  の値, すなわち

$$A_{R_0} = \lambda^2 \frac{\sigma_0^2}{V_0} \dots \dots \dots (10')$$

なお 
$$U_0 = \mu^2 V_0 \dots \dots \dots (11)$$

とおいて積分すると,  $\tau_m = 0$  において  $A_S = 0$  から積分常数は 0 となるから次のようになる。

$$A_R A_S - \frac{1}{2} A_S^2 = \frac{A_{R_0}}{U_0} \frac{\tau_m^2}{2} \quad \therefore A_S = A_R - \sqrt{A_R^2 - \frac{A_{R_0}}{U_0} \tau_m^2}$$

(10), (10'), (11) の諸式を用いて書き改めると

$$A_S = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ \lambda \mu \sigma_m - \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

従つて 
$$U = \frac{\mu V_0}{\lambda \sigma_0} \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \dots\dots\dots (13)$$

剪断エネルギー  $A_S$  が剪断抵抗エネルギー  $A_R$  に等しくなつたときに降伏すると考えてよいため

$$A_S = A_R$$

あるいはこの条件は

$$\frac{dA_S}{d\tau_m} = \frac{A_{R0}}{U_0} \frac{\tau_m}{A_R - A_S} = \infty$$

に等しくなるが、いずれにしても降伏の条件として

$$\tau_m = \lambda \mu \sigma_m \dots\dots\dots (14)$$

をうる。旧理論の式 (8) と比べると  $\lambda$  を含んでいる点異なつている。(14) 式の条件はまた  $U=0$  であることを表わし、降伏のときに応力-歪曲線の接線が水平となることを示している。

3) 圧縮と剪断が同時に起る場合 2) では  $\sigma_m$  を一定として  $\tau_m$  だけが変化する場合を考えたが、一般に  $\sigma_m$  と  $\tau_m$  が同時に変化する場合、エネルギーが応力の変化する経路のいかんによらないで最終の応力状態だけからきまる値をとるという原理を適用する (この原理の適用を思い付くに当つては Coenen 氏との討議に負うところがきわめて大きかつた)。従つてある応力状態 ( $\sigma_m, \tau_m$ ) に対するエネルギーはまず純粋圧縮によつて一様な圧縮応力  $\sigma_m$  を与え、次に純粋剪断によつて剪断応力を  $\tau_m$  としたときのエネルギーに等しいことになるから、全エネルギーは 1) と 2) の場合を加えて  $A = A_N + A_S$

式 (9) と式 (12) を用いると

$$A = \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ (1 + \lambda^2) \sigma_m - \frac{\lambda}{\mu} \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

これから 
$$dA = \frac{\partial A}{\partial \sigma_m} d\sigma_m + \frac{\partial A}{\partial \tau_m} d\tau_m$$

と式 (4) すなわち

$$dA = \frac{\sigma_m}{V} d\sigma_m + \frac{\tau_m}{U} d\tau_m$$

の両式をくらべて

$$\frac{\sigma_m}{V} = \frac{\partial A}{\partial \sigma_m} = \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ (1 + \lambda^2) - \frac{\lambda}{\mu} \frac{(\lambda \mu)^2 \sigma_m}{\sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \right\}$$

$$\frac{\tau_m}{U} = \frac{\partial A}{\partial \tau_m} = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\tau_m}{\sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}}$$

をうる。従つて

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{V_0}{\sigma_0} \frac{\sigma_m \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}}{(1 + \lambda^2) \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} - \lambda^2 \mu \sigma_m} \\ U &= \frac{V_0}{\sigma_0} \frac{\mu}{\lambda} \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

これで一般の場合の変形係数を応力の関数として求めることができた。 $U$  の形は 2) の場合の式 (13) と同じであるが、 $V$  は 1) の場合の式 (9) と全く異なつた形になつた。エネルギーの変化は全微分の形で表わされておりそのまま積分ができる。つまり応力変化の経路のいかんによらないことは自明なことであるが、これに対して  $V, U$  は  $\sigma_m$  と  $\tau_m$  の関係のいかんによつて異なる値をとるから、これらを含む歪はそのまま積分可能でなく、応力変化の経路によつて異なつた値をとることになる。

応力または歪の変化する条件が与えられ、 $\sigma_m$  と  $\tau_m$  の間の関係がきまれば、式 (3) に式 (16) の  $V, U$  を代入し、積分して歪量を求めることができる。一般には  $\omega$  がやはり  $\sigma_m, \tau_m$  の関数になるはずであるが、それが一定もしくは 0 となる場合もかなり多い。

いま  $\omega$  が一定な場合を考えると

$$e = 3 \epsilon_m = \int \frac{d\sigma_m}{V} = \frac{\sigma_0}{V_0} \left[ (1 + \lambda^2) \ln \sigma_m - \lambda^2 \mu \int \frac{d\sigma_m}{\sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \right] + c \dots\dots\dots (17)$$

正誤表による訂正

$$d = 3 \delta_m = \int \frac{d\tau_m}{U} = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda}{\mu} \int \frac{d\tau_m}{\sqrt{(\lambda\mu\sigma_m)^2 - \tau_m^2}}$$

を求めることができれば、 $e$  は単位体積当りの体積変化を表わし、 $d$  はこれに対応する単位体積当りの剪断歪を表わして、主歪量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 - \exp[-\epsilon_m - \sqrt{2} \cos \omega \cdot \delta_m] \doteq \epsilon_m + \sqrt{2} \cos \omega \cdot \delta_m \\ \epsilon_2 &= 1 - \exp\left[-\epsilon_m - \sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \omega\right) \cdot \delta_m\right] \doteq \epsilon_m + \sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \omega\right) \cdot \delta_m \\ \epsilon_3 &= 1 - \exp\left[-\epsilon_m - \sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) \cdot \delta_m\right] \doteq \epsilon_m + \sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) \cdot \delta_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$\epsilon_m, \delta_m$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_m &\doteq \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \\ \delta_m &\doteq \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{2}\right)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

で、平均の圧縮歪み、平均の剪断歪みに当る。

$\sigma_m, \tau_m$  によるエネルギーは

$$\left. \begin{aligned} A_{\sigma_m} &= \int \sigma_m \frac{d\sigma_m}{V} = \frac{\sigma_0}{V_0} \left[ (1 + \lambda^2) \sigma_m - \lambda^3 \mu \int \frac{\sigma_m d\sigma_m}{\sqrt{(\lambda\mu\sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \right] + c \\ A_{\tau_m} &= \int \tau_m \frac{d\tau_m}{U} = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda}{\mu} \int \frac{\tau_m d\tau_m}{\sqrt{(\lambda\mu\sigma_m)^2 - \tau_m^2}} - c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

これらはいずれもそのまま積分できないから、応力の経路によつて異なつた値をとるが、両者を加えた全エネルギーは常に積分可能である。

一般の場合の降伏条件は 2) の場合から類推して

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_m} = -\infty, \quad \frac{\partial A}{\partial \tau_m} = \infty$$

から  $\sqrt{(\lambda\mu\sigma_m)^2 - \tau_m^2} = 0 \quad \therefore \tau_m = \lambda\mu\sigma_m \dots\dots\dots (21)$

となり、式 (14) と同じ形であるが、異なる点は  $\sigma_m$  が 2) の場合に一定であるとしたのに対しここでは一般に変化する場合に拡張されたことである。上の降伏条件はまた  $V=0, U=0$  を意味することはただちにわかる。

以上で新しい塑性理論の組み立てが終つた。次にこの理論の力学的な意味を説明する。

### 5. 理論の力学的な意味

直交する 3 の平面に加わる応力を  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  とすると方向余弦が  $l, m, n$  であるような傾いた面での応力の  $x, y, z$  軸方向の分力  $X, Y, Z$  は釣合の条件から (図-1)<sup>13)</sup>

$$\left. \begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

主応力の場合には

$$X = \sigma_1 l, \quad Y = \sigma_2 m, \quad Z = \sigma_3 n \dots\dots\dots (23)$$

をうるから、傾いた面の全応力は

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2$$

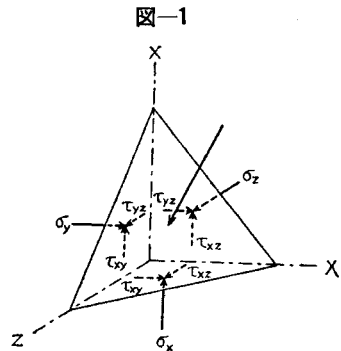
式 (1) を代入すると

$$\begin{aligned} S^2 &= \sigma_m^2 + 2\sqrt{2} \left\{ \cos \omega \cdot l^2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \omega\right) \cdot m^2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) \cdot n^2 \right\} \sigma_m \tau_m \\ &\quad + 2 \left\{ \cos^2 \omega \cdot l^2 + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \omega\right) \cdot m^2 + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) \cdot n^2 \right\} \tau_m^2 \end{aligned}$$

また鉛直応力  $\sigma_n$  及び剪断応力  $\tau$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \\ \tau^2 &= S^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \end{aligned}$$

であるから、 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  を用いて計算すると



$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_m + \sqrt{2} \left\{ \cos \omega \cdot l^2 + \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) \cdot m^2 + \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) \cdot n^2 \right\} \tau_m \\ \tau^2 &= 2 \left[ l^2 \cos^2 \omega + m^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) + n^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ l^2 \cos \omega + m^2 \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) + n^2 \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) \right\}^2 \right] \tau_m^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

をうる。ここで  $l=m=n$  とおくと  $l=m=n=\frac{1}{\sqrt{3}}$  となりかつ

$$\cos \omega + \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) = 0$$

$$\cos^2 \omega + \cos^2 \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) + \cos^2 \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) = \frac{3}{2}$$

であるから

$$\sigma_n = \sigma_m, \quad \tau = \tau_m$$

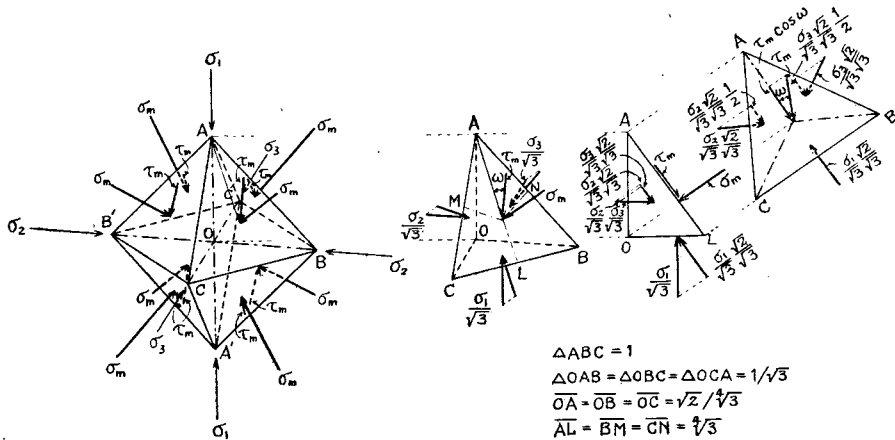
となる。これは応力を考えている点を中心として3主軸とそれぞれ等角をなす面で囲まれた微小正八面体を考えると、その表面に加わる垂直応力と剪応力がそれぞれ  $\sigma_m, \tau_m$  であることを示している。これ以外の面では一般に垂直応力が  $\tau_m$  の影響をうける。この正八面体の表面における第1主軸 ( $\sigma_1$  軸) の投影線に対し  $\tau_m$  の方向がなす角は  $\omega$  である。何となれば正八面体を作る1平面の面積を単位の大ききにとると主軸をふくむ3つの切断面の面積はいずれも  $1/\sqrt{3}$  となり、図-2 を参照すると応力の釣合から

$$\tau_m \cos \omega = \sigma_1 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \sigma_2 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} - \sigma_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_m)$$

この関係が式(1)の第1式と等しいことはただちにわかる。他の2式についても同様な結果をうる事ができるから、 $\omega$  の持つ力学的な意味は明かである。

図-2 微小正八面体上の応力

Fig. 2 Stresses on the octahedral plane and principal stresses



次に応力が一般的な形で与えられているときの  $\sigma_m, \tau_m, \omega$  を求めておこう。いま3主応力の一つを  $S$  とし、主応力面の方向余弦を  $l, m, n$  とすると

$$X = Sl, Y = Sm, Z = Sn$$

これと式(22)を等しいとおいて次の関係をうる。

$$\begin{aligned} (S - \sigma_x)l - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n &= 0 \\ -\tau_{xy}l + (S - \sigma_y)m - \tau_{yz}n &= 0 \\ -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (S - \sigma_z)n &= 0 \end{aligned}$$

これから  $l, m, n$  を消去すると

$$S^3 - j_1 S^2 + j_2 S - j_3 = 0 \dots \dots \dots (25)$$

となり、式中の係数はそれぞれ次のようになる。



$$\left. \begin{aligned} j_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m \\ j_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = 3\sigma_m^2 - \frac{3}{2}\tau_m^2 \\ j_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ &= \sigma_m^3 - \frac{3}{2}\sigma_m\tau_m^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3\omega \cdot \tau_m^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

これから次の関係が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3}j_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \tau_m^2 &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{j_1^2 - 3j_2} = \frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) = \frac{4}{9} \left( \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right) = \frac{2}{9}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z) \\ &\quad + \frac{2}{3}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \\ \cos 3\omega &= \frac{-9j_1j_2 + 3j_3^2 + 27j_3^3}{2(j_1^2 - 3j_2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m^3}(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\tau_m^3} \left( \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_m^3 + \frac{3}{2}\sigma_m\tau_m^2 \right) = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m^3} \left( \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 \right. \\ &\quad \left. - \sigma_z\tau_{xy}^2 - \sigma_m^3 + \frac{3}{2}\sigma_m\tau_m^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

正誤表により訂正

これらを用いると与えられた任意の応力状態から  $\sigma_m$ ,  $\tau_m$ ,  $\omega$ , を求めることができる。

いま横軸上に  $\sigma_m$  の値をとり、これと直交する面内で放射方向に  $\tau_m$  の値をとり、鉛直軸となす角を  $\omega$  とすれば、任意の応力状態はこの座標空間の一点に対応して表わされる。図-3 において

$$\overline{OP} = \sigma_m, \quad \overline{PQ} = \tau_m, \quad \angle NPQ = \omega$$

とすれば Q 点は  $(\sigma_m, \tau_m, \omega)$  なる応力状態を表わす。

エネルギー  $A$  及び二つの変形係数  $V, U$  はいずれも  $\sigma_m$  と  $\tau_m$  だけからきまり、 $\omega$  に無関係であるから、この座標空間において  $\sigma_m$  軸に対し軸対称の分布を示す。

また降伏の条件は式 (21) から

$$\lambda\mu = \frac{\tau_m}{\sigma_m}$$

であるから、原点を通る一つの円錐面となる。いま

$$\lambda\mu = \tan \psi \dots\dots\dots (28)$$

とおくと、 $\psi$  はこの円錐面の半頂角で、降伏の際に  $\tau_m/\sigma_m$  の比がとる極限值が  $\tan \psi$  である。まゝに考えた正八面体の表面において剪断応力  $\tau_m$  の垂直応力  $\sigma_m$  に対する比の極限值が

$\tan \psi$  であるから、 $\psi$  は真の意味の内部摩擦角と考えることができよう。ただしこれは滑りが正八面体の面に沿って起ることを意味するわけではない。滑り面の方向と  $\psi$  の関係についてはさらに研究を要する。

$$\psi = \tan^{-1} \lambda\mu$$

であるから、 $\psi$  は  $\lambda$  と  $\mu$  の 2 要素に分解され、剪断抵抗エネルギーの圧縮エネルギーに対する比 ( $\lambda^2$ ) と圧縮率 ( $\mu^2 = U_0/V_0$ ) が大きな材料ほど大きな内部摩擦角をもつことになり、妥当な結論であるように思われる。

### 6. 弾性との関係

塑性理論において当初応力と歪の変化が微小な間は弾性理論に一致するものと考えなければならないから、上に述べてきた理論にふくまれる四つの常数は弾性常数との間にある関係を持つことになる。

初期の応力状態として様な内部圧応力  $\sigma_0$  だけが生じているものとし、その時の変形係数を  $V_0, U_0$  とすると

図-3 応力の坐標と降伏条件  
Fig. 3 Cartesian coordinate of stress and a conical plane of failure criterion

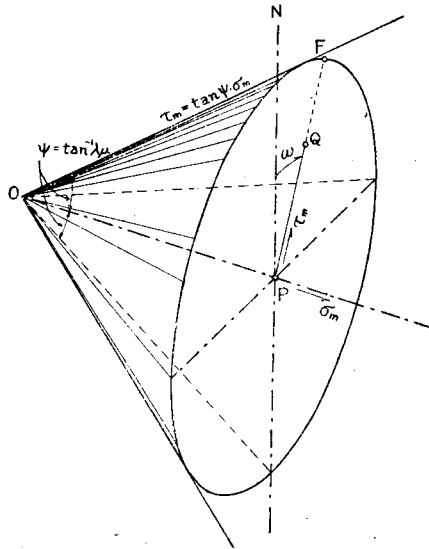
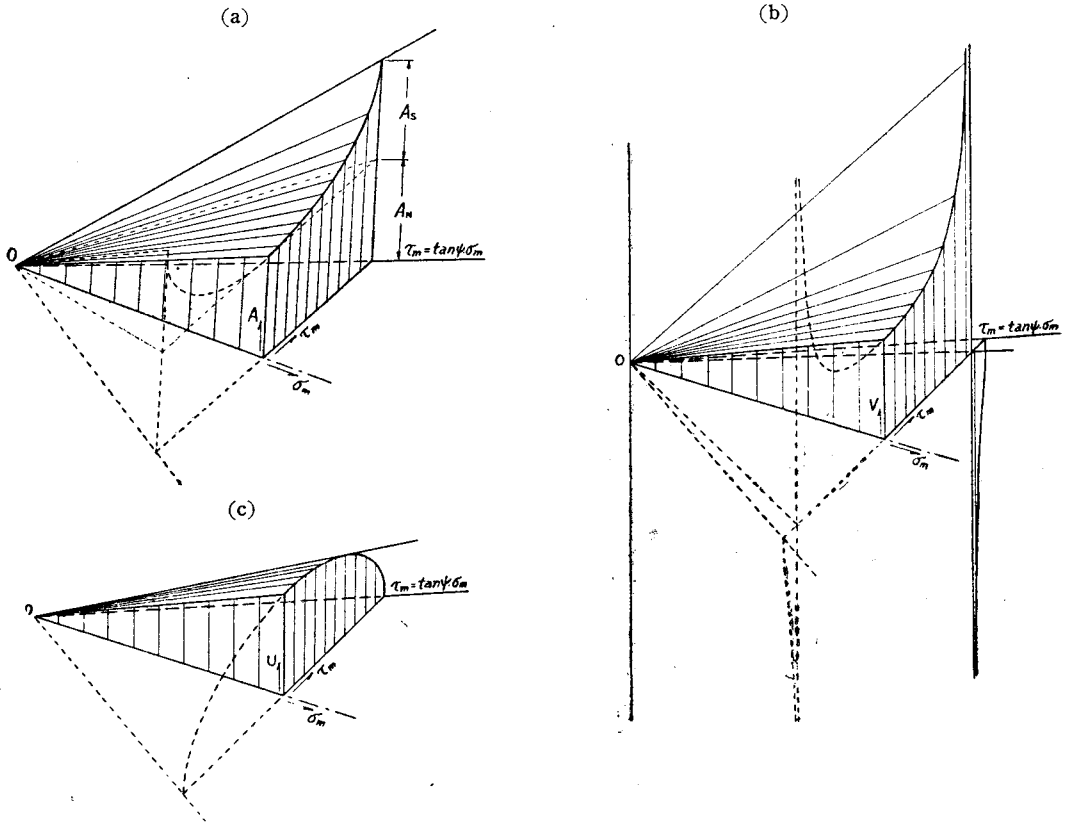


図-4 全エネルギー (A) 及び2変形係数 (V, U) の分布  
 Fig. 4 Variations of total energy (A) and coefficients of deformation (V, U)



微小な応力変化に対して

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1 &= \frac{\Delta \sigma_m}{3V_0} + \sqrt{2} \cos \omega \frac{\Delta \tau_m}{3U_0} = \frac{1}{E} \{ \Delta \sigma_1 - \nu (\Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3) \} \\ \Delta \varepsilon_2 &= \frac{\Delta \sigma_m}{3V_0} + \sqrt{2} \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) \frac{\Delta \tau_m}{3U_0} = \frac{1}{E} \{ \Delta \sigma_2 - \nu (\Delta \sigma_3 + \Delta \sigma_1) \} \\ \Delta \varepsilon_3 &= \frac{\Delta \sigma_m}{3V_0} + \sqrt{2} \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) \frac{\Delta \tau_m}{3U_0} = \frac{1}{E} \{ \Delta \sigma_3 - \nu (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2) \} \end{aligned}$$

でなければならぬから

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_m &= \frac{1}{3} (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3) \\ \langle \Delta \tau_m \rangle^2 &= \frac{4}{9} \left\{ \left( \frac{\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2}{2} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3}{2} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \sigma_3 - \Delta \sigma_1}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

を利用して、両辺をそのままあるいは2乗して加えると次の関係が得られる。

$$\frac{1}{V_0} = \frac{3(1-2\nu)}{E}, \quad \frac{1}{U_0} = \frac{3(1+\nu)}{E}$$

従つて

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad U_0 = \frac{E}{3(1+\nu)} \\ \mu^2 &= \frac{U_0}{V_0} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

あるいは書きかえて

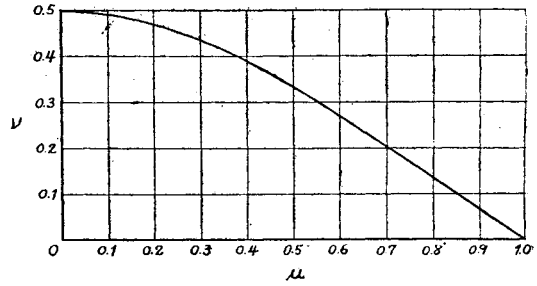
$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{1-\mu^2}{2+\mu^2}, \quad E = \frac{9}{2+\mu^2} U_0 \\ V_{Ei} &= \frac{E}{3(1-2\nu)} = V_0, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3}{2} U_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$\nu=0$  ならば  $\mu=1$  で完全圧縮性を  
 $\nu=0.5$  ならば  $\mu=0$  で完全非圧縮性を

示すから (図-5),  $\mu$  は圧縮性の大小を示す指数と考えることができ, 三次元的な問題ではポアソン比  $\nu$  に代つて用いて便利であり, かつ降伏条件を支配することは前に説明した。

以上の関係を用い初期条件として一様な内部圧応力  $\sigma_0$  を考えると, 微小な応力変化に対して塑性の基本式は弾性理論の公式と一致する。塑性常数のうち  $\lambda$  は弾性とは全く無関係な塑性に特有な常数である。

図-5 ポアソン比 ( $\nu$ ) と圧縮係数 ( $\mu$ ) の関係  
 Fig. 5 Relationship between Poisson's ratio ( $\nu$ ) and coefficient of compressibility ( $\mu$ )



### 7. 降伏条件について

新しい塑性理論で求められた降伏条件は式 (21) と (28) から  $\frac{\tau_m}{\sigma_m} = \lambda\mu = \tan \psi$  .

$\psi$  を真の内部摩擦角と名づけたときと同様に考えて,  $\sigma_m$  が内部圧応力  $\sigma_0$  だけであるときの剪断強さをもつて真の粘着力  $C$  とすれば

$$C = \sigma_0 \tan \psi \dots\dots\dots (31)$$

降伏条件を支配する  $\psi$  の値, 従つて  $C$  の値もまた従来土の力学で考えてきたように最大と最小の2主応力だけから決まるものでなく, 中間主応力の大きさが影響を与えることは明らかである。いま  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  として

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \kappa \dots\dots\dots (32)$$

とおくときは

$$\kappa=1 \text{ ならば } \sigma_2 = \sigma_1, \quad \kappa=0 \text{ ならば } \sigma_2 = \sigma_3$$

となり,  $\kappa$  が 1 と 0 の中間にあれば  $\sigma_2$  は  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  の中間の値をとる。これに式 (1) を代入すると

$$\kappa = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \omega\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right)}{\cos \omega - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right)}$$

をうるから, これから

$$\cos \omega = \frac{2 - \kappa}{2\sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}}, \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{3}\kappa}{2\sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}} \dots\dots\dots (33)$$

をうる。すなわち  $\kappa$  の変化は  $\omega$  の変化に対応していることがわかる。かつ

$$\kappa=0 : \cos \omega = 1 \quad \therefore \omega = 0,$$

$$\kappa=1 : \cos \omega = 0.5 \quad \therefore \omega = \frac{\pi}{3}.$$

また式 (32) から

$$\sigma_2 = \kappa\sigma_1 + (1 - \kappa)\sigma_3,$$

この関係を式 (2) に代入すると

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\{(1 + \kappa)\sigma_1 + (2 - \kappa)\sigma_3\}, \quad \tau_m = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}(\sigma_1 - \sigma_3),$$

をうるから  $\tan \psi$  は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tan \psi &= \frac{\tau_m}{\sigma_m} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}(\sigma_1 - \sigma_3)}{(1 + \kappa)\sigma_1 + (2 - \kappa)\sigma_3} \\ \sigma_1 &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \kappa + \kappa^2} + (2 - \kappa)\tan \psi}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \kappa + \kappa^2} - (1 + \kappa)\tan \psi} \sigma_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

あるいは

$\psi$  は  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  だけでなく  $\kappa$  を含む中間主応力  $\sigma_2$  の影響を知つて始めてきまる常数である。

これに対して従来用いなれてきた内部摩擦角  $\varphi$  及び粘着力  $C'$  は

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}, \quad C' = \sigma_0 \tan \varphi$$

で与えられるから、上の関係を入れると

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{3 \tan \psi}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\kappa+\kappa^2}+(1-2\kappa)\tan \psi} \\ \text{または} \quad \tan \varphi &= \frac{3 \tan \psi}{2\sqrt{\{1/\sqrt{2}\sqrt{1-\kappa+\kappa^2}-(1+\kappa)\tan \psi\}\{1/\sqrt{2}\sqrt{1-\kappa+\kappa^2}+(2-\kappa)\tan \psi\}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(35)$$

これから明らかなように従来用いた内部摩擦角, 粘着力は  $\kappa$  のいかんによつて変る変数で土の常数とみなすことはできなくなる。ただ  $\kappa$  従つて  $\omega$  が一定しているときだけ一定な値をとることがわかる。なお

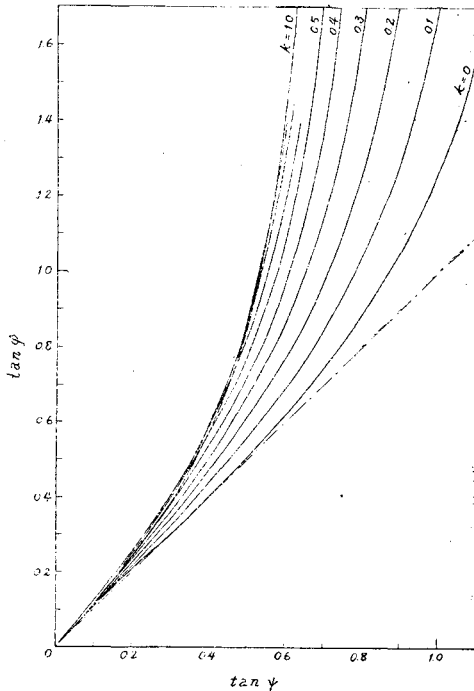
$$\kappa=0: \tan \varphi = \frac{3 \tan \psi}{2\sqrt{(\sqrt{2}-\tan \psi)(\sqrt{2}+2 \tan \psi)}}$$

を計算すると  $\varphi$  と  $\psi$  はかなり近似した値を示し

$$\tan \psi = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.3535$$

図-6 新しい摩擦角 ( $\psi$ ) と従来の摩擦角 ( $\varphi$ ) の比較

Fig. 6 Comparison of two frictional angles



において完全に一致するのであるが,  $\kappa$  が大きくなると  $\varphi$  は  $\psi$  にくらべていちじるしく大きくなる。(図-6)

従来モールの円の包絡線に接線を引いてその傾きから内部摩擦角を求めるのが慣例となつていたが,  $\kappa$  従つて  $\omega$  が一定な円の群に接する直線を求め, 上述の関係を用いて内部摩擦角  $\psi$  ( $\varphi$  に代つて) を求めるならば意義があるが, 包絡線が曲線となる場合は  $\kappa$  または  $\omega$  が変化する円群であることを意味するから, その包絡線の接線をもつて内部摩擦角をきめようとするのは無理といわなければならない。直接剪断試験から求める垂直応力と剪断応力との間の直線的な関係は, 歪条件が平面変形であるという以外に応力条件が不明であつて, その内容をさらに深く追及することがむづかしい。英国の Roscoe 教授が考案した新しい型の剪断試験機<sup>14)</sup>はこの点について新しい資料を提供できるのではないかと思う。また中間主応力が降伏に及ぼす影響に関してはある種の金属について実験的に明らかにされているが, 土についてはわずかに仏の Habib 氏が圧縮と同時に捩りを与える三軸試験機を試作して実験した結果があるだけである<sup>15)</sup>。その結果をみると著者の理論から推定される傾向とかなり異なつていゝるが, 実験上の困難が多く特に中空でない円筒供試体を用いているので結果の解析に無理な点も認められる

からなお今後の研究にまつところが多い。

ある種の金属に対し, 内部摩擦角  $\psi$  はほとんど 0 に近いとして,  $\sigma_3 \tan \psi = C$  の粘着力だけを考えると, von Mises の降伏条件として

$$\tau_m = \sigma_3 \tan \psi = C \dots\dots\dots(36)$$

が得られ降伏条件は 1 の円筒面として表わされるが, モールの円から求まる粘着力は

$$C' = \sigma_3 \tan \varphi = \frac{3C}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\kappa+\kappa^2}}$$

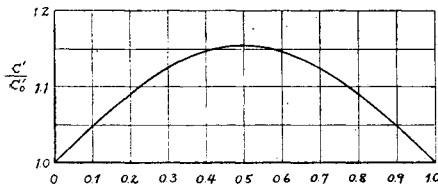
$\kappa=0$  のとき  $C' = C_0'$  とおくと

$$C_0' = \frac{3}{2\sqrt{2}} C \quad \therefore C = \frac{2\sqrt{2}}{3} C_0'$$

をうるから上式は

図-7 従来の粘着力 ( $C'$ ) に及ぼす中間主応力の影響

Fig. 7 Influence of the intermediate principal stress on the so-called cohesion,  $C'$



$$C' = \frac{C_0'}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \dots \dots \dots (37)$$

これから明らかなように、従来用いられてきた粘着力  $C'$  は中間応力のいかんによって変化し材料の常数と認めがたい (図-7)。この事実は金属の降伏について実証されている<sup>1)</sup>。

8. 基本的な応力条件または歪条件における問題の解

土の力学における塑性の基本理論を基本的な応力条件または歪条件が与えられた場合に適用して、体積の変化 剪断歪、極限強さ、エネルギーなどを計算し、合理的な結果を与えることを示し、かつ実際問題への応用、特に三軸試験結果の解析に利用を図ることとする。三軸試験へ適用するには純粋圧縮と三軸圧縮 (一定側圧) の場合の算式を用いる。一軸圧縮では三軸圧縮の特別な場合として接線係数と拡張された意味でのポアソン比の変化を追跡する。また歪条件が与えられた場合の一例として圧密 (側方移動のない) の算式を示し、静土圧係数を求め、静止する壁やサイロの側壁にかかる圧力、あるいは地盤内の土の自重による圧力分布を知る手がかりを与えている。

(A) 純粋圧縮 外部から一様な静水圧力が加わる場合を純粋圧縮とよぶ。この場合主応力はすべて等しく剪断応力は起らないから、外圧を  $\sigma$  とすると

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m = \sigma_0 + \sigma, \quad \tau_m = 0$$

となり、式 (3) 右辺の第1項だけをとれば

$$\frac{d\epsilon_1}{1-\epsilon_1} = \frac{d\epsilon_2}{1-\epsilon_2} = \frac{d\epsilon_3}{1-\epsilon_3} = \frac{d\epsilon_m}{1-\epsilon_m} = \frac{d\sigma_m}{3V}$$

をうるから、これに式 (9) の関係  $V = \frac{V_0}{\sigma_0} \sigma_m$  を代入し、かつ  $\frac{\sigma}{\sigma_0} = \xi$  において積分すると体積変化度  $e$  は

$$e = 3\epsilon_m = 1 - \left( \frac{\sigma_0 + \sigma}{\sigma_0} \right)^{-\frac{\sigma_0}{V_0}} = 1 - (1 + \xi)^{-\frac{\sigma_0}{V_0}} = \frac{\sigma_0}{V_0} \ln(1 + \xi)$$

となる。ここで

$$\ln(1 + \xi) = \phi \dots \dots \dots (39)$$

とおくと次式が得られる。

$$e = 3\epsilon_m = \frac{\sigma_0}{V_0} \phi \dots \dots \dots (40)$$

歪はすべての方向で等しく次のようになる。

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_m = \frac{e}{3} \dots \dots \dots (41)$$

エネルギーは式 (9) で与えられる。すなわち

$$A_N = \frac{\sigma_0}{V_0} \sigma_m$$

$\sigma_m$  が増すとき体積及びエネルギーの変化は 図-8 のようになり、体積変化度を示す曲線と縦軸 ( $e$ ) の間にある面積を積分したものがエネルギーの値に等しくなる。

(B) 純粋剪断 ここに云う純粋剪断は2次元の場合だけでなく広く一般に3次元の場合をも含み、すべて  $\sigma_m$  が一定で、 $\tau_m$  だけが変化する場合に適用される。剪断歪は式 (17) の第2式から

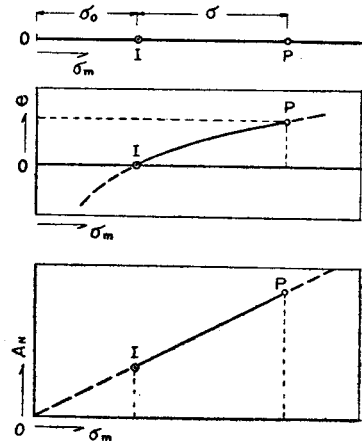
$$d = 3\delta_m = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda}{\mu} \int \frac{d\tau_m}{\sqrt{(\lambda\mu\sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \\ = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda}{\mu} \sin^{-1} \left( \frac{\tau_m}{\lambda\mu\sigma_m} \right) \dots \dots \dots (42)$$

主歪は式 (18) で与えられ、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \sqrt{2} \cos \omega \cdot \delta_m \\ \epsilon_2 &= \sqrt{2} \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \omega \right) \cdot \delta_m \\ \epsilon_3 &= \sqrt{2} \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \omega \right) \cdot \delta_m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

図-8 純粋圧縮における体積及びエネルギーの変化を示す図

Fig. 8 A diagram showing the changes of volume and energy of a soil under pure compression



エネルギーについては式(12)を用いて剪断エネルギーを、式(15)を用いて全エネルギーを求めることができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} A_S &= \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ \lambda^2 \sigma_m - \frac{\lambda}{\mu} \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \right\} \\ A &= \frac{\sigma_0}{V_0} \sigma_m + A_S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

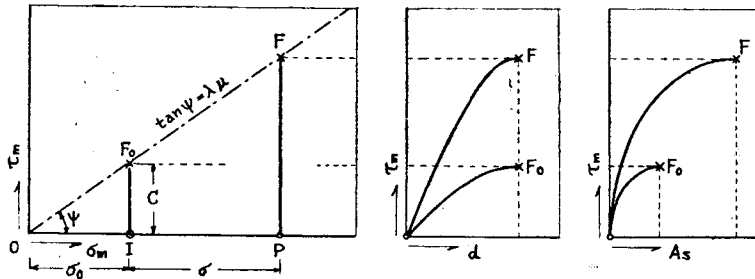
降伏条件は式(14)から

$$\tau_m = \lambda \mu \sigma_m = \text{const.} \dots\dots\dots (45)$$

以上の関係を図示すると図-9 のようになる。

図-9 純剪断における歪及びエネルギーの変化を示す図

Fig. 9 A diagram showing the changes of strain and energy of a soil under pure shear



いま3主応力が直線比例的に変化する場合を考えれば、

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \kappa \dots\dots\dots (46)$$

とおいて  $\sigma_2 = \kappa \sigma_1 + (1 - \kappa) \sigma_3$

をうるから、この関係と、純剪断の条件

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 \sigma_0$$

を用いると、3主応力はそれぞれ次のように表わされる。

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_0 - \frac{1 - 2\kappa}{2 - \kappa} \sigma, \quad \sigma_3 = \sigma_0 - \frac{1 + \kappa}{2 - \kappa} \sigma$$

したがって、 $\sigma_m = \sigma_0, \quad \tau_m = \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}}{2 - \kappa} \sigma$

をうるから、式(33)の関係

$$\cos \omega = \frac{2 - \kappa}{2\sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}}, \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{3} \kappa}{2\sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}}$$

を利用すると、

$$\left. \begin{aligned} d &= 3 \delta_m = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda}{\mu} \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}}{\lambda \mu (2 - \kappa)} \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \\ \epsilon_1 &= \frac{2 - \kappa}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}} \delta_m, \quad \epsilon_2 = \frac{-1 + 2\kappa}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}} \delta_m, \quad \epsilon_3 = \frac{-1 - \kappa}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}} \delta_m \\ A &= \frac{\sigma_0^2}{V_0} \left\{ 1 + \lambda^2 - \lambda^2 \sqrt{1 - \frac{2(1 - \kappa + \kappa^2)}{(2 - \kappa)^2 (\lambda \mu)^2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

降伏点で  $\sigma_f = \frac{2 - \kappa}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \kappa + \kappa^2}} \lambda \mu \sigma_0$

二次元的な平面応力の場合は  $\kappa = 0.5$ 、三次元的な軸対称応力の場合は  $\kappa = 0$  とおけばよい。

(C) 三軸圧縮(一定側圧) 側圧を一定に保つて行なう三軸圧縮の場合について考える。一般に  $\sigma_2 = \sigma_3$  ならば  $\omega = 0$  であるから、三軸圧縮の場合にもこの条件が適用される。側圧を  $\sigma_l$ 、上下圧を  $\sigma_v$  とし

$$\frac{\lambda \mu}{\sqrt{2}} = \alpha, \quad \frac{\sigma_v}{3(\sigma_0 + \sigma_l)} = \xi \dots\dots\dots (48)$$

とおくと、3主応力は

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_l + \sigma_v = (\sigma_0 + \sigma_l)(1 + 3\xi), \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0 + \sigma_l$$

となるから従つて  $\sigma_m = (\sigma_0 + \sigma_l)(1 + \xi)$ ,  $\tau_m = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_0 + \sigma_l)\xi$

これらの関係を用いて式 (17) を積分し、かつ

$$\left. \begin{aligned} I_n(1 + \xi) &= \phi \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left\{ \sin^{-1} \alpha - \sin^{-1} \left( \alpha - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \xi \right) \right\} &= \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} e &= 3 \epsilon_m = \frac{\sigma_0}{V_0} (1 + \lambda^2) \phi - \frac{\sigma_0}{V_0} \lambda^2 \alpha \psi \\ d &= 3 \delta_m = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda^2}{\sqrt{2} \alpha} \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

をうる。したがつて3主歪は式 (18) から

$$\epsilon_1 = \epsilon_v = \epsilon_m + \sqrt{2} \delta_m, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_l = \epsilon_m - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_m \dots\dots\dots (51)$$

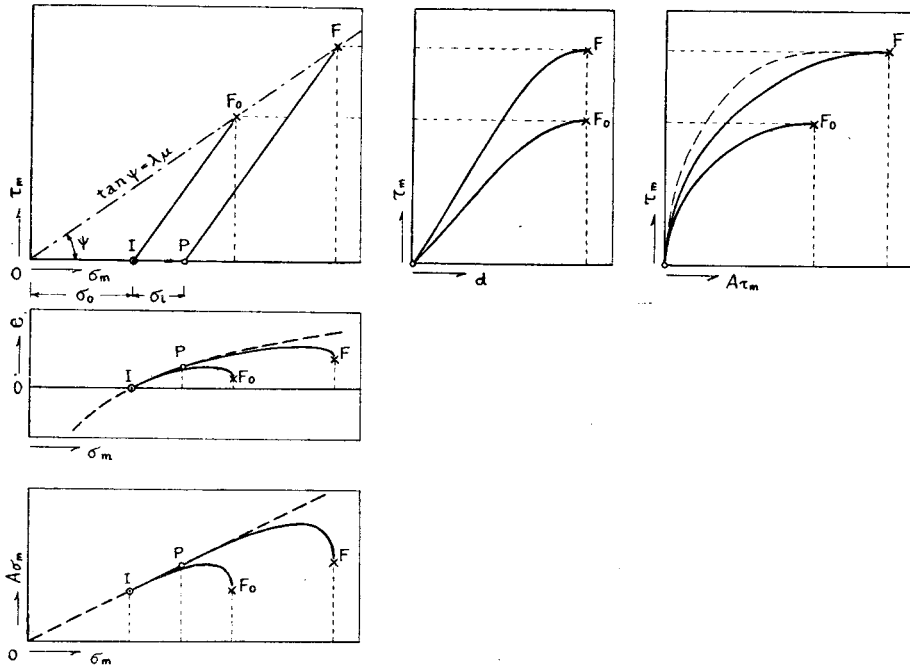
式 (20) からエネルギーを計算すると、初期条件として  $A\sigma_m = \frac{\sigma_0}{V_0}(\sigma_0 + \sigma_l)$ ,  $A\tau_m = 0$  であるから、

$$\left. \begin{aligned} A\sigma_m &= \frac{\sigma_0}{V_0}(\sigma_0 + \sigma_l) \left[ (1 + \lambda^2)(1 + \xi) - \frac{\lambda^2}{1 - \alpha^2} \left\{ \alpha \psi + 1 - \alpha^2 \sqrt{1 + 2\xi - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \xi} \right\} \right] \\ A\tau_m &= \frac{\sigma_0}{V_0}(\sigma_0 + \sigma_l) \frac{\lambda^2}{1 - \alpha^2} \left[ \alpha \psi + 1 - \sqrt{1 + 2\xi - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \xi} \right] \\ A &= A\sigma_m + A\tau_m = \frac{\sigma_0}{V_0}(\sigma_0 + \sigma_l) \left[ (1 + \lambda^2)(1 + \xi) - \lambda^2 \sqrt{1 + 2\xi - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \xi^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

以上の関係を図示すれば図-10のようになる。

図-10 三軸圧縮における体積、剪断歪およびエネルギーの変化を示す図

Fig. 10 A diagram showing the changes of volume, shearing strain and energy of a soil under triaxial compression



降伏の際は  $\tau_m = \lambda \mu \sigma_m = \sqrt{2} \alpha \sigma_m$  より

$$\xi_f = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \dots\dots\dots (53)$$

をうる。したがつて

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{1+2\alpha}{1-\alpha}(\sigma_0 + \sigma_l), \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0 + \sigma_l \\
 \sigma_v &= \frac{3\alpha}{1-\alpha}(\sigma_0 + \sigma_l) \\
 \sigma_m &= \frac{1}{1-\alpha}(\sigma_0 + \sigma_l), \quad \tau_m = \frac{\sqrt{2}\alpha}{1-\alpha}(\sigma_0 + \sigma_l) \\
 \Phi &= \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right), \quad \Psi = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\sin^{-1}\alpha + \frac{\pi}{2}\right] \\
 A_{\sigma_m} &= \frac{\sigma_0}{V_0}(\sigma_0 + \sigma_l) \left[ (1+\lambda^2)\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\lambda^2}{1-\alpha^2}(\alpha\Psi + 1) \right], \\
 A_{\tau_m} &= \frac{\sigma_0}{V_0}(\sigma_0 + \sigma_l) \frac{\lambda^2}{1-\alpha^2}[\alpha\Psi + 1] \\
 A &= \frac{\sigma_0}{V_0}(\sigma_0 + \sigma_l)(1+\lambda^2)\frac{1}{1-\alpha}
 \end{aligned} \tag{54}$$

(D) 一軸圧縮(単純圧縮) 三軸圧縮の特別な場合として,  $\sigma_l = 0$  とおけばよい。  $\xi = \frac{\sigma_v}{3\sigma_0}$  として (C) 三軸圧縮の公式がそのまま用いられる。この場合の降伏応力はいわゆる圧縮強さ  $\sigma_c$  を与える。すなわち

$$\sigma_c = \sigma_v = \frac{3\alpha}{1-\alpha}\sigma_0 \tag{55}$$

次に応力歪曲線の接線係数  $T$  および拡張された意味でのポアソン比  $\nu$  を求めると, それぞれ

$$T = \frac{d\sigma_v}{d\varepsilon_v} = \left(\frac{d\sigma_v}{d\xi}\right) / \left(\frac{d\varepsilon_v}{d\xi}\right) = \frac{9VU}{2V+U} = \frac{9(1+\xi)\sqrt{\alpha^2(1+\xi^2)-\xi^2}}{(1+\lambda^2)\sqrt{\alpha^2(1+\xi)^2-\xi^2} + \frac{\lambda^2(1-\alpha^2)}{\alpha}(1+\xi)} V_0 \tag{56}$$

$$\nu = -\frac{d\varepsilon_l}{d\varepsilon_v} = \left(\frac{d\varepsilon_l}{d\xi}\right) / \left(\frac{d\varepsilon_v}{d\xi}\right) = \frac{V-U}{2V-U} = \frac{\lambda^2(1+2\alpha^2)(1+\xi) - 2(1+\lambda^2)\alpha\sqrt{\alpha^2(1+\xi)^2-\xi^2}}{2\lambda^2(1-\alpha^2)(1+\xi) + 2(1+\lambda^2)\alpha\sqrt{\alpha^2(1+\xi)^2-\xi^2}} \tag{57}$$

応力加わり始める初期においては,  $\xi = 0$  であるから

$$\left. \begin{aligned}
 T_i &= E = \frac{9\mu^2}{2+\mu^2} V_0 = \frac{9}{2+\mu^2} U_0 \\
 \nu_i &= \nu_0 = \frac{1-\mu^2}{2+\mu^2}
 \end{aligned} \right\} \tag{58}$$

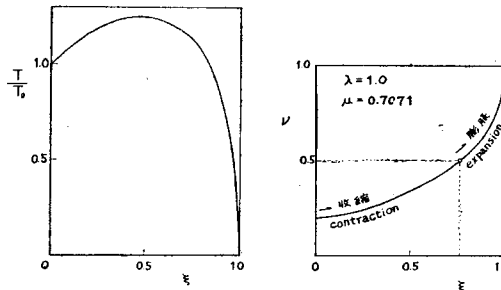
$\nu = 0.5$  ならば式 (57) から次の関係が得られる。

$$\xi = \frac{\alpha\sqrt{1+2\lambda^2}}{1+\lambda^2-\alpha\sqrt{1+2\lambda^2}} \tag{59}$$

降伏点においては式 (53) から  $\xi = \alpha/(1-\alpha)$  を用いると

$$\left. \begin{aligned}
 T_f &= 0 \\
 \nu_f &= \frac{1+2\alpha^2}{2(1-\alpha^2)} = \frac{1+(\lambda\mu)^2}{2-(\lambda\mu)^2} = \frac{1+\tan^2\psi}{2-\tan^2\psi} = \frac{1}{2-3\sin^2\psi}
 \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

図-11 1軸圧縮の上下圧 ( $\sigma_v$ ) による接線係数 ( $T$ ) とポアソン比 ( $\nu$ ) の変化を示す図  
 Fig. 11 Diagrams showing the changes of tangential coefficient ( $T$ ) and Poisson's ratio ( $\nu$ ) of a soil by vertical pressure ( $\sigma_v$ ) under unconfined compression



$T$  及び  $\nu$  が上下圧  $\sigma_v$  の増加ともなつて変化する模様は図-11に示すごとくである。拡張された意味でのポアソン比は上下圧とともに増大して 0.5 に達し, さらに大きくなつて降伏点に達する。すなわち体積変化は当初



収縮を示すが後に膨脹に転じて降伏に至ることを示す。弾性理論ではポアソン比が 0.5 を越えることはあり得ないとされているが、土のような塑性材料では上記のような変化をたどることが三軸試験結果からも実証される。

(E) 圧密 (側方への歪を妨げた) 歪条件が与えられたときの解の一例として側方変位が起らない圧密の場合を考える。 $\sigma_2 = \sigma_3$  であるから、

$$\omega = 0$$

上下圧を  $\sigma_v$  とすると  $\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_v$ ,

側方への歪を 0 とおいて  $d\epsilon_2 = d\epsilon_3 = 0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ ,

を用いると、式 (18) から

$$\epsilon_1 = \epsilon_v = e = \frac{1}{\sqrt{2}} d \dots \dots \dots (61)$$

をうる。また式 (3) と式 (16) から

$$\frac{d\tau_m}{d\sigma_m} = \sqrt{2} \frac{U}{V} = \frac{\sqrt{2}\mu}{\lambda} \left\{ (1 + \lambda^2) \sqrt{(\lambda\mu)^2 - \left(\frac{\tau_m}{\sigma_m}\right)^2} - \lambda^3 \mu \right\}$$

$$\text{ここで } \sqrt{2}\lambda\mu \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} = \beta, \quad \sqrt{2}\lambda\mu = \tau, \quad \frac{\tau_m}{\sigma_m} = \frac{\tau}{\sqrt{2}} r \dots \dots \dots (62)$$

$$\text{とおくと上式は } \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} = \frac{dr}{\beta\sqrt{1-r^2} - r} \dots \dots \dots (63)$$

となり  $z = \frac{1 - \sqrt{1-r^2}}{r}$  とおいて

$$\sqrt{1-r^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad r = \frac{2z}{1+z^2}, \quad dr = \frac{2(1-z^2)}{(1+z^2)^2} dz$$

をうるから、式 (63) は

$$\frac{d\sigma_m}{\sigma_m} = \frac{2}{1+\beta^2} \left[ \frac{\beta+z}{1+z^2} + \frac{1+\beta r + (\beta+r)z}{\beta-r-2z-(\beta+r)z^2} \right] dz$$

と書きかえることができ、これを積分して初期条件として  $r=0$  において  $\sigma_m = \sigma_0$  とすると次式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_m}{\sigma_0} = F(r) = & \exp \left[ \frac{\beta}{1+\beta^2} \sin^{-1} r \right] \cdot \left[ \frac{\beta-r}{\beta-r-r-\beta(1-\sqrt{1-r^2})} \right]^{\frac{1}{1+\beta^2}} \\ & \times \left[ \frac{(\beta-r)r + (\sqrt{1+\beta^2-r^2}-1)(1-\sqrt{1-r^2})}{(\beta-r)r - (\sqrt{1+\beta^2-r^2}+1)(1-\sqrt{1-r^2})} \right]^{\frac{\beta r}{(1+\beta^2)\sqrt{1+\beta^2-r^2}}} \dots \dots \dots (64) \end{aligned}$$

次に歪量を求めるには式 (3) の第 1 式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_v}{1-\epsilon_v} = \frac{de}{1-e} = \frac{d\sigma_m}{V} = \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ (1+\lambda^2) - \frac{\lambda}{\mu} \frac{(\lambda\mu)^2}{\sqrt{(\lambda\mu)^2 - \left(\frac{\tau_m}{\sigma_m}\right)^2}} \right\} \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} \\ = \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ \frac{\beta}{\beta-r} - \frac{\tau}{\beta-r} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \right\} \frac{dr}{\beta\sqrt{1-r^2} - r} \dots \dots \dots (65) \end{aligned}$$

上と同様に積分すると

$$\begin{aligned} 1 - \epsilon_v = 1 - e = G(r) \\ = [F(r)]^{-\frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\beta}{\beta-r}} \cdot \left[ \frac{(\beta-r)r - (\sqrt{1+\beta^2-r^2}+1)(1-\sqrt{1-r^2})}{(\beta-r)r + (\sqrt{1+\beta^2-r^2}-1)(1-\sqrt{1-r^2})} \right]^{-\frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\tau}{(\beta-r)\sqrt{1+\beta^2-r^2}}} \dots \dots \dots (66) \end{aligned}$$

あるいは近似的に

$$\begin{aligned} \epsilon_v = e \doteq \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\beta}{\beta-r} \ln[F(r)] \\ + \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\tau}{(\beta-r)\sqrt{1+\beta^2-r^2}} \ln \left[ \frac{(\beta-r)r - (\sqrt{1+\beta^2-r^2}+1)(1-\sqrt{1-r^2})}{(\beta-r)r + (\sqrt{1+\beta^2-r^2}-1)(1-\sqrt{1-r^2})} \right] \dots \dots \dots (66') \end{aligned}$$

これらの結果を用いると

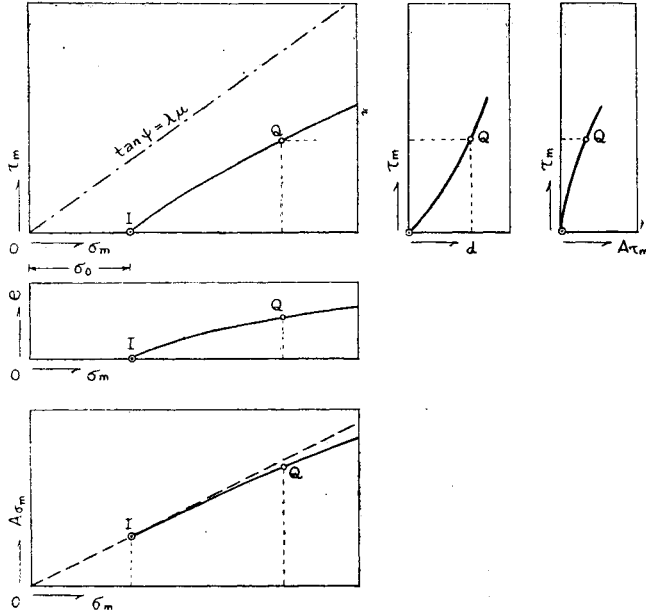
$$\begin{aligned} \sigma_1 = (1+r)F(r)\sigma_0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \left(1 - \frac{\tau}{2} r\right) F(r)\sigma_0 \\ \frac{\sigma_v}{\sigma_0} = (1+r)F(r) - 1, \quad \frac{\sigma_l}{\sigma_0} = \left(1 - \frac{\tau}{2} r\right) F(r) - 1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{V}{V_0} &= \frac{(\beta-r)\sqrt{1-r^2}}{\beta\sqrt{1-r^2}-r} F(r), & \frac{U}{V_0} &= \frac{r(\beta-r)}{2} \sqrt{1-r^2} F(r) \\ \frac{\sigma_m}{\sigma_0} &= F(r), & \frac{\tau_m}{\sigma_0} &= \frac{r}{\sqrt{2}} r F(r) \\ A &= \frac{\sigma_0^2}{V_0} \left\{ 1 + \frac{r}{\beta-r} (1 - \sqrt{1-r^2}) \right\} F(r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(67)$$

をうる。以上の関係を図示すると図-12のごとくなる。

図-12 圧密による体積、剪断歪およびエネルギーの変化を示す図

Fig. 12 A diagram showing the changes of volume, shearing strain and energies of a soil under consolidation



また

$$F'(r) = \frac{F(r)}{\beta\sqrt{1-r^2}-r-r}$$

$$G'(r) = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{1}{\beta-r} \left( \beta-r \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \right) \frac{G(r)}{\beta\sqrt{1-r^2}-r-r}$$

であるから、これらを用いるとただちに次式をうる。

$$\frac{d\sigma_v}{d\varepsilon_v} = V_0(\beta-r)\sqrt{1-r^2} \left( r + \frac{1}{\beta\sqrt{1-r^2}-r} \right) \frac{F(r)}{G(r)} \dots\dots\dots(68)$$

$$\frac{d\tau_m}{d\sigma_m} = \frac{r}{\sqrt{2}} \left\{ \beta\sqrt{1-r^2}-r \right\} \dots\dots\dots(69)$$

応力の加わり始める初期において  $r=0$  であるから

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_v}{d\varepsilon_v} \right)_i &= (1+\beta r-r^2) V_0 = (1+2\mu^2) V_0 \\ \left( \frac{d\tau_m}{d\sigma_m} \right)_i &= \frac{r}{\sqrt{2}} (\beta-r) = \sqrt{2}\mu^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(70)$$

$\sigma_v$  したがって  $\sigma_m$  がまし、無限に大きくなつたときの極限において  $\beta\sqrt{1-r^2}-r-r=0$  より

$$r_u = \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2-r^2}-r}{1+\beta^2} \dots\dots\dots(71)$$

をうるから

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_v}{d\varepsilon_v} \right)_u &= \infty \\ \left( \frac{d\tau_m}{d\sigma_m} \right)_u &= \frac{r}{\sqrt{2}} r_u = \frac{r}{\sqrt{2}} \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2-r^2}-r}{1+\beta^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(72)$$

上下圧に対する側圧の比を静土圧係数  $k$  とすると

$$\zeta = \frac{\sigma_t}{\sigma_v} = \frac{\left(1 - \frac{r}{2}\right)F(r) - 1}{(1 + rr)F(r) - 1} \quad \dots\dots\dots (73)$$

初期及び極限における値はそれぞれ次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i &= \left[ \frac{-\frac{r}{2}F(r) + \left(1 - \frac{r}{2}\right)F'(r)}{rF(r) + (1 + rr)F'(r)} \right]_{r=0} = \frac{1 - \frac{1}{2}r(\beta - r)}{1 + r(\beta - r)} = \frac{1 - \mu^2}{1 + 2\mu^2} \\ \zeta_u &= \frac{1 - \frac{r}{2}r_u}{1 + rr_u} = \frac{1 + \beta^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{\beta r}{2}\sqrt{1 + \beta^2 - r^2}}{1 + \beta^2 - r^2 - \beta r\sqrt{1 + \beta^2 - r^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (74)$$

静土圧係数は上下圧  $\sigma_v$  従つて  $r$  がますとともに増し、ある極限值に近づく。これらの関係は静止する壁に及ぼす土圧や土の自重による地盤内応力分布の問題を考えるとときに重要な手がかりを与えるであろう。また

$$r_s z = \sigma_v = \sigma_0 \{(1 + rr)F(r) - 1\} \quad \dots\dots\dots (75)$$

ここに  $r_s$  は土の見かけ密度、 $z$  は地表面よりの深さ、

とすると、地盤のそれぞれの深さにおける変形係数は式(67)の  $V, U$  で与えられる。

### 9. 塑性理論の三軸試験への適用

(A) 概説 新しく発展させた塑性理論を三軸試験の場合に適用して、理論の妥当性を実証しようと思う。この理論がすべての場合に的確にあてはまると考えることはできないが、完全塑性材料に近い土が実在することがわかり、厳密にあてはまらない場合もさらに間隙圧や粘性の影響のような副因的要素を加え、エネルギーの損失を考えに入れて理論を拡張することが可能であろう。しかし土の塑性変形と降伏の現象をこの理論から定性的に説明することができ、ある場合には定量的にかなり厳密に適用できることはこの基本理論の妥当性を十分立証するものと考えられる。

三軸試験はこれまですべて圧密排水型の試験に限つてきたが、今後非圧密非排水型の試験を行うよう準備中である。将来振りをあわせ加える試験を行いその結果がでるようになれば、角  $\omega$  が 0 でない場合についてもこの理論の適否を判定することができるものと思われる。

1948 年旧理論を発表した当時は理論の当否を判定するにたる適当な実験データを欠いていたが、理論から引きだされる結論の一つとして、三軸試験を実施することによつて土の力学常数を決定することが可能であると考えられたので、三軸試験機の試作に着手し昭和 26 年第 1 号機を完成、ただちに機械の調整、実験方法の研究に着手し、実験手段を改良して実用化を図り、つづいて第 2 号機を試作して本格的実験を行った。

まず直接剪断と三軸剪断の比較実験を試みたが、両者から得られる内部摩擦角と粘着力の値にいちじるしい差異のあることを確かめることができたが<sup>10)</sup>、これと理論の結論とは必ずしも一致しなかつた。その理由は直接剪断試験の結果が機械固有の性質、逐次降伏、側面摩擦の影響などによつて大きく支配され、応力条件が理論で取扱うものといちじるしく異なるためと考えられ、理論の当否を検討するのに適しないと判断された。

その後ボーリング孔から得た自然状態のサンプルや締め固め成型したサンプルについて数十回の三軸実験を行い、理論と対比して検討を加えた。

その結果、旧理論でうまく説明できる点は次のごとくであつた。

- a) 降伏の極限において上下圧応力は側圧に直比例して増し、理論の降伏条件とよく一致し、直線の勾配と内部圧応力  $\sigma_0$  を決定することができる。
  - b) 側圧をあげてゆくときの体積変化は純粹圧縮の場合の理論がよく適合する。
  - c) 剪断応力と剪断歪の関係は理論とよく適合し、きわめてよく近似した曲線を与える。
- すなわち次の諸関係はほぼ成り立つとみられることが明らかになつた。

$$\text{降伏条件} \quad \tau_m = \sqrt{2} \alpha \sigma_m \quad * \quad \left( \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right)$$

\* 文献(6)の式(16)において、 $\tau_m$  を  $\tau_m'$  と、 $\mu$  を  $\mu'$  と書き改め、 $\tau_m' = \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_m$ 、 $\mu' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \alpha$  とするとこの式をうる。ただし  $\mu' = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu$  である。

純粋圧縮による体積変化  $e = \frac{\sigma_0}{V_0} \phi$  \*\*

剪断歪  $d = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \psi$  \*\*\*

ここに  $\phi$  及び  $\psi$  は式 (38) 及び (49) で表わされる関数である。

しかるに旧理論で説明ができない事実もまたいくつか発見され、特に次の2点で本質的な欠陥が認められた。

a) 旧理論において上下圧を加えたときの上下方向の歪  $\epsilon_v$  及び体積変化  $e_s$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v &= \frac{\sigma_0}{3V_0} \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \psi \\ e_s &= \frac{\sigma_0}{V_0} \alpha \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (76)***$$

となり、いずれも  $\psi$  なる関数で表わされるが、 $e_s$  の変化は全く異なり、むしろ  $\phi$  なる関数に似ていることが多い。したがって両者の比

$$\frac{e_s}{\epsilon_v} = \frac{3\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

は剪断中一定とならないで、剪断とともに小さくなり、降伏に近づくとともにいちぢるしく減少するものが多い。このことは旧理論において二つの変形係数  $V, U$  を同じ関数形で表わし両者の比を一定 ( $\mu^2$ ) とおいたことが不適当であることを証している。

b) 上下方向歪  $\epsilon_v$  から体積変化による歪を差引くと剪断による歪がえられる。すなわち

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} (3\epsilon_v - e_s) = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\psi}{\sqrt{2}\alpha}$$

$d$  を実験結果から直接算出すれば、右辺の  $\psi/\alpha$  は降伏条件から求まる  $\alpha$  がきまれば計算しうるから、上式から  $\sigma_0/V_0$  の値をきめることができる。しかるに純粋圧縮から求めた  $\sigma_0/V_0$  の値と比較すると両者は完全に一致しない。

これらの実験事実を考慮に入れて圧縮のエネルギー  $A_N$  に対する剪断抵抗エネルギー  $A_R$  の比として  $\lambda^2$  を導き入れ、次のような修正公式をたてた<sup>12)</sup>。

$$e_s = \frac{\sigma_0}{V_0} \phi, \quad d = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}\alpha} \psi, \quad \epsilon_v = \frac{\sigma_0}{3V_0} \left[ \phi + \frac{\lambda^2}{\alpha} \psi \right] \dots\dots\dots (77)$$

そのため旧理論では  $\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{2}}$

であつたものが次のように改められた。

$$\alpha = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{2}}$$

この修正によつて実験結果をかなりの程度に表わしうるのであるが、理論的にはエネルギーの形が不明になつて一貫性をかき単なる実験公式となつてしまつた。

新しい理論は明確な一貫した理論的根拠の上になつており、実験事実ともよく適合し、上述の難点はすべて解決され、降伏点の近くでおこる体積膨脹を説明できるのであるから、これによつて完全塑性体を対象とした、土の弾性、塑性、降伏の現象を統一的に説明できる基本原理が確立され、土の力学に新しい分野を開く端緒を与えるものと云うことができよう。ついでに新しい理論における公式を示すと

$$\left. \begin{aligned} \text{降伏条件} \quad \tau_m &= \sqrt{2} \alpha \sigma_m & \left( \alpha = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{2}} \right) \\ \text{純粋圧縮による体積変化} \quad e &= \frac{\sigma_0}{V_0} \phi \end{aligned} \right\}$$

\*\* 文献(6)の式(40)において、 $V_0$ を $V_0'$ と書き改め、 $V_0' = 3V_0$ 、 $\bar{\sigma} = \sigma_1$ 、 $\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \xi$  とおいて  $e = 3\bar{\epsilon}$  を求めるとこの式になる。

\*\*\* 同上文献の式(34)において、 $V_0$ を $V_0'$ と、 $\mu$ を $\mu'$ と書き改め、かつ三軸試験の場合に拡張するため  $\frac{\bar{\sigma}}{3\sigma_0}$  を  $\frac{\sigma_v}{3(\sigma_0 + \sigma_1)}$  と置きかえ、 $\epsilon_v = \bar{\epsilon}_1$ 、 $e_s = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_3$  及び  $d = \frac{1}{\sqrt{2}} (3\epsilon_v - e_s)$  を求めるとそれぞれの式をうる。

剪断による体積変化と歪 
$$e_s = 3 \delta_m = \frac{\sigma_0}{V_0} (1 + \lambda^2) \psi - \frac{\sigma_0}{V_0} \lambda^2 \alpha \psi$$

$$d = 3 \delta_m = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda^2}{\sqrt{2} \alpha} \psi$$

$$\epsilon_v = \epsilon_m + \sqrt{2} \delta_m = \frac{\sigma_0}{3 V_0} \left[ (1 + \lambda^2) \psi + \lambda^2 \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \psi \right]$$

(78)

(B) 三軸試験の方法 ふつうに圧密排水型 (Consolidated-drained test) といわれる方法によつた。

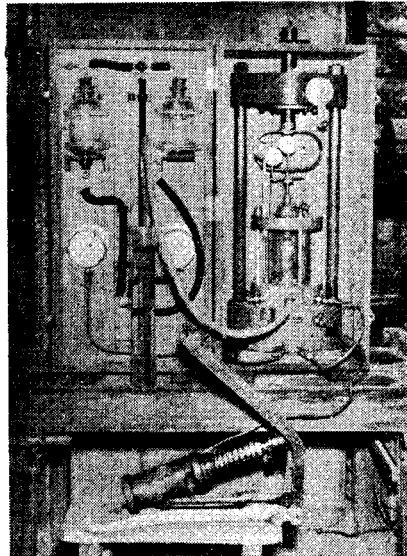
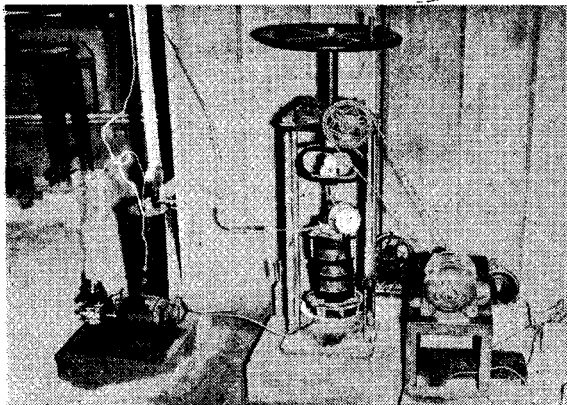
試料は突き砕いてばらばらにした土を最適含水量においてモールド内で突き固め成型したもの、及びボーリング孔または試掘孔から採取した自然状態のサンプルを真鍮製円筒から押出すか、特殊の装置で上下端及び側面を削り出して作成した円筒状のものを用いた。その寸法は 70 mm φ × 200 mm と 3.5 mm φ × 80 mm の2種である。

側圧の範囲は多くの場合 0~1.0 kg/cm<sup>2</sup> とし、特に 3 kg/cm<sup>2</sup> まで加えたものがある。その範囲で3ないし4段階に変化させ、上下圧を加えるときはすべて側圧を一定に保つた。

側圧だけを加えたときの体積変化と上下圧を加えてゆくときの上下方向歪及び体積変化を実測した。体積変化の測定は供試体を支えている下部透水板に連絡する開孔をゴム管で、容積が読みとれるよう正確に目盛をした細いガラス管と連絡させ、このガラス管をメスシリンダーに半ば満たした水中に挿しこみ、圧縮によつて供試体中の含有水分及び空気が押し出されて生ずる細管中の水位変化を読みとつて、これを体積変化の量とした。上部透水板と連絡する開孔は試験中閉じておいた。

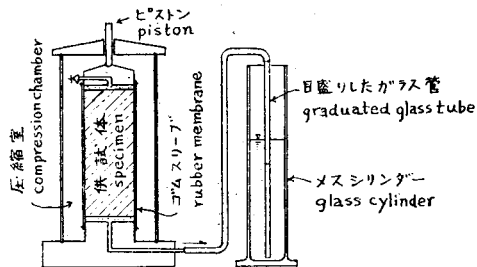
写真一 三軸試験機 (標準)

写真二 三軸試験機 (小型)



図一13 体積変化の測定装置

Fig. 13 The apparatus for measuring the volume change



体積変化を測定するこの方法は極めて簡単なものであるが、実用価値のきわめて高いものである。供試体が含有水分で飽和しているときでも、そうでなく一部空気を含むときでもこの方法を用いることができる。ただし長期の測定を行う場合は気温や気圧の変化が及ぼす影響を無視できないであろう。本実験では毎分供試体高さの1/100の圧縮を生ずる載荷速度を標準としたので1回の試験を終るまでに要する時間は10分以内であつた。また上部開孔を閉じておいたが、透水性の小さい供試体の場合は水と空気が上方にも押し出され、供試体の上端に圧力を生じることがあるから、上下の開孔をあわせてガラス管に連絡する方がよいと思う。載荷速度がかなり早いと透水性の小さい粘土質の土では間隙圧が起りうるので、実験結果が理論と合わない原因の一つとなつてい

思われる。これは載荷速度を小さくするよりほかに避ける方法がない。またそのときは粘性の影響が大きく現われる可能性もある。ガラス管内の水位が変化しメスシリンダー内の水位と差を生ずるから、それに相当する圧力が間隙圧として加わることになるが、その差はわずか数 cm にすぎないので無視した。

上下圧は検定した歪リングで測り、断面変化の補正を行ない、上下方向変位はダイヤルゲージで測定し、もとの高さで割つて歪を求めた。実測の結果から上下圧  $\sigma_v$ 、歪  $e_v$ 、及び体積変化  $e$  がきまる。

実験結果を整理して側圧だけが加わつたときの応力と体積変化の関係、上下圧を加えたときの降伏点及び剪断応力と剪断歪の関係を決定し図上にプロットしておく(図示の方法は後に述べる)。

(C) 基本理論の実験結果への適用 新しい理論を三軸試験の実験結果に適用して土の力学常数を決定する順序を述べる。a) 降伏条件より  $\sigma_0, \lambda\mu = \tan \psi$  の決定, b) 純粋圧縮より  $\sigma_0/V_0$  の決定, c) 上下圧を加えたときの剪断にとまらう応力と歪の関係から  $\lambda$  の決定, の3段階を経てすべての力学常数が決定される。

a) 降伏条件より  $\sigma_0, \lambda\mu = \tan \psi$  の決定 与えられた側圧  $\sigma_1$  に対し、降伏時の極限上下圧  $\sigma_{vf}$  を測定すれば、

$$\sigma_m - \sigma_0 = \sigma_1 + \frac{\sigma_{vf}}{3}, \quad \tau_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{vf}$$

を計算して図-14のごとくプロットする。3個以上の異なる側圧に対する点を結び、直線を決定し、横軸を切る点の位置と直線の勾配から

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \overline{OI} \\ \tan \psi &= \lambda\mu = \sqrt{2} \alpha = \text{直線の勾配} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (79)$$

をうる。直線の決定には最小2乗法を用いるのがよい。

図-14  $\sigma_m$  と  $\tau_m$  の関係から降伏条件の決定  
Fig. 14 Failure criterion determined by plotting  $\sigma_m$  vs.  $\tau_m$

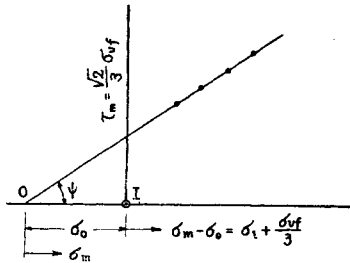
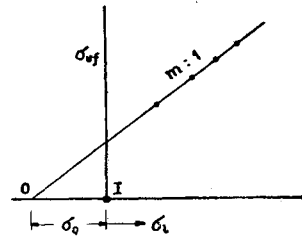


図-15  $\sigma_1$  と  $\sigma_{vf}$  の関係から降伏条件の決定  
Fig. 15 Failure criterion determined by plotting  $\sigma_{vf}$  vs.  $\sigma_1$



実際には次の方法を用いるのが便利である。側圧  $\sigma_1$  を横軸にとり、縦軸に極限上下圧  $\sigma_{vf}$  を図-15のようにプロットし、直線をうる。

$$\sigma_0 = \overline{OI}, \quad m = \text{直線の勾配} \dots\dots\dots (80)$$

とすると 
$$\tan \psi = \lambda\mu = \sqrt{2} \alpha = \frac{\sqrt{2} m}{3+m} \dots\dots\dots (81)$$

となる。何となれば降伏条件  $\tau_m = \sigma_m \tan \psi$  上の関係を入れ、かつ  $\sigma_m = \sigma_0 + \sigma_1 + \frac{\sigma_{vf}}{3}, \tau_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{vf}$  を用いると  $\sigma_{vf} = m(\sigma_0 + \sigma_1)$  なる関係が得られるからである。この場合直線が縦軸を切る点の高さは  $\sigma_1 = 0$  のときの極限上下圧すなわち一軸圧縮強さ  $\sigma_c$  の値を示す。

b) 純粋圧縮による体積変化から  $\sigma_0/V_0$  の決定 側圧  $\sigma_1$  だけを加えてゆくときの体積変化  $e$  を連続的に測定し、a) で求めた内部圧応力  $\sigma_0$  を用いて、

$$\xi = \frac{\sigma_1}{3 \sigma_0} \dots\dots\dots (82)$$

を求め、 $\phi$  を次式からきめる。

$$\phi = \ln(1 + \xi) \dots\dots\dots (83)$$

$\phi$  に対して  $e$  をプロットし、直線の勾配をきめると(図-16)、式(40)により  $e = \frac{\sigma_0}{V_0} \phi$  であるから

$$\frac{\sigma_0}{V_0} = \left( \frac{e}{\phi} \right) \dots\dots\dots (84)$$

の右辺を決定することができる。 $\sigma_0$  は既知であるから  $V_0$  をきめることもできる。

c) 剪断による応力と歪の関係から  $\lambda$  の決定 まず a) で求めた  $\sigma_0$  と側圧  $\sigma_l$  を用い、実測のときの上下圧  $\sigma_v$  に対し

$$\xi = \frac{\sigma_v}{3(\sigma_0 + \sigma_l)} \dots\dots\dots (85)$$

を計算し、やはり a) で求めた  $\alpha$  の値に対し  $\Psi$  を式 (49) の第 2 式で計算する。すなわち

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left\{ \sin^{-1} \alpha - \sin^{-1} \left( \alpha - \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \xi \right) \right\} \dots\dots\dots (86)$$

( $\Psi$  の値を求めるには末尾の附図-1 を用いると便利である)。

ただし  $\xi$  の極限值は

$$\xi_f = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{m}{3} \dots\dots\dots (87)$$

である。次に式 (51) の第 1 式において  $\epsilon_m = \frac{e}{3}$ ,  $\delta_m = \frac{d}{3}$  とすると  $\epsilon_v = \frac{e_s}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} d$  となりこれから次式をうる。

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} (3\epsilon_v - e_s) \dots\dots\dots (88)$$

右辺の上下方向歪  $\epsilon_v$  と体積変化度  $e_s$  は実測されているから  $d$  を求めることができる。ただし体積の測定を側圧のかけ始めから連続して行つたときはこの測定値を  $e$  とし、側圧を一定させ上下圧を加え始めるときの体積変化度を  $e_N$  とすれば

$$e_s = e - e_N \dots\dots\dots (89)$$

しかるに式 (50) の第 2 式によると

$$d = -\frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda^2}{\sqrt{2} \alpha} \Psi$$

であるから、 $\Psi$  に対して  $d$  をプロットし直線の勾配を求めると (図-17)

$$\frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda^2}{\sqrt{2} \alpha} = \left( \frac{d}{\Psi} \right)$$

の右辺が既知となるから a) 及び b) の結果を用いて次式から  $\lambda$  を決定できる。

$$\lambda^2 = \frac{V_0}{\sigma_0} \sqrt{2} \alpha \left( \frac{d}{\Psi} \right) = \tan \psi \frac{\left( \frac{d}{\Psi} \right)}{\left( \frac{e}{\phi} \right)} \dots\dots\dots (90)$$

$$\mu = \frac{\tan \psi}{\lambda} \dots\dots\dots (91)$$

式 (30) の第 1 式の関係を用いればポアソン比  $\nu$  を求めることもできる。

以上で新しい塑性理論にふくまれる四つの力学常数  $\sigma_0$ ,  $\tan \psi$ ,  $\sigma_0/V_0$ ,  $\lambda$  のすべてを、従つて  $V_0$ ,  $\mu$  をも決定することができる。

(D) 実験結果の検討 三軸実験結果に対して上記の方法を適用して理論と実験を対比し検討する。

a) 降伏条件 側圧  $\sigma_l$  に対し極限上下圧  $\sigma_{vf}$  をプロットしたもの、 $\sigma_m$  に対し  $\tau_m$  をプロットしたもの、いずれもきわめて良好な直線関係を示している。その一例を図-18 に示す。自然状態のサンプルではいくぶんばらつきが大きいことがあるのは、採取時の取り扱い不注意によるためと、地層の一様性が欠けているためと考えられ、ボーリングによるサンプルを用いるときは薄い地層に対して一つの供試体から全常数を決定できる方法が必要となろう。比較的脆性を示す土では、降伏後上下圧が急に小さくなるから極限值を求めることは容易であるが、粘性の大きい土では降伏点があつきりせず、ことに側圧が大きくなると降伏後もわづかながら上下圧が上昇してゆくものがある。その場合は歪が極端に大きくなるよう応力歪曲線が水平に近づくところで降伏点を求めるべきであろう。このような場合の体積変化をみるとわづかな収縮がとめどなく進んでゆく傾向を示すことが多い。

b) 側圧のみによる体積変化 理論と実験はほぼ完全に一致する。 $\phi$  に対し  $e$  をプロットした例を図-19 に示す。直線の原点が上下にずれているのは実験誤差によるもので、側圧のかけ始めと体積変化測定の始点を一致させることがむづかしいために起るものであるから、図の縦軸を切る点の高さだけ  $e$  の実験値を修正すればよい。この誤差は側圧をかける時に、ゴム膜と供試体の間に残っている隙間から押し出される空気量によつても

図-16  $\phi$  と  $e$  の関係から直線決定

Fig. 16 Determination of a straight line by plotting  $e$  vs.  $\phi$ .

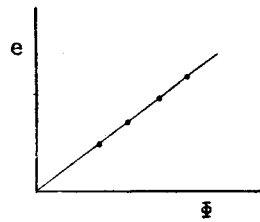


図-17  $\Psi$  と  $d$  の関係から直線の決定

Fig. 17 Determination of a straight line by plotting  $d$  vs.  $\Psi$ .

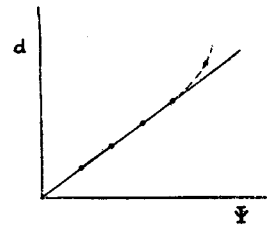


図-18  $\sigma_l$  と  $\sigma_{vf}$  の関係を求めた実例  
Fig. 18 Examples of plotting  $\sigma_{vf}$  vs.  $\sigma_l$

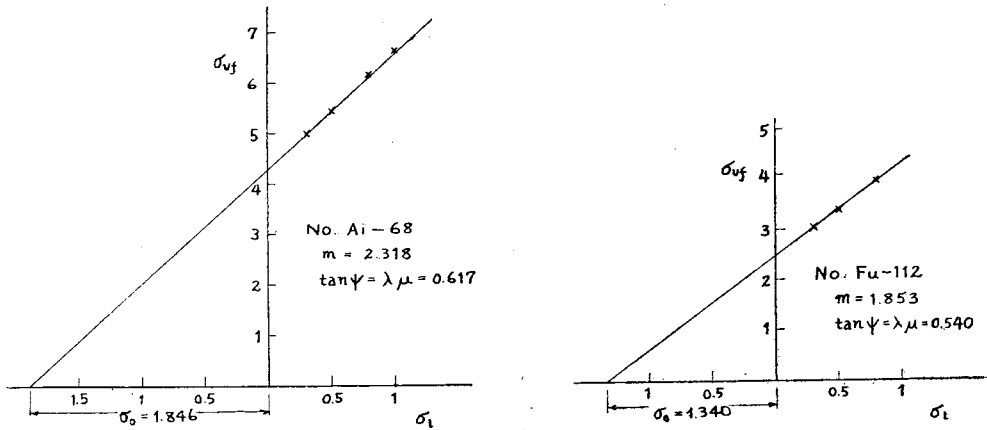


図-19  $\phi$  と  $e$  の関係を求めた実例  
Fig. 19 Examples of plotting  $e$  vs.  $\phi$

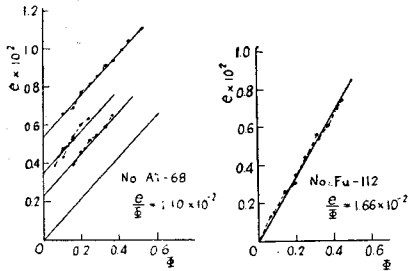
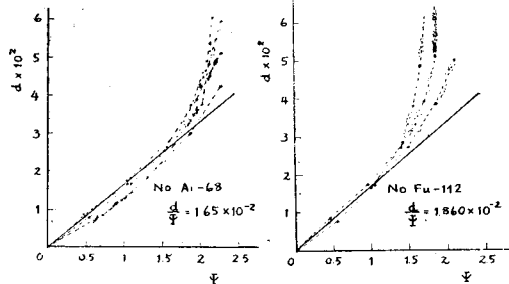


図-20  $\psi$  と  $d$  の関係を求めた実例  
Fig. 20 Examples of plotting  $d$  vs.  $\psi$



影響されるものと思われる。

側圧を  $3 \text{ kg/cm}^2$  まで高めて体積変化を測つた例では、まれに直線的な関係から上向きまたは下向きのずれを示すものがあつた。このような傾向は事前圧縮 (Pre-compression)、土粒子自身または土粒子間に存する構造の破壊、間隙圧、粘性などの影響として説明できるのではないかと考えられるが今後の研究課題である。

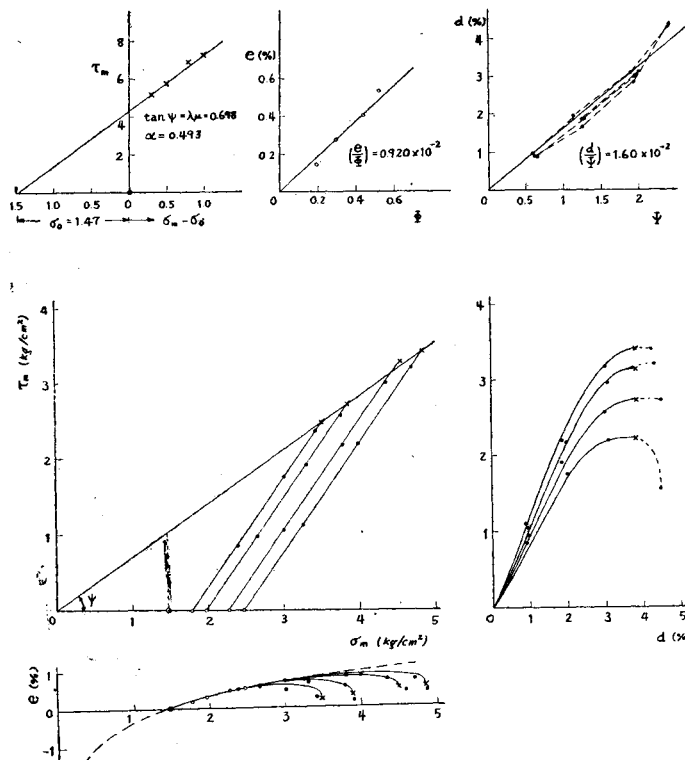
c) 剪断における応力と歪の関係 理論と実験はこの場合もかなりよく一致する。 $\psi$  に対する  $d$  のプロット例は図-20 に示す。b) の場合と同様実験誤差による原点のずれが認められることがあるが、これは図上から容易に修正値を求めることができる。側圧のいかんによらず  $d/\psi$  はほぼ一定している。降伏点に近づくとき  $d$  の値が大きくなり直線からずれて上向くものが多いが、これは降伏点付近で粘性流動が大きくなることや、局部的な滑り面が発生することなど、深い関係があるとみることができよう。また粘性土では間隙圧が起り、それが降伏点附近でかなりの大きさに達することも予想される。

d) 剪断をともなうときの体積変化 図-21 はある種の土について理論曲線と実験結果を一括して対比できるように示したものである。両者はほぼ完全に一致していることがよくわかる。ことに剪断をともなうときの体積変化度を示す曲線が実験値とよく一致していることは注目し得る結果といえよう。

しかしながら一般に剪断をともなうときの体積変化は理論曲線とこのような完全に近い一致を示すことはむしろまれで、剪断にともなつて圧縮がかえつて進み、降伏の際も膨脹せず旧理論に近い傾向を示すものや、剪断が始まるとただちに膨脹に移つてしまうものなどがある。前者は粘土質土でみられる傾向で、ことに側圧が小さいときは正常であるが、側圧が大きいつきに収縮がいちじるしく進むものがある。後者は砂や砂利のような粗粒材料でときおりみられる傾向であるから、剪断にともなつて土粒子相互が乗越え運動をするために膨脹が大きくなるものと考えられることができるかも知れない。そのほか上下圧をかけ始めるとき供試体は一樣な圧縮だけをうけ剪断力はないとしたこと、剪断にともなつて土粒子が相対運動を起し体積を変化させること、エネルギーの他の形への損失など、が影響するものと思われるが、これらの点については今後もつとくわしい研究が必要であつて、体積膨脹量そのものはきわめて小さい値であるが、飽和に近い土では間隙圧の値にきわめて大きく影響する因子



図-21 三軸試験による実験結果と理論計算の比較をした1例 (試料番号 Ai-4)  
 Fig. 21 An example of the comparison of triaxial test result and theoretical computation (Test No. Ai-4)



となるから変化の傾向をつきとめておくことはきわめて大切である。

実験結果から決定した常数の例を末尾の附表-1 に示しておいた。

(E) 結 び

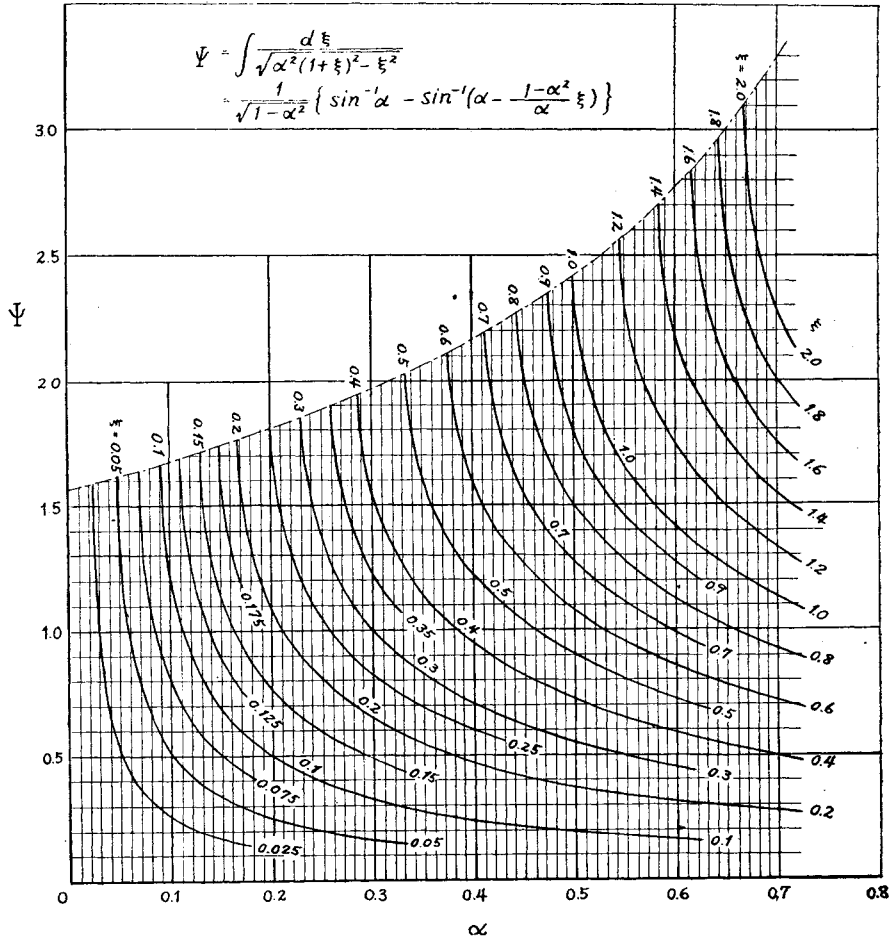
以上で新しい塑性理論を組み立て、それによる体積変化、剪断歪、エネルギー及び降伏点応力の理論公式を基本的な応力条件または歪条件の場合について誘導し、理論を三軸試験に適用してその適否を検討することができた。この新しい基本原理が理論的にも実験的にもよく一貫した妥当性を保持することが理解されることと信ずる。今後さらに新しい実験的裏付けが付け加えられ、この理論が一層よく補強されて発展し、土及び類似材料の塑性力学の普遍的な基本原理として採用され、応用面の開拓が進められ、土の力学が根本的に刷新確立されることを待望しつつ筆をおく。

この研究に当って多くのかたがたから永年にわたり多大の援助と後援を賜わった。ここにその名前を全部挙げる事ができないのは残念であるが、中でも絶えず有益な討論と助言を惜まれなかつた 畏友最上教授に厚く感謝したい。また三軸試験機の試作に当り運輸省石井、長谷川両技官、東京プラント田中社長、竹中工務店大内、大井両氏の好意によるところが多く、実験と計算に当って生研交通研究室の榎本、金子、鶴沢、長瀬、宇田川の諸君による不断的努力にまつところが極めて大きかつた。深く感謝したい。

なおこの研究は長期にわたっているので、日本学術振興会、文部省科学研究費、科学試験研究費、及び生研中間試験研究費などの財政的援助によつて行なわれてきたことを記して関係者の好意に対し厚くお礼申上げる。

附圖-1  $\Psi$  の計算図表

Appended Fig. 1 Diagram for the numerical value of  $\Psi$



附表-1 三軸試験から求めた力学常数の例 (締固め成形した供試体)

Table 1. Examples of the mechanical constants obtained by triaxial test

No.	分類 Classif.	真比重 Sp. Gr.	含水量 M.C.	乾燥密度 D.D.	$\sigma_0$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\alpha$	$\tan \psi$	$\frac{\sigma_0^0}{V_0} \times 10^2$	$\lambda^2 \frac{\sigma_0^0}{V_0^0} \times 10^2$	$\lambda$	$\mu$	$V_0$ (kg/cm <sup>2</sup> )
Ai-4	Sandy Loam	2.69	13.2	1.829	1.470	0.493	0.698	0.920	1.117	1.100	0.634	159.8
6	Sand	2.75	18.7	1.671	0.454	0.591	0.835	0.855	1.720	1.418	0.589	53.1
11	Sand	2.70	11.7	1.862	0.594	0.533	0.754	1.76	1.191	0.822	0.917	33.8
26	Sandy Loam	2.55	18.6	1.634	2.813	0.391	0.551	1.35	0.771	0.756	0.729	208.0
35	Sandy Loam	2.66	18.7	1.696	2.970	0.190	0.268	3.40	0.940	0.525	0.510	87.3
37	Sandy Loam	2.59	37.7	1.486	1.978	0.449	0.634	2.44	1.412	0.760	0.834	81.0
38	Sandy Loam	2.63	17.3	1.637	1.347	0.449	0.634	1.97	1.103	0.749	0.846	68.3
47	Sandy Loam	2.80	17.8	1.738	2.068	0.430	0.606	1.59	1.431	0.951	0.637	143.0
51	Sandy Loam	2.70	14.7	1.835	1.763	0.388	0.549	2.20	1.263	0.758	0.724	80.1
52	Gravel	2.67	14.1	1.707	0.195	0.514	0.728	0.650	1.187	1.351	0.539	30.0
60	Gravel	2.65	15.5	1.761	0.659	0.604	0.849	2.30	1.718	0.864	0.982	28.6
68	Sandy Loam	2.69	15.3	1.596	1.846	0.436	0.617	1.10	1.018	0.961	0.641	54.9
72	Sandy Loam	2.62	14.6	1.757	2.476	0.383	0.568	1.24	0.977	0.887	0.640	199.7
73	Silty Loam	2.68	24.8	1.529	3.373	0.239	0.338	2.95	0.724	0.495	0.682	110.8
74	Sand	2.59	12.5	1.817	0.551	0.458	0.638	1.21	0.895	0.860	0.753	45.5
Fu-27	Sand (Gr.)	2.53	19.6	1.515	0.650	0.488	0.690	1.43	1.270	0.942	0.732	45.4
37	Sandy Gravel	2.64	20.7	1.642	1.256	0.320	0.452	1.66	0.979	0.737	0.613	75.7
95	Loam (Gr.)	2.63	25.9	1.334	2.039	0.440	0.621	2.06	1.049	0.713	0.871	99.0
99	Sandy Gravel	2.40	16.7	1.643	0.913	0.340	0.480	2.96	1.186	0.632	0.759	30.8
104	Gravelly Sand	2.77	16.3	1.653	0.548	0.363	0.513	3.02	1.448	0.692	0.741	181.4
106	Sand	2.78	24.7	1.513	1.428	0.347	0.491	2.48	1.349	0.738	0.665	57.5
112	Sand	2.65	13.9	1.676	1.340	0.382	0.540	1.66	1.004	0.778	0.694	80.8
127	Gravel	2.73	30.1	1.446	1.013	0.386	0.545	1.51	1.225	0.901	0.605	67.1

## 参 考 文 献

- 1) Nádai, A. : Plasticity. 1931.
- 2) 山口昇, 最上武雄 : 材料力学, 岩波講座, 物理学 昭一14.
- 3) Hill, R. : The Mathematical Theory of Plasticity. 1950.
- 4) Westergaard, H.M. : Theory of Elasticity and Plasticity. 1952.
- 5) 星 埜和 : 基礎の支持力論 (コロナ社) 昭一23
- 6) 星 埜和 : 土のような塑性材料の変形と破壊についての基礎理論, 土木学会論文集第3号 (昭和22,23年度論文集) 昭一24, 89—100 頁
- 7) Hoshino, K. : A Fundamental Theory of Plastic Deformation and Breakage of Soils. Proc. Second Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng. Ie-10, Vol. I. pp. 93-100(1948)
- 8) Coenen, P.A. : Discussion on Paper Ie 10. Ibid., Ie-24, Vol. VII, pp. 62-67.
- 9) 星 埜和 : 土の塑性理論に対する Coenen 博士の討議に答う (要旨) 土木学会誌 Nov. 1950.
- 10) Hoshino, K. : The Author's Discussion on the Theory of Plastic Deformation and Breakage of soil (Answer to Dr. Coenen's Discussion). Report on Researches and Investigations. 1952. The Jap. Comm. of Soil Mech. and Found. Eng.
- 11) 星 埜和, 河内稔典 : 三軸試験機の試作と実験結果. 土木学会第9回年次学術講演会 (6—9) 東北大学 昭一28—5
- 12) 星 埜和 : 三軸試験結果に基づく土の変形法則について. 日本土質基礎工学委員会春季講演会, 日大講堂, 昭一28—5.
- 13) Timoshenko, S. : Theory of Elasticity. 1934. Chap. 6. pp. 162-187.
- 14) Roscoe, K.H. : An Apparatus for the Application of Simple Shear to Soil Samples. Proc. Third Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng. 1953, Session 2/24, Vol. I, pp. 186-191.
- 15) Habib, P. : Influence de la variation de la contrainte principale moyenne sur la resistance au cisaillement des sols (Influence of the Variation of the Average Principal Stress upon the Shearing Strength of Soils). Proc. Third Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng. 1953. Session 2/11 Vol. I. pp. 131-136.
- 16) 星 埜和 : 砂の三軸試験。 日本土質基礎工学委員会春季講演会, 昭27—5。

昭和 29 年 12 月 10 日 印刷 土木学会論文集

昭和 29 年 12 月 20 日 発行 第 2 1 号

定 価 130 円

著 者 東京都杉並区西高井戸1丁目96番地

星 埜 和

編集兼発行者 東京都千代田区大手町2丁目4番地

中 川 一 美

印刷者 東京都港区赤坂溜池5番地

大 沼 正 吉

印刷所 東京都港区赤坂溜池5番地

株式会社 技 報 堂

東京中央郵便局区内 千代田区大手町2丁目4番地

発行所 社 団 法 人 土 木 学 会

電話和田倉 (20) 3945-4078

振替東京 16828





