

# 管路内跳水に関する基礎的研究

## FUNDAMENTAL STUDY ON HYDRAULIC JUMP IN A CLOSED CONDUIT

中川 博次\*・柁津 家久\*\*  
By Hiroji Nakagawa and Iehisa Nezu

### 1. 序 論

管路内跳水とは、管路途中に設置された突起物やゲートなどの下流に発生する跳水現象であり、開水路跳水に上壁面の拘束が加わって跳水による乱流拡散が押えられた場合に相当する。

開水路跳水については、ダムやせきの下流での減勢工など実用上の問題に関連して、古くから数多くの理論的ならびに実験的研究が行なわれ、その平均流としての挙動についてはほぼ現在までに解明がなされている。

一方、管路内跳水については開水路跳水に比べて、従来この種の現象を含む水工設計上の問題が少なかったためか、あまり注目されず、わずかに Kindsvater<sup>1)</sup> によってその平均流特性に関する考察が行なわれた程度であり、その後は主として高压放流管の給気孔の設計に関連して、管路内に発生する跳水によって連行される空気量ないしはその混入機構に関するいくつかの研究<sup>2),3)</sup> が行なわれているにすぎない。しかしながら、洪水調節の要請からさかんに高压放流管が採用され、しかも幅広い流量調節が行なえるようなゲート操作が必要となってきている。また、最近ダムの基礎岩盤の劣悪さから経済的なダム形式としてフィルタイプダムが注目され、その放流設備として合理的なトンネル型洪水吐の要請が高まることと予測される。このような管路の途中に調節用ゲートを設けた場合、その操作条件によってはゲート下流での流れがゲートならびにその周辺の構造物の振動を誘起し、またキャビテーションを発生するなど致命的影響を及ぼすことが指摘されている。このような現象の発生を防止するための合理的な管路の設計法を展開し、また適切なゲートの操作条件を確立するためには、各種の操作条件に対する管路内流況特性とそれが管路の機能に及ぼ

す影響とを考察する必要がある。

以上の問題に関する基礎的研究として、本論文\* では開水路跳水に比して不明な点が多い管路内跳水に注目し、まず運動量一次元解析法を管路内跳水に適用して管内での平均流の挙動について論じ、さらに跳水場を壁面で拘束された噴流にシミュレートして跳水の内部機構を考察し、管路内跳水現象に関する新たな知見をえようとしたものである。

### 2. 管路内跳水の一次元解析

#### (1) 開度の変化と遷移流況

図-1 に示す管高  $D$  の管路内に置かれたゲートの開きを  $a$  としたときのエア・ポケット内の圧力  $p$  は、断面①と②との間の運動量保存式および連続式から次式で与えられる。

$$p/\rho g D = \lambda^2(\lambda-1)F_1^2 + (h_2/D) - 0.5(\mu^2+1) \\ \frac{2\lambda(\lambda-1)\{(H_e/D) - \mu\} - 0.5(\mu^2-1) + \{(h_2/D) - 1\}}{\lambda^2 + (\lambda-1)^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

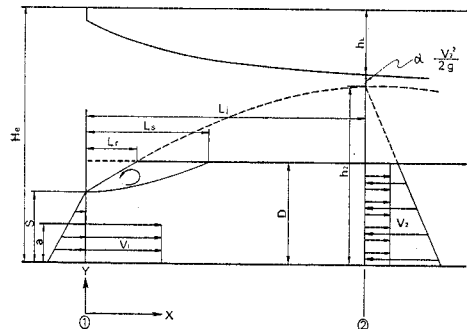


図-1 一次元解析説明図

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科  
\*\* 学生会員 京都大学大学院修士課程学生

\* 本論文は、第26回土木学会年次学術講演会(1971)および第16回土木学会水理講演会(1972)に一部発表したものを中心に、さらに検討を加えたものである。

ここに、 $\lambda$ ：ゲート開度 ( $=a/D$ )、 $\mu$ ：もぐり係数 ( $=S/D$ )、 $F_1$ ：ゲート出口での流れの平均フルード数 ( $=v_1/\sqrt{g a}$ )、 $H_e$ ：ゲート出口での有効水頭、 $h_2$ ：ゲートより下流での最大ピエゾ水頭である。

図-2 は  $H_e/D=10$  の場合について、 $h_2/D$  をパラメーターとして式 (1) の関係を示したものであるが、与えられた  $H_e$  および  $h_2$  に対して十分給気した場合には、ゲート開度  $\lambda$  を大きくするにしたがってゲート直下流の流況は、もぐり跳水→自由跳水→露出射流→自由跳水→もぐり跳水へと遷移することがわかる。

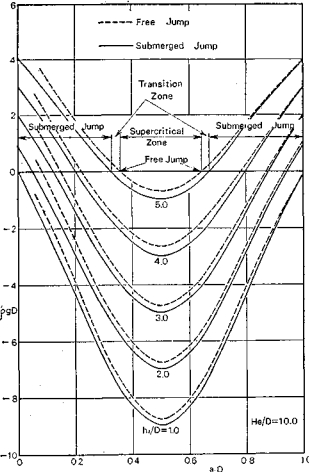


図-2 ゲート開度と遷移流況

以下では、管路内で発生する跳水現象に着目して、自由跳水 ( $p=0, \mu=\lambda$ ) の場合ともぐり跳水 ( $p=0, \mu=1$ ) の場合の水理特性について考察する。

(2) 跳水共役水深とエネルギー損失

自由跳水での共役水深の関係は式 (1) で  $p=0, \mu=\lambda$  とおけば、

$$\phi = h_2/a = (1 + \lambda^2)/2 \lambda + \lambda(1 - \lambda) F_1^2 \dots \dots \dots (2)$$

で与えられ、この関係曲線を 3. で述べる実験装置を用いて与えられた実験値とともに 図-3 に示す。初期フルード数が一定であれば、開度が 50% のとき  $\phi$  は最大であり、また同一の  $\phi$  を与える開度が二通り存在することがわかる。この事実は 図-2 の遷移形態からも明らかである。一般に管路内跳水の  $\phi$  の値は、 $F_1$  が大きくなると開水路のそれより大きくなり、一方  $F_1$  の小さい範囲

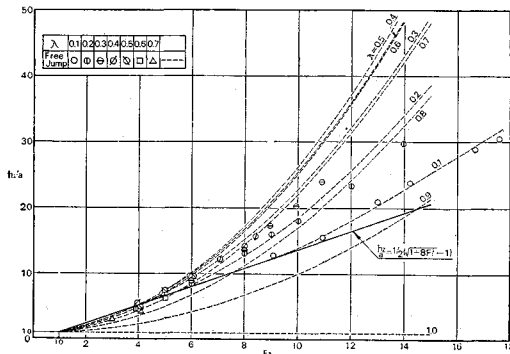


図-3 跳水共役水深

では小さくなるが、 $h_2$  が管高  $D$  より小さい範囲では明らかに開水路の跳水曲線  $h_2/a = (\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1)/2$  に一致する。 $F_1$  の小さい範囲での実験値と理論値との一致はかなり良好であるが、 $\lambda=0.2 \sim 0.5$  で  $F_1$  が比較的大きい範囲では、跳水過程での空気連行がはげしく、水流の純断面積が小さくなり、ピエゾ水頭が低下するから実験値は理論値より小さくなる。

ゲート出口を原点とする流下方向の底面圧力水頭の変化を示した一例が 図-4 であり、1 から縦距を差引いた値は速度水頭比とエネルギー損失水頭比との和を与える。この  $h$  の勾配は 3. で述べる管路内跳水の内部機構を考察する場合に重要な要素となる。なお、もぐり跳水の場合に、変化曲線が初期フルード数にあまり影響されないのは、式 (1) で  $p=0, \mu=1$  とおけば、

$$\frac{h_2 - D}{v_1^2/2g} = 2 \lambda(1 - \lambda) \dots \dots \dots (3)$$

となることから推論される。

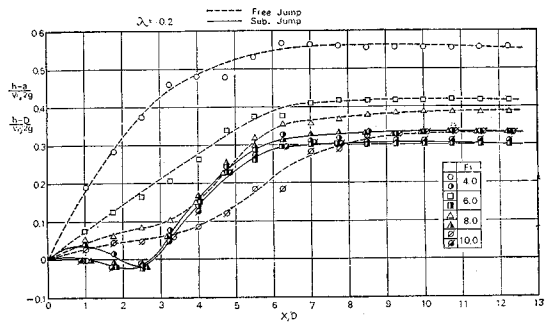


図-4 ピエゾ水頭の変化

次に、エネルギー損失水頭は次式で与えられ、その関係は 図-5 に示される。

$$h_L/a \begin{cases} = 0.5(1 - \lambda)^2(F_1^2 - 1/2\lambda) & \text{自由跳水} \\ = 0.5(1 - \lambda)^2 F_1^2 & \text{もぐり跳水} \end{cases} \quad \text{(Borda-Carnot の式)} \dots \dots \dots (4)$$

開度が小さく、 $F_1$  が大きいほど、また自由跳水に比べてもぐり跳水の方がエネルギー損失比は大きい。自由跳

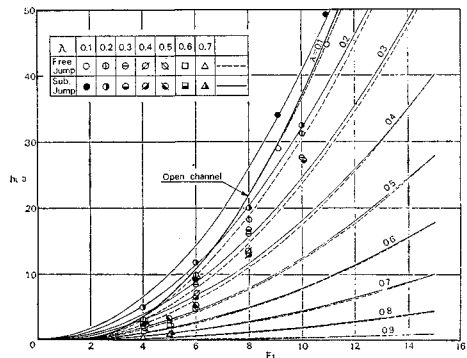


図-5 エネルギー損失

水のエネルギー損失比はそれに対応する開水路跳水の損失比よりも小さく、 $F_1 = \sqrt{(1+\lambda)/2\lambda^2}$  の点で両者は滑らかに接続する。実験値と理論値との間にはかなり良好な一致がみられるが、前者の方がやや大きい値を示すのは断面②のエネルギー補正係数を1とおいたことによる。

(3) 跳水長の定義とその特性

跳水の水路軸方向の特性長として重要な要素に跳水長があり、著者らはこれを次の3つの量で定義する。すなわち、

- 1)  $L_r$  (自由表面が管路上壁面にあたる位置の  $x$  座標)
- 2)  $L_s$  (よどみ点までの長さでローラー長を示す)
- 3)  $L_j$  (底面圧力水頭  $h$  の最大値、すなわち  $h_2$  の現われる位置の  $x$  座標で跳水の終端を表わす)

$L_r$  および  $L_s$  の決定は目視観察により行なわれたが、 $L_j$  は図-4に示すようにピーク付近での  $h$  の変化が非常に緩慢であるため明確に決定しがたく、ここでは  $h$  の最大値の95%の値を示す位置をもって  $L_j$  を代表させ、 $(L_j)_{0.95}$  として示した。自由跳水およびもぐり跳水についての  $L_r$  および  $L_s$  に関する測定結果を示したのが図-6~8であり、各跳水長に関する実験式をまとめたのが表-1である。

$L_r/D$  は図-6に示されるように、単に開度だけに依存する。また、 $L_r/(D-a) = 3.63(1-1.38\lambda)/(1-\lambda) \approx$

表-1 跳水長の実験式

Length of the Jump	$\lambda$	Free Jump	Submerged Jump
$L_r/D$		3.63-5.0 $\lambda$	
$L_s/D$	$\lambda \leq 0.3$	$(1.8-11.3(\lambda-0.3)^2)F_1^{1/4}\sqrt{\delta}$	5.61-2.1 $\lambda$
	$\lambda \geq 0.3$	$(1.8-2.0(\lambda-0.3))F_1^{1/4}\sqrt{\delta}$	7.38-8.0 $\lambda$
$(L_j)_{0.95}/D$	$\lambda \leq 0.3$	$(5.3-65(\lambda-0.3)^2)+0.32F_1$	$\approx 6.4$
	$0.3 \leq \lambda \leq 0.6$	$(5.3-25(\lambda-0.3)^2)+0.32F_1$	$\approx 2.0F_1^{1/4}\sqrt{\delta}$

3.63 の関係により開水路の跳水長に関する Smetand の式  $L/(h_2-a) \approx 6.0$  と対比できる。

次に、 $L_s/D$  は自由跳水ともぐり跳水の場合で著しくその性質を異にし、前者は  $\lambda$  と  $F_1$  に関係するが、後者は明らかに  $\lambda$  のみの関数である。これは自由跳水はもぐり跳水より当然上壁面の拘束の影響を受けにくく、それだけ平均水量である  $F_1$  に強く影響されるためであろう。また開度が約0.3を境として開度と  $L_s$  との関係が明らかに変化し、同じ跳水場でもその内部機構が開度によって異なることが示された。

$(L_j)_{0.95}$  に関しても  $L_s$  と同様な性質がうかがえるが、 $L_j$  付近でのピエゾ水頭曲線が平坦である上にその変動もかなりあるので、 $L_s$  よりかなりばらつきが大きい。したがって、跳水場での流下方向の特性長としては  $L_s$  で代表させた方が妥当であると思われる。

$L_j$  は開水路での跳水長と対比されるものであるが、その定義がまちまちであるので単純に比較はできないが、一般に管路の跳水長  $L_j/h_2$  の方が開水路の場合に比べて同程度かそれより小さく、 $F_1$  が大きくなると前者は単調に減少するのに対し、後者はほぼ一定であるからその差は大きくなる。

以上、跳水長に関する考察を通して自由跳水ともぐり跳水とでは根本的に内部機構に差異があることを示唆したが、これは各跳水の平均流場および乱れの様子を詳細に研究することによって解明されねばならない。

3. 管路内跳水の内部機構

(1) 管路内跳水場の領域区分

管路内跳水の内部機構をより明りょうかつ単純に取扱いうるように、ここでは上下壁面によって拘束された噴流のそれにモデル化することを試み、その拡散特性を考慮した領域区分を行なう(図-9参照)。すなわち、 $x$  方向には、

- 1) 最大速度のてい減がない、いわゆる zone of flow establishment の領域 ( $0 \leq x \leq x_0$ )。
- 2) 最大速度のてい減が起こるが、 $y$  方向の拡散が卓

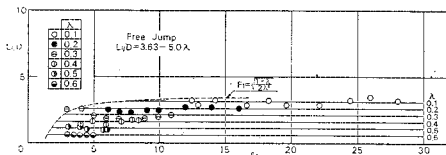


図-6  $L_r$  の関係図

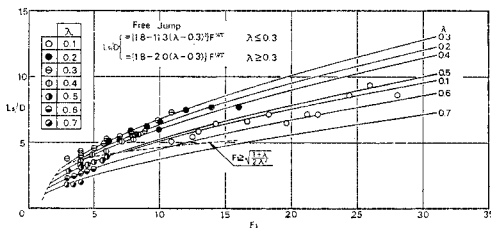


図-7 自由跳水の  $L_s$  の関係図

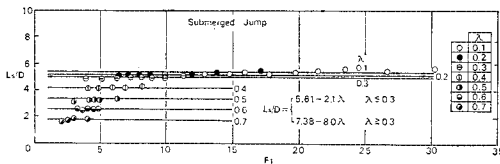


図-8 もぐり跳水の  $L_s$  の関係図

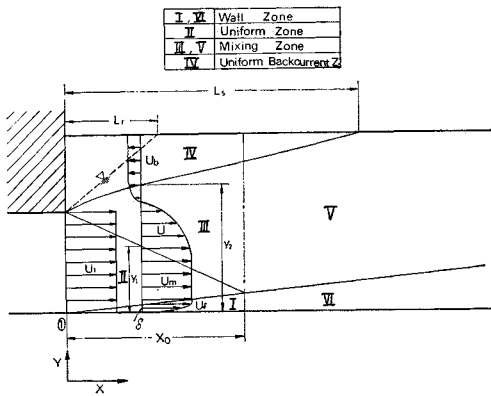


図-9 管路内跳水の領域区分

越し、壁面の影響をそれほど受けない領域。

3) 壁面の影響を強く受け、 $y$ 方向の拡散が抑制されつつ一様分布形へと遷移して行く領域(2, 3)はいわゆる zone of established flow である)。

また、 $y$ 方向には

- i) 底面に沿って発達する境界層領域
- ii) 一様ポテンシャル流領域
- iii) 混合領域
- iv) 逆流領域

とに区分することができ、1)~3)と i)~iv)の組み合わせは開度  $\lambda$  と初期フルード数  $F_1$  によってきまる  $x_0, L_r$  および  $L_s$  の大小関係で3つの型に分類される。これらの領域中で、管路内跳水の内部機構を最も強く支配していると考えられる混合領域(III, V)と境界層領域(I, VI)の性状を明らかにするために詳細な実験を行なった。

(2) 実験およびその方法

高さ 4 m, 直径 1.0 m の円形水槽から長さ 7.0 m,  $8 \times 18$  cm の長方形断面管路に水を導き、その途中にベルマウス型ゲートを取りつけ、ゲート刃先から下流 1.0 m を測定対象区間とした。管路内にあらわれた流況の一例を写真-1 に示す。一般に流速分布は次元解析によって、

$$u/u_m = f(\lambda, F_1, x/D, y/D) \dots\dots\dots(5)$$



写真-1 管路内跳水の流況例

で与えられるから、パラメーター  $\lambda$  および  $F_1$  それぞれが流速分布におよぼす影響をみるために、 $\lambda=0.2, 0.5$  で  $F_1=4.0$  および  $\lambda=0.2$  で  $F_1=8.0$  の場合について、それぞれ自由跳水ともぐり跳水に関する計6種類の実験を行なった。流速は直径 3 mm の標準型ピトー管で測定したが、総圧管および静圧管によって平均流速を求める場合の乱れの影響を検討した。すなわち、総圧管の平均値  $\bar{p}_t$  は  $\bar{p}_t = \bar{p} + \rho(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)/2 + \rho(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)/2$  で表わされる。静圧管も圧力タップ周辺の形状を考えて、その平均値  $\bar{p}_s$  を  $\bar{p}_s = \bar{p} + k \cdot (\rho/2)(\bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)$  ( $k$  は定数)で表わすと、流下方向の流速  $a$  は次式で与えられる。

$$a = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\bar{p}_t - \bar{p}_s) - \frac{1}{2} \{ \bar{u}'^2 + (1-k)(\bar{v}'^2 + \bar{w}'^2) \}} \dots\dots\dots(6)$$

さらに、自由跳水の場合は空気を混入し、その平均濃度を  $\bar{C}$ 、空気-水流量比を  $\beta (=Q_a/Q_w)$  とすれば、 $\rho_w/\rho = 1/(1-\bar{C})$ 、 $\bar{C} = \beta/(1+\beta)$  の関係が成立するから、 $\bar{a}H = (\bar{p}_t - \bar{p}_s)/\rho g$  としたとき、

$$\bar{a} = \sqrt{2g(1+\beta)\bar{a}H - 0.5\{ \bar{u}'^2 + (1-k)(\bar{v}'^2 + \bar{w}'^2) \}} \dots\dots\dots(7)$$

一般に、 $\bar{u}'^2/\bar{a}$ 、 $\bar{v}'^2/\bar{a}$ 、 $\bar{w}'^2/\bar{a}$  および  $\beta$  はいずれも  $10^{-2}$  オーダーであるから、 $\bar{a} = \sqrt{2g\bar{a}H}$  として流速を求めてもたかだか数%の誤差であるが、逆流境界面付近では相対乱れ強度が大きいうえに流向も水平と著しい傾きをもっているからその誤差は大きくなる。この乱れの影響を表わすものとして  $\bar{p}_s$  の鉛直分布を示した一例が図-10 である。式(9)から、 $\bar{p} = \rho g(h-y) - \rho \bar{v}^2$  であるから、

$$\bar{p}_s = \rho g(h-y) - \rho/2 \cdot \{ (2-k)\bar{v}^2 - k\bar{w}^2 \} \dots\dots(8)$$

いま  $\bar{v}^2 \approx \bar{w}^2$  とみなせるときは

$$\bar{p}_s + \rho g y = \rho g h - \rho(1-k)\bar{v}^2 \dots\dots\dots(8)'$$

Fage<sup>4)</sup> による長方形断面ダクトでの値  $k=0.44$  を用いると  $\bar{v}^2/u_s^2$  は  $10^{-2}$  オーダーとなり、その乱れの分だけ静圧は静水圧分布からずれることになる。換言すれば、図-10 からこの跳水場での乱れの定性的な分布特性が推測される。

以上の実験から得られた自由跳水ともぐり跳水の流速

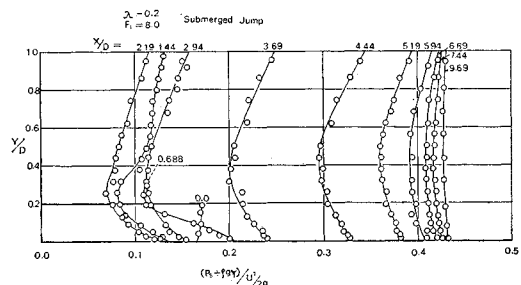


図-10 静圧分布

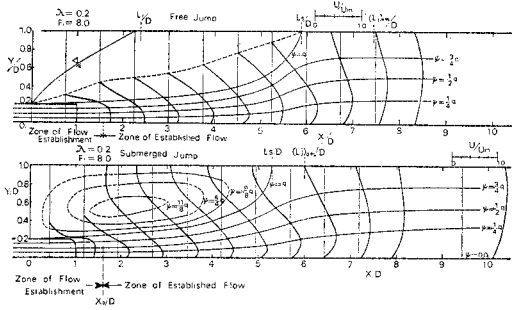


図-11 流速分布の一例

分布の一例を 図-11 に示したが、図には計算によって求められた流線も併示している。これらの図からただちに管路内跳水場での拡散特性が把握されるが、以下各領域の水力特性を詳しく論じることとする。

(3) 境界層領域について

a) 理論的考察

この領域での運動方程式は次式で与えられる<sup>5)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{u}'^2) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{u}'\bar{v}') \\ 0 &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{v}'^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$y=\delta$  で  $\bar{u}=u_m$  であり、 $\bar{u}'^2 \approx \bar{v}'^2$  として  $\bar{u}/u_m = (y/\delta)^{1/n}$  とおき、

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{p}}{\rho g} \right) \left\{ \begin{aligned} &= \frac{\epsilon'}{D} \frac{u_1^2}{2g} \quad (x \leq x_0) \dots (10) \\ &= -\epsilon \frac{u_m}{g} \frac{\partial u_m}{\partial x} \quad (x > x_0) \dots (11) \end{aligned} \right.$$

なる圧力指示係数  $\epsilon, \epsilon'$  を定義する。ここで、 $\epsilon$  および  $\epsilon'$  はエネルギー損失係数に対応するものである。この係数が  $x$  の変化に対してほぼ定数であるとすれば、式 (9) は初期断面  $x=0$  で  $\delta=0$  の条件で積分できて次式のようなになる。

①  $x \leq x_0$  なる (I) の領域

$$\begin{aligned} (\delta/D)^{(n+3)/(n+1)} &= \frac{2\alpha}{\epsilon'} \left( \frac{u_1 D}{\nu} \right)^{-2/(n+1)} \\ &\cdot \left[ \exp \left\{ \frac{(n+1)(n+3)}{2n} \epsilon' \left( \frac{x}{D} \right) \right\} - 1 \right] \dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha = C_f/2 \cdot (u_m \delta/\nu)^{2/(n+1)}$  ( $C_f$  は壁面摩擦係数)。いま Blasius の 1/7 則を適用して  $n=7$  とおき、 $\epsilon'$  が十分小さければ、式 (12) は次のようになる。

$$\delta/D = 0.37 \left( \frac{u_1 D}{\nu} \right)^{-1/5} \left\{ x/D + \frac{45}{7} \epsilon' (x/D)^2 \right\}^{4/5} \dots\dots\dots (13)$$

②  $x \geq x_0$  なる (VI) の領域

$$\delta \left( \frac{u_m \delta}{\nu} \right)^{2/(n+1)} = \left( C + B \int_{x_0}^x u_m^A dx \right) u_m^{-A} \dots (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2+\epsilon)n^2 + (4+5\epsilon)n + 6\epsilon}{n(n+1)}, \\ B &= \frac{(n+2)(n+3)}{n} \alpha \end{aligned}$$

C : 積分定数

いま、

$$u_m/u_1 = (x/x_0)^{-m} \quad (m \text{ は速度でい減率}) \dots (15)$$

で与えられる最大速度でい減特性を仮定し、やはり  $n=7$  とおいて  $x=x_0$  で式 (12) および (14) での  $\delta$  が一致するように C を選べば次式がえられる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{D} &= \left( \frac{u_1 D}{\nu} \right)^{-1/5} \left[ \frac{B}{mA-1} \left( \frac{x_0}{D} \right) \left\{ mA \left( \frac{x}{x_0} \right)^{m(A+1/4)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{x}{x_0} \right)^{1+m/4} \right\} + \frac{45}{7} \epsilon' B \left( \frac{x_0}{D} \right)^2 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{m(A+1/4)} \right]^{4/5} \\ &\dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

したがって、 $m, x_0, \epsilon, \epsilon'$  などが実験的に決められれば、式 (13) および (16) から境界層厚および境界層領域は決定される。

b) 最大速度でい減特性

図-12 は各ケースの最大速度でい減特性を表わしたものであり、自由噴流に関する Albertson らの結果<sup>6)</sup> および wall jet に関する Schwarz らの結果<sup>7)</sup> を併示している。この図から、てい減特性はほぼ開度  $\lambda$  だけに依存し、 $F_1$  には関係しないようである。すなわち、 $\lambda=0.2$  のときは、最初  $m=0.5$  の緩い減を示し、その後  $m > 1$  の急い減をなし、再び緩い減を示すのに対して、 $\lambda=0.5$  のときはかなりの距離にわたって一定のてい減率を示すことが認められた。この両者のてい減特性の差異は 2. の跳水長と開度との関係から示唆された跳水場の内部機構の差異と類似している。すなわち、 $\lambda$  が 0.3 以下では、この跳水場は自由噴流や wall jet としての性状に類似し、 $\lambda$  が 0.3 以上では、むしろ一様流速場の中に突起物が存在している場合の挙動に類似している。実際  $\lambda=0.2$  では  $L_s$  付近までは自由噴流のてい減特性である  $m=0.5$  の値を示すが、流れの境界面が有限であるため噴流周辺の流体が流れに連

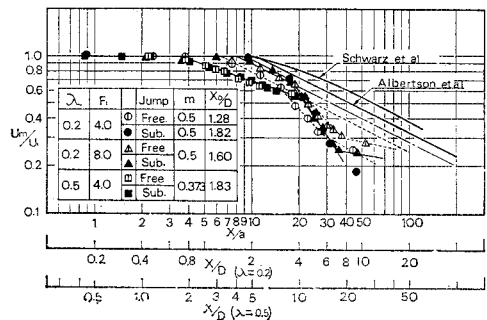


図-12 最大速度でい減特性

行される現象はいわば自己連行であり、それを補うものとしての逆流が存在するようになる。したがって、 $L_s$  付近から下流では本来流体連行で増加すべき流量が逆流として持ち去られるから、連続の条件を考慮すると、最大速度が急激に減ることがうなずける。

さて、自由噴流理論の適用限界を見るために、実験値が  $m=0.5$  のてい減曲線からずれる限界点  $x_c$  を図-12 から求めると、自由跳水の場合の値がやや大きいようであるが、ほぼ両者とも  $F_1=4.0$  および  $8.0$  に対して  $x_c/h_2$  の値がそれぞれ  $2.5$  および  $1.3$  であることが認められた。土屋の自由表面をもつ wall jet に関する実験では<sup>9)</sup>、 $x_c/h_2$  はレイノルズ数やフルード数には無関係で約  $3.5$  をとると報告されている。著者らの値は、土屋の実験値に比べて小さい上に、レイノルズ数あるいはフルード数が大きくなると減少するという結果になったが、これは明らかに上壁面が存在するために  $y$  方向の拡散が抑制されるからであり、またレイノルズ数あるいはフルード数の大きい噴流ほど強度の拡散が必要となるからである。

次に、自由跳水ともぐり跳水とのてい減特性を比較すると、 $\lambda=0.2$  ではローラー終端付近から下流でのてい減率は後者の方がかなり大きくなる。これは自由跳水に比べ、もぐり跳水の方が境界面の拘束が強く、逆流もそれだけ大きいことに起因している。一方、 $\lambda=0.5$  では両者の差異が顕著でないのは、先述のように開度によって跳水特性が異なることによるものと思われる。

最後に、ポテンシャルコアの長さ  $x_0/D$  の値は図-9 の領域区分を行なう際に重要な要素となる。 $\lambda=0.2$ 、 $F_1=4.0$  の自由跳水の場合を除いて\*、実験の範囲内では  $x_0/D$  の値は  $1.6\sim 1.8$  であり、ゲート開度やフルード数にはあまりよらない。一方、Baines<sup>9)</sup> が整理した円形自由噴流の  $x_0/2a$  の実験結果はレイノルズ数とともに増加する傾向にあるが、筆者らの実験範囲内の値ではこの傾向は顕著ではなく、また前者に比べて  $\lambda=0.2$  および  $0.5$  に対してそれぞれ約  $0.7$  倍および  $0.3$  倍と小さくなったが、これらは底面に沿って発達する境界層の存在や混合特性の相違によるものと思われる。

#### c) 圧力指示係数

図-13 は式 (10) および (11) で定義した圧力指示係数の流下方向の変化を実験値から求めたものである。この図から、 $\epsilon'$  は  $0.1$  より小さいほぼ一定の値をとるものとみなせるが、 $\epsilon$  は  $x/L_s=0.7$  の付近で急増し、 $0.8\sim 0.9$  でピークに達し、それより下流ではしだいに減衰して行く\*。 $\lambda=0.2$  の場合の方が  $\lambda=0.5$  の場合より

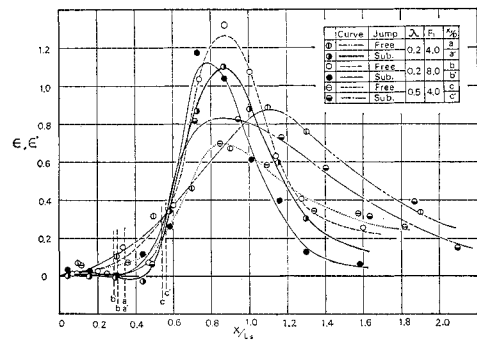


図-13 圧力指示係数

ピークの値が大きくなる傾向があるが、おおまかに  $1$  以下とみなしてよいであろう。したがって、以下の議論では  $\epsilon' \neq 0$  とし、 $\epsilon$  については  $0\sim 1.0$  まで変化するものとして、これらの影響を考察することにする。

#### d) 境界層の厚さ

管路内跳水場のような有限領域での境界層厚として、先の理論的考察で示したように  $u$  の最大値を示す  $y$  座標の値  $\delta_m$  を定義する。しかし、流速分布が  $u_m$  の付近で非常に平坦である場合には  $\delta_m$  を正確に定めがたく (特に  $x < x_0$  の場合はこの定義では境界層領域とポテンシャル領域とを区別できなくなる)、 $u/u_m=0.95$  なる  $y$  座標  $y_{0.95}$  から、流速分布形が Blasius の  $1/7$  則にしたがうとして  $\delta$  を求め、この厚さを  $\delta_{0.95}$  と表わす。図-14 (a) には  $\lambda=0.2$ 、図-14 (b) には  $\lambda=0.5$  の場合の上の 2 つの定義による境界層厚の実験値と、式 (13) および (16) で  $\epsilon'=0$  とし、また  $\epsilon$  の変化をステップ関数で置きかえ、速度てい減特性から求めた  $m$  および  $x_0$  を用いて求められた理論曲線を示している。

$\delta_m$  と  $\delta_{0.95}$  との差異は zone of flow establishment では大きいですが、zone of established flow に移るとしだいに小さくなる。いずれの場合も自由跳水の方がもぐり跳水より境界層の発達のはやく、したがって、その厚さも大きくなる傾向がみられた。Rajaratnam<sup>10), 11)</sup> によると、開水路でも同様の結果を得ているが、速度てい減に伴う底面からの流れのはく離など複雑な現象がからんでおり、その原因は明確ではない。

いま、理論値と実験値とを比較すれば、 $\lambda=0.2$  では  $x_0/D$  の値として実験値の約  $2$  倍をとればほぼ一致する結果が得られた。これは流れに慣性があるために、ポテンシャルコアの終端から急激に境界層が発達することがなく、ある遷移区間をはさんで発達特性を異にして行くためである。このことは図-11 や Rouse らの空気流跳水実験<sup>12)</sup> の平均流流線の挙動からも理解される。 $\lambda=0.5$  の場合には理論値と実験値の適合度から考えて、 $x_0$  の下流で境界層の発達特性が変化するとみなさ

\*  $\lambda=0.2$  のときの自由跳水発生条件は  $F_1 \geq 3.87$  であるから、 $F_1=4.0$  の自由跳水は波状跳水に似た不安定な流況を示した。

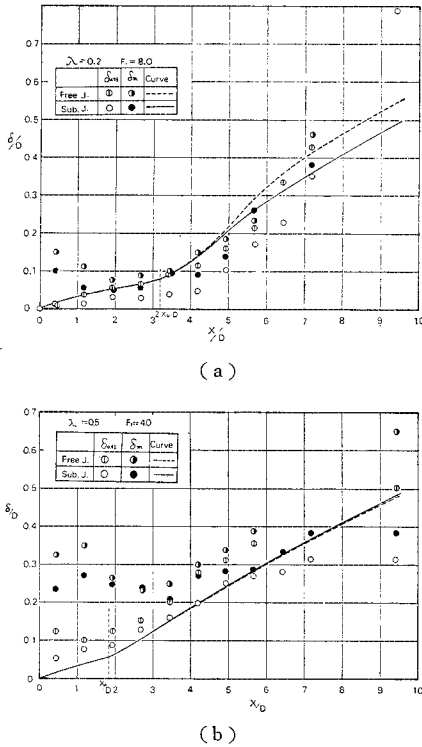


図-14 境界層厚の変化

れるが、開度の大きい場合には初期境界層厚が考えられるから、これを考慮すればその適合性はさらに良くなる。図-14 から速度でい減場に入ると、 $\epsilon$  が急激に増大するから、流れの慣性のためにその応答は遅れるものの、境界層は急速に発達することがわかる。そして  $x$  が大きくなり  $\epsilon$  が減少し出すと境界層の発達も鈍くなるが、十分発達した領域の  $\delta/D=0.5$  へ遷移せねばならないから、式 (16) の適用限界はほぼ跳水終端付近までであることがわかる。

境界層内の流速分布は Blasius の 1/7 則にしたがうとしてきたが、境界層内の流速測定の結果から、(I) 領域および (V) 領域ともこの仮定を十分満足することが確認された。

(4) 混合領域について

a) 理論的考察

混合領域の流れについて適当な境界条件のもとで運動方程式 (9) を解くことは一般にきわめて困難であるから、次のような二、三の仮定を導入して式 (9) を単純化する。

3. (1) で述べた領域 1) および 2) では流れを支配するスケールは存在しないと考えられるから、流れの self-preservation が期待される。またレイノルズ応力と平均流速との関係については、自由噴流への適用で比較的成

功をおさめた Prandtl の「自由乱れの新理論」(1942)<sup>13)</sup> を採用することにす。すなわち、

$$\tau = -\rho \overline{u'v'} = \rho \kappa (u_m - u_b) b (\partial u / \partial y) \dots (17)$$

ここで、 $\kappa$  は実験定数、 $u_b$  は逆流領域での一様流速、 $b$  は混合幅であり、 $b/x = \sigma (x/x_0)^{n-1}$  とおけるものとする。

self-preserving flow の仮定から式 (5) は  $u/u_m = F'(y/b)$  となり、 $|u_b/u_m| \ll 1$  とすれば、式 (9) は式 (15) を使って次式に変形される。

$$mF'^2 + FF''(n-m) + \kappa \cdot \sigma^{1-n} / \sigma F''' = (x_0/\rho u_1^2) (x/x_0)^{2m+1} \partial p / \partial x \dots (18)$$

境界条件:

$$F'(0) = 1, F''(0) = 0, F'(1) = 0 \dots (19)$$

self-preservation の仮定により、 $n=1$  でなければならず、また  $u/u_m = f'(\eta)$ ,  $\eta = \sqrt{(1-m)} \beta (y/b)$ ,  $\beta = \kappa/\sigma$  と変数変換すれば、

$$v/u_m = \sqrt{\beta/(1-m)} \sigma \{ f'(\eta) \cdot \eta - (1-m) f(\eta) \} \dots (20)$$

であり、式 (10) および (11) を使えば式 (19) は次式のようになる。

i)  $x \leq x_0$  なる領域 (III)

$$f(\eta) f''(\eta) + f'''(\eta) = (\epsilon/2) \cdot (x/D) \dots (21)$$

境界条件:

$$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'(\frac{1}{\sqrt{\beta}}) = 0 \dots (22)$$

式 (21) は厳密には流れの self-preservation は成立していないことを示しているが、図-13 から  $\epsilon \neq 0$  とみなすことができるならば、Görtler と同じ近似手法を用いて式 (21) の解は次のようになる。

$$u/u_m = f'(\eta) = \int_{\eta}^{1/\sqrt{\beta}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta \bigg/ \int_0^{1/\sqrt{\beta}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta \dots (23)$$

ii)  $x \geq x_0$  なる領域 (V)

$$f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) + \alpha \{ (f'(\eta))^2 - \epsilon \} = 0 \dots (24)$$

境界条件:

$$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'(\sqrt{(1-m)}/\beta) = 0 \dots (25)$$

ここで、 $\alpha = m/(1-m)$  なるパラメータである。最大速度のてい減特性から  $\alpha$  は与えられるが、図-13 から  $\epsilon$  は  $x$  の関数となるので、式 (24) も厳密には self-preserving flow の特性を表わしていないが、境界層領域で取扱ったように  $\Delta x$  区間で  $\epsilon$  が一定として取扱いうるときには式 (24) は解けることになる。

式 (24) は Falker & Skan<sup>14)</sup> が求めた層流境界層の一般化方程式とただその境界条件が異なるだけで両者の基本式は同型であり、いずれも数値解法で求められる。この対比を表-2 に示す。

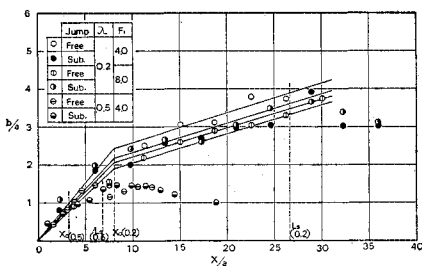
表一 管路内跳水場の混合領域と一般化層流境界層との基礎方程式の比較

	Mixing Zone of the Hydraulic Jump in the Closed Conduit	Generalized Laminar Boundary Layer
Fundamental Equation	$f''' + ff'' + \alpha(f'^2 - \epsilon) = 0$	$f''' + ff'' + \alpha(f'^2 - 1) = 0$
Boundary Conditions	$f'(0) = 1, f''(0) = 0$ $f'(\sqrt{(1-m)/\beta}) = 0$	$f(0) = 0, f'(0) = 0$ $f'(\infty) = 1$
Maximum Velocity Decay	$u_m/u_1 = (x/x_0)^{-m}$	$u_m/u_1 = \epsilon^{(1-m)} (2/1-m)^{-m} \times (x/L)^{-m}$
Non-Dimensional Coordinates	$\eta = \sqrt{(1-m)/\beta} \cdot y/b$ $b \propto x$	$\eta = \sqrt{R}L(y/g)$ $g \propto x^{(1-m)/2}$
Coefficient	$\alpha = \frac{m}{1-m}$ $\beta = \epsilon/\sigma$	$\alpha = \frac{2m}{1-m}$ $R = u_1L/\nu$

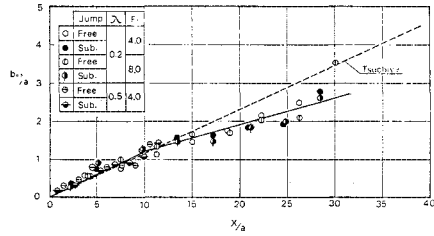
b) 混合幅

混合幅を表わす特性長として、ここでは次の量をもって混合幅  $b$  とする。すなわち、 $x \leq x_0$  では  $u/u_1 = 0.99$  となる  $y$  座標 ( $y_{0.99}$ ) と  $u/u_1 = 0$  となる  $y$  座標 ( $y_{0.0}$ ) との差を混合幅とし、 $x \geq x_0$  では  $u/u_m = 1.0$  なる  $y$  座標 ( $\delta_m$ ) と  $y_{0.0}$  との差をもってこれを定義する。図一15 は、各実験についての混合幅の流下方向変化を示したものである。実験値はかなりのばらつきがあるが、 $x < x_0$  で混合幅  $b$  は  $x$  に比例して増大し、 $x \geq x_0$  に移ってその傾きは小さくなるが、やはり  $x$  と直線関係にあり、この関係はほぼローラー終端  $L_s$  まで有効である。 $L_s$  を越すと上壁面が存在するためにそれ以上混合幅は増加せず、むしろ底部境界層厚さの漸増のために漸減する傾向が見られた。 $\lambda = 0.2$  の場合と、 $\lambda = 0.5$  の場合とを比較して  $db/dx$  は  $x \leq x_0$  では両者ともほぼ同じであるが、 $x > x_0$  では前者の方が小さくなっている。これは、 $\lambda = 0.2$  の場合の方が逆流の流下方向への範囲が大きいから、その中心線にあたる  $y_{0.0}$  は、 $\lambda = 0.5$  の場合に比べて、急速には大きくなるためである。

いま、上に定義した  $b$  よりも正確に求められる混合幅特性長として、 $u/u_m = 0.5$  の座標  $y_{0.5}$  と  $\delta_m$  (または  $y_{0.99}$ ) との差である  $b_{0.5}$  を選んで、この値の流下方向の変化を示したのが 図一16 である。著者らの実験の範



図一15 混合幅 (b) の変化



図一16 混合幅 ( $b_{0.5}$ ) の変化

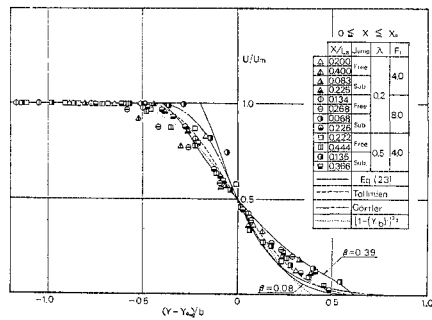
囲内では、跳水の形式には無関係に  $x$  と  $b_{0.5}$  とは、ほぼ同一の直線関係で表わされることがわかり、図一15 に比べてそのばらつきも非常に小さい。土屋の wall jet に関する実験曲線<sup>8)</sup> を 図一16 に併示したが、これと著者らの実験値を比較した結果、 $x/a < 10$  の範囲では両者はきわめて良好な一致を示すが、それより下流では著者らの実験値の方が混合幅の増加率が小さくなることを示した。これは明らかに上壁面拘束の影響が現われる点 がほぼ  $x/a = 10$  に当たるものと見なされ、それより上流の領域では混合幅  $b_{0.5}$  に関する限りでは wall jet としての拡散特性を示すことになる。

以上のことから、混合幅の表示としては  $b$  より  $b_{0.5}$  の方が優れていることがわかったが、いずれの場合にも  $x$  と直線関係にあることから、混合領域の流速分布は self-preservation の性質をもつことが推測される。

c) 混合領域の流速分布

b) の混合幅の発達に関する実験の結果、混合領域の流速分布は self-preservation の特性をもつことが予測された。したがって、ここでは、図一9 の (Ⅲ) および (Ⅴ) で示される混合領域の流速分布の実験結果から、self-preserving flow としての適合性やその限界について考察する。

①  $x \leq x_0$  (Zone of flow establishment) (Ⅲ) 領域：図一17 は、 $x \leq x_0$  の混合領域の流速分布を示したものであり、無次元座標として  $\eta_1 = (y - y_{0.5})/b$  をとっている。 $\eta_1$  が約  $-0.5$  以下ではポテンシャルコア領域に相当し、 $-0.5 < \eta_1 < 0.5$  が混合領域に相当するこ



図一17 Zone of flow establishment での流速分布の無次元表示



とを示している。 $-0.5 < \eta_1 < 0$  ではかなりのばらつきが見られ、跳水の種類によらず self-preserving flow の特性をもつとすることには問題がある。噴流とか後流とかいったいわゆる自由乱れの流れでは、噴出口からある距離までの流れの不完全発達領域（ここではⅢ領域に相当する）では self-preserving flow は確立されず、完全発達領域には self-preservation の性質をもつと Townsend<sup>15)</sup> は報告しており、著者らの場合もこれに相当するものと考えられ、a) の理論的解析によってもこの事実が裏づけられている。しかし、自由跳水ともぐり跳水とを別個に取扱えば、近似的には self-preserving flow と考えてよく、この場合前者の方が  $y$  方向への減が緩慢な曲線となっている。式 (23) の適用に当たっては、 $\beta$  として 0.08 と 0.39 との間の適当な値を選べば実験値と一致するようになり、図-15 から求めた  $\sigma$  を用いれば  $\kappa = \beta\sigma$  は、0.02~0.098 となる。図-17 には  $m=0$  の場合の自由噴流に関する Tollmien の曲線<sup>16)</sup> および Görtler の曲線<sup>17)</sup> (いずれも  $b$  として  $y_{0.99} - y_{0.01}$  とした) ならびに後述する著者らの実験曲線式 (26) を併示している。これらの曲線と実験値とを比較して、Tollmien の曲線の方が Görtler の曲線よりよい一致を示すことがわかる。また、self-preserving flow と考えて簡単な初等関数で与えられた式 (26) も実用上満足すべきものと考えられる。

②  $x \geq x_0$  (Zone of established flow) (V) 領域：  
 $x \geq x_0$  の範囲での混合領域の流速分布を実験条件ごとに示したのが図-18 (a), (b) および (c) である。これらの図から、いずれの条件でも測定値のばらつきは少なく、self-preservation の特性がこの領域にはほぼ確立されたものと認められる。この特性は上壁面の拘束が比較的弱い  $L_s$  の位置付近まで続くが、それ以後はくずれ、一様分布形へと移行することがわかる。

自由跳水ともぐり跳水との流速分布形の差異は著しく、 $F_1=4.0$  では自由跳水の方が  $y$  方向への速度でい減率が大きいに対して、 $F_1=8.0$  では逆にもぐり跳水の方が大きい。これに関する定量的な説明は現象の複雑さからきわめて困難であるが、式 (24) で  $\beta=0.08$  とし、圧力指示係数  $\epsilon$  を与えて解かれた図-18 の流速分布曲線と図-13 の  $\epsilon$  の変化とを照合すると次のことがわかる。すなわち、 $\epsilon$  の値は  $F_1=4.0$  ではもぐり跳水の方が、また  $F_1=8.0$  では逆に自由跳水の方が大きい傾向にある。一方、式 (24) からは  $\epsilon$  が大きいほど  $y$  方向への速度でい減率が小さい曲線が得られることから、結局流下方向の圧力勾配の違いによって流速分布形の相違が生じることになる。

このように、各断面で  $\epsilon$  の値によって流速分布形が異なるから、厳密には self-preservation が成立せず、また開度が大きくなり最大速度でい減率  $m$  が小さくなると  $y$  方向への速度でい減率が小さくなる分布形を示すことが確かめられたが、測定値の間のばらつきが小さいことから、実用上は1つの簡単な曲線で表示した方が便利であり、著者らは次の実験曲線式を提案した。

$$u/u_m = (1 - \eta^2)^{3/2}, \quad \eta = (y - \delta_m)/b = y'/b \quad \dots (26)$$

図-18 からいずれの跳水型においても、式 (26) の適用度はかなり良いことが認められる。

なお、図-15 から求めた  $\sigma$  を使った場合の  $\kappa$  を計算すると、 $\kappa=0.0062 (\lambda=0.2)$ 、 $\kappa=0.015 (\lambda=0.5)$  程度となり、wall jet での値  $\kappa=0.012$  (Glauret<sup>18)</sup>、また2次元自由噴流での値  $\kappa=0.037$  (Reichardt<sup>5)</sup> に匹敵する値となった。

(5) 断面全体の流速分布

境界層領域、混合領域および逆流領域を含む全断面にわたる流速分布の変化を検討したものが図-19 (a) お

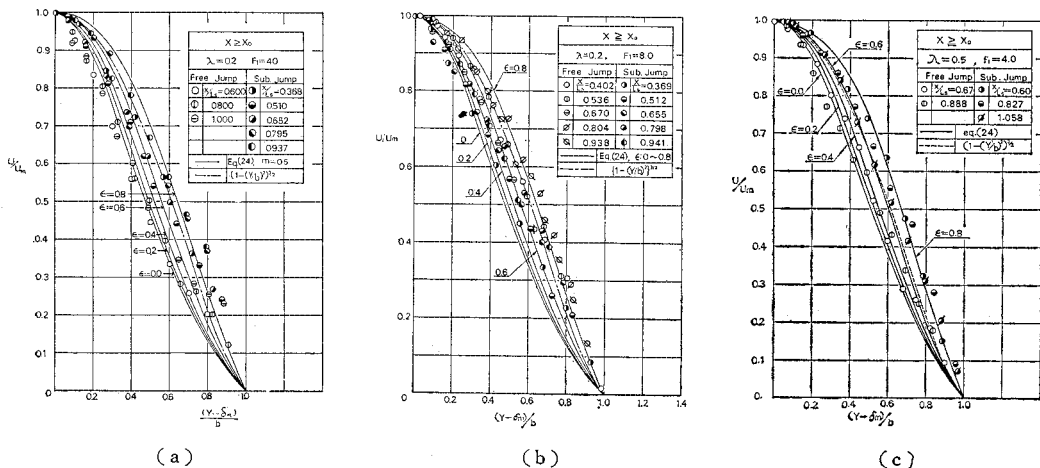


図-18 Zone of established flow での流速分布の無次元表示

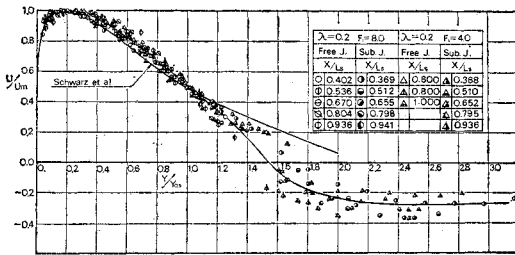


図-19 (a)  $\lambda=0.2$  の流れ全断面にわたる流速分布の無次元表示

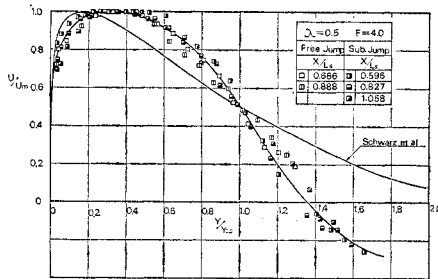


図-19 (b)  $\lambda=0.5$  の流れ全断面にわたる流速分布の無次元表示

よび (b) である。y 方向の特性長として、 $y_{0.5}$  を選んで無次元表示した。これらの図を比較すれば、ただちに開度によって跳水の内部機構に差異があることがわかり、これまでにしばしば論じたように、「自由乱れの流れ」への類似性も開度によって異なることが確認された。すなわち、 $\lambda=0.2$  の場合は、いわゆる wall jet にきわめて類似した性状を示し、ただ跳水の場合は逆流域を伴うから、 $y > y_{0.0}$  では両者は異なる特性を示すことになる。このことは図に併示した Schwarz らの wall jet に関する実験曲線<sup>7)</sup>と著者らの実験値を比較すれば明らかである。ここで、 $y/y_{0.5} < 1$  の範囲で著者らの実験値が Schwarz らの曲線より大きい値を示すのは、Schwarz らの与えた境界層厚が著者らの場合より小さいことによるものであり、 $\lambda=0.2$  の場合でもゲート開き高の影響があらわれることを意味し、line jet source としての取扱いが許される wall jet とはいくぶん異なるようである。 $y/y_{0.5} > 1$  では明らかに逆流が存在するために速度でい減も急速になり、逆流に接続することがわかる。

一方、 $\lambda=0.5$  の場合はもはや wall jet の特性を失い、Schwarz らの実験曲線とも明らかに一致しない。これはゲート開きが大きいことによって噴流の内部機構が異なるためである。

次に、混合領域の self-preservation の特性を考察すると、図-18に見られたような自由跳水ともぐり跳水との差異は顕著ではなく、特性長として  $y_{0.5}$  (あるいは  $b_{0.5}$ ) をとった方が優れていることが認められる。いま、

$\lambda=0.2$  では順流については、self-preservation がかなりよく成立することがわかるが、逆流については測定値のばらつきも大きく、self-preservation が満足しているとはいいがたい。一方、 $\lambda=0.5$  では流れ全体にわたりそれほど大きなばらつきもなく、self-preservation の特性を保持していると見てよい。

しかし、Glauert<sup>18)</sup>は、wall jet に関して流れ全体の self-preservation を期待することには無理があると指摘しており、正確にみれば管路内跳水場でもこの指摘は当てはまると考えられるが、さらに詳細な検討が必要であろう。

#### 4. 結 論

著者らは、管路の途中に設置されたゲートを部分開放操作したとき生じる跳水現象についての基礎的研究を行ない、次下の諸点を明らかにした。すなわち、

(1) 共役水深比やエネルギー損失水頭比などの理論値と実験値との比較的良好的な一致から、管路内跳水現象に一次元水理解析法を適用しても実用上満足される結果がえられる。

(2) 跳水長に関する実験曲線式が求められ、自由跳水ともぐり跳水とはその特性が著しく異なることが示された。

(3) 跳水場を壁面拘束された噴流にシミュレートして領域区分を行ない、特に境界層領域および混合領域の内部機構を理論的ならびに実験的に明らかにし、圧力指示係数が重要な因子であることがわかった。

(4) 混合領域では、流速分布は近似的に self-preservation の特性を示し、実用実験式が与えられた。また、「自由乱れ」への類似性も検討された。

しかし、管路内跳水現象は上、下壁面によって拘束された局所の変動場であるので、その内部機構は複雑であり、ここで取扱った平均量に関してもさらに検討を加える必要があると思われる。そして、跳水現象の内部機構をさらによりよく解明するには乱れに関する把握が必要であり、今後著者らは乱れの挙動に関しても研究して行きたいと考えている。

最後に、本研究の遂行にあたり終始ご協力いただいた大学院生 上田寛君および小林昭夫技官へ深く感謝する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) Kindsvater, C.E.: The Hydraulic Jump in Enclosed Conduits, M.S. Thesis presented to the State University of Iowa, 1936.
- 2) Kalinske, A.A. and J.M. Robertson: Entrainment of Air in Flowing Water; Closed Conduit Flow, Trans. ASCE, Vol. 108, 1943.

- 3) Fassó, C.A. : Experimental Research on Air Entrainment in Gated Outlet Works, Proc. of 6th General Meeting, IAHR, 1955.
- 4) Daily, J.W., J.D. Lin and R.S. Broughton : Turbulence and Static Pressure in Relation to Inception of Cavitation, Proc. of 9th General Meeting, IAHR, 1961.
- 5) Schlichting, H. : Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Co., 1960.
- 6) Albertson, M.L., Y.B. Dai, R.A. Jensen and H. Rouse : Diffusion of Submerged Jets, Trans. ASCE, Vol. 115, 1950.
- 7) Schwarz, W.H. and W.P. Cosart : The Two Dimensional Turbulent Wall Jet, Jour. of Fluid Mech., London, Vol. 10, Part 4, 1961.
- 8) 土屋義人 : 水門下流部における洗掘限界に関する研究, 土木学会論文集, 第 82 号, 1962.
- 9) Baines, W.D. : Discussion of "Diffusion of Submerged Jets" by M.L. Albertson et al., Trans. ASCE, Vol. 115, 1950.
- 10) Rajaratnam, N. : The Hydraulic Jump as a Wall Jet, Proc. ASCE, Vol. 91, HY 5, 1965.
- 11) Rajaratnam, N. : Submerged Hydraulic Jump, Proc. ASCE, HY 4, 1965.
- 12) Rouse, H., T.T. Siao and S. Nagaratham : Turbulence Characteristics of the Hydraulic Jump, Trans. ASCE, Vol. 124, 1959.
- 13) Prandtl, L. : Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz, Z.A.M.M., Band 22, 1942.
- 14) Hartree, D.R. : On an Equation Occurring in Falker & Skan's Approximate Treatment of Equation of Boundary Layer, Proc. Camb. Phil. Soc., 1937.
- 15) Townsend, A.A. : The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge Univ. Press, 1956.
- 16) Tollmien, W. : Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, Z.A.M.M., Band 6, 1926.
- 17) Görtler, H. : Berechnung von Ausgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, Z.A.M.M., Band 22, 1942.
- 18) Glauert, M.B. : The Wall Jet, Jour. of Fluid Mech., Vol. 1, 1956.

(1972. 7.10・受付)