

砂の応力-ひずみ関係についての一考察

A STUDY OF THE STRESS-STRAIN RELATIONSHIP OF A SAND

岩 崎 峯 夫*

By Mineo Iwasaki

1. ま え が き

近年、有限要素法が連続体の応力ひずみ解析に用いられるようになってきた。この方法を土の問題に応用するためには、土の応力-ひずみ関係の一般的表現を求める必要がある。土砂においての複雑な応力-ひずみ挙動の表現は、ある応力-ひずみ入力での挙動を示し、他の応力-ひずみ入力での挙動との関連、任意の応力-ひずみ入力に対する挙動はほとんど今まで述べられてはいない。

主応力方向を一定に保って行なう試験で、土砂が破壊に近づくと、各主応力方向の物理的性質（ヤング率等）が異なり、一般的には3主応力軸に関して異方性を示すであろう。これを3軸直交異方性と呼ぶことにする。本論文では軸対称の問題を取扱い、破壊近くで2軸直交異方性（面内等方性）になると仮定した。また、この場合の応力増分とひずみ増分との関係は、等方圧縮増分成分とせん断増分成分の合成により表わされると仮定した。この関係を求めるために、等方圧縮試験と平均応力一定試験を行なった。さらにこれらの仮定を証明するために、求めた関係を用いて、側圧一定試験の応力-ひずみ挙動を計算し、実際の側圧一定試験結果と比較した。

本論文での理論および理論計算は、次の条件下でのことである。3主応力は、すべて圧縮方向に増加し、途中で減じることはない。3主応力の方向は常に一定に保たれる。

2. 砂の応力-ひずみ関係の理論的考察

砂に応力を加えていくと、ひずみの変化は直線性を失い非線形に変化する。このため、応力-ひずみ関係を示すマトリックスは、応力の増分とひずみの増分間の係数を示すマトリックスになり、このマトリックスの各要素は、そ

の時の応力、ひずみ、間げき比および応力経路により決まる。

応力の増分により生じるひずみ増分は、弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分に分かれ、次式で示される⁷⁾。

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_1^e \\ d\epsilon_2^e \\ d\epsilon_3^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\epsilon_1^p \\ d\epsilon_2^p \\ d\epsilon_3^p \end{Bmatrix} = [AN] \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここで、[AN]は弾塑性ひずみ増分と応力増分との関係を示すマトリックスで、弾塑性変形係数である。一般に[AN]マトリックスは、ある応力経路での応力増分とひずみ増分の関係を示すにすぎない。しかし、ここでは、他の文献⁷⁾と同様に、[AN]マトリックスは、まえがきで述べた条件下で、応力経路に無関係であると仮定し、他の文献⁷⁾と同様に、対称性を仮定する。

砂に偏差応力を加えていく場合、等方性を保つと仮定すると、偏差応力により生じる体積増加（ダイレイタンス）は説明できない。そこで、著者は、偏差応力成分がある値に達すると異方性になると考えた。このことは、本論文の実験でも明らかである。また、この異方性になる値は、ダイレイタンスを生ずる値と一致するので、粘土のダイレイタンスの研究⁴⁾と本研究の実験から、 τ_{oct}/σ_m により示すことができることがわかった。この等方性の限界を等方性限度と呼ぶこととする。

(1) 2軸直交異方性非線形の応力-ひずみ関係

ホルベック⁷⁾は、せん断力が増加していくと、砂は異方性になることを示し、軸対称応力の場合2軸直交異方性になることを示している。本論文では、等方性限度を越えた応力状態で異方性となると考え、2軸直交異方性について述べる。本論文では、砂の応力増分とひずみ増分との関係は、等方圧縮増分成分とせん断増分成分の合成により求めるので、応力増分とひずみ増分との関係を示すマトリックスは、ヤング率、ポアソン比によってな

* 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所 研究員

く、体積弾塑性変形係数，せん断弾塑性変形係数によって示さなくてはならない。そこで，著者は，次のように導いた。

2軸直交異方性の $[AN]$ は次のようになる⁹⁾。 E_1 は σ_1 方向， E_2 は σ_2, σ_3 方向の見かけのヤング率， ν_1 は $\sigma_1 \rightarrow \varepsilon_2, \varepsilon_3, \nu_2$ は $\sigma_2, \sigma_3 \rightarrow \varepsilon_1, \nu_3$ は $\sigma_2 \rightarrow \varepsilon_3, \sigma_3 \rightarrow \varepsilon_2$ に影響する見かけのポアソン比とする。

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{-\nu_2}{E_2} \\ \frac{-\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_3}{E_2} \\ \frac{-\nu_1}{E_1} & \frac{-\nu_3}{E_2} & \frac{1}{E_2} \end{bmatrix} \{d\boldsymbol{\sigma}\} = [AN] \{d\boldsymbol{\sigma}\} \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

ただし，マトリックスの対称性から次の関係がある。

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

応力の増分 $\{d\boldsymbol{\sigma}\}$ は，等方圧縮増分成分 $\{d\boldsymbol{\sigma}\}$ とせん断増分成分 $\{dS_d\}$ とに分けると，次のようになる。

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\sigma_m \\ d\sigma_m \\ d\sigma_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\sigma_1 - d\sigma_m \\ d\sigma_2 - d\sigma_m \\ d\sigma_3 - d\sigma_m \end{Bmatrix} \\ = \{d\boldsymbol{\sigma}_m\} + \{dS_d\} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

ここで， $d\sigma_m$ は次の式で示される。

$$d\sigma_m = (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3)/3 \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

また， $\{d\boldsymbol{\sigma}_m\}, \{dS_d\}$ に関しては次の式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \frac{-2\nu_1}{E_1} & \frac{\nu_1}{E_1} & \frac{\nu_1}{E_1} \\ \frac{\nu_2}{E_2} & \frac{-\nu_2 - \nu_3}{E_2} & \frac{\nu_3}{E_2} \\ \frac{\nu_2}{E_2} & \frac{\nu_3}{E_2} & \frac{-\nu_2 - \nu_3}{E_2} \end{bmatrix} \{d\boldsymbol{\sigma}_m\} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\nu_2}{E_2} & \frac{\nu_2}{E_2} & \frac{\nu_2}{E_2} \\ \frac{\nu_2}{E_2} & \frac{2\nu_2 - \nu_3}{E_2} & \frac{\nu_3}{E_2} \\ \frac{\nu_2}{E_2} & \frac{\nu_3}{E_2} & \frac{2\nu_2 - \nu_3}{E_2} \end{bmatrix} \{dS_d\} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

式 (2.2) に式 (2.4) を代入し，式 (2.6)，(2.7) を加えると，次式となる。

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu_1}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu_2-\nu_3}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_2-\nu_3}{E_2} \end{bmatrix} \{d\boldsymbol{\sigma}_m\} \\ + \begin{bmatrix} \frac{1+\nu_1}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2\nu_2-\nu_3}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+2\nu_2-\nu_3}{E_2} \end{bmatrix} \{dS_d\} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

ここで，

$$\frac{1-2\nu_1}{E_1} = \frac{1}{3K_1}, \quad \frac{1-\nu_2-\nu_3}{E_2} = \frac{1}{3K_2}, \\ \frac{1+\nu_1}{E_1} = \frac{1}{2G_1}, \quad \frac{1+2\nu_2-\nu_3}{E_2} = \frac{1}{2G_2}$$

とすると，次式が求められた。

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3K_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3K_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3K_2} \end{bmatrix} \{d\boldsymbol{\sigma}_m\} \\ + \begin{bmatrix} \frac{1}{2G_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_2} \end{bmatrix} \{dS_d\} \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9K_1} + \frac{2}{6G_1} & \frac{1}{9K_1} - \frac{1}{6G_1} & \frac{1}{9K_1} - \frac{1}{6G_1} \\ \frac{1}{9K_2} - \frac{1}{6G_2} & \frac{1}{9K_2} + \frac{2}{6G_2} & \frac{1}{9K_2} - \frac{1}{6G_2} \\ \frac{1}{9K_2} - \frac{1}{6G_2} & \frac{1}{9K_2} - \frac{1}{6G_2} & \frac{1}{9K_2} + \frac{2}{6G_2} \end{bmatrix} \{d\boldsymbol{\sigma}\} \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

式 (2.9)，(2.10) は，2軸直交異方性マトリックスを体積弾塑性変形係数 K_1, K_2 ，せん断弾塑性変形係数 G_1, G_2 により示した式である。 $K_1=K_2, G_1=G_2$ の場合は，等方性の場合の式と一致する。

等方圧縮増分により生じるひずみ増分 $\{d\boldsymbol{\varepsilon}_m\}$ は，式 (2.9) において， $\{dS_d\}=0$ とすることにより求められる。異方性の場合には，等方性の場合と異なり次の関係がある。

$$d\varepsilon_{m1} \neq d\varepsilon_{m2} = d\varepsilon_{m3} \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

せん断増分により生じるひずみ増分 $\{d\boldsymbol{\varepsilon}_d\}$ は，式 (2.9) において， $\{d\boldsymbol{\sigma}_m\}=0$ とすることにより求められる。その結果，せん断増分により生じる体積ひずみ増分 $d\varepsilon_{vd}$ は，次式で示される。

$$d\varepsilon_{vd} = d\varepsilon_{d1} + d\varepsilon_{d2} + d\varepsilon_{d3} = \frac{d\sigma_1}{2G_1} + \frac{d\sigma_2 + d\sigma_3}{2G_2} \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

式 (2.12) に $d\sigma_m = \frac{d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3}{3} = 0, d\sigma_2 = d\sigma_3$ を代入すると次式となる。

$$d\varepsilon_{vd} = \left(\frac{1}{2G_1} - \frac{1}{2G_2} \right) d\sigma_1 \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

異方性の場合には，等方圧縮増分により生じる体積ひずみ ε_{vm} と，せん断増分により生じる体積ひずみ ε_{vd} が生じる。このように，砂が異方性を示すと考えると，せん断力により生じるダイレイタンスーは， ε_{vd} と考えることができ，うまく説明できる。

また， K_1, K_2, G_1, G_2 と $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ の関係は，

次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{E_1}{3(1-2\nu_1)}, & K_2 &= \frac{E_2}{3(1-\nu_2-\nu_3)} \\ G_1 &= \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}, & G_2 &= \frac{E_2}{2(1+2\nu_2-\nu_3)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.14)$$

3. 各種 3 軸試験での応力-ひずみ関係の数学的表現

線形の応力-ひずみ関係では、連立線形方程式で示されるが、非線形では、各変形係数が土砂の状態により刻々変化するので連立非線形微分方程式で表わされる。

(1) 等方圧縮試験

等方圧縮試験では、せん断成分が存在しないので、異方性になったり、破壊することはない。式 (2.9) に $K = K_1 = K_2$ を代入すると、等方圧縮により生じる体積ひずみ増分 $d\varepsilon_{Vm}$ は、次式で示される。

$$d\varepsilon_{Vm} = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = \frac{1}{K} d\sigma_m \dots\dots\dots(3.1)$$

(2) 平均応力一定試験

試験初期にある平均応力を与え、試験中は平均応力を一定に保つ試験であり、ひずみ、応力増分は、せん断成分のみ存在する。本報告での条件は次のようになる。

$$\sigma_1 \cong \sigma_2 = \sigma_3, (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \text{一定} \dots\dots\dots(3.2)$$

式 (2.9) から、応力-ひずみの関係は、次の連立微分方程式で示される。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{1}{2G_1} d\sigma_1 \\ d\varepsilon_2 &= \frac{1}{2G_2} d\sigma_2 = \frac{-1}{4G_2} d\sigma_1 \\ d\varepsilon_3 &= \frac{1}{2G_2} d\sigma_3 = \frac{-1}{4G_2} d\sigma_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

等方性限度内では、 $G_1 = G_2$ である。また、体積ひずみは、式 (2.13) で示される。

(3) 側圧一定 3 軸試験

側圧一定試験では、 $\sigma_1 \cong \sigma_2 = \sigma_3, d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$ の条件となり、式 (2.10) に代入すると、次の連立微分方程式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= Ad\sigma_1 \\ d\varepsilon_2 &= Bd\sigma_1 \\ d\varepsilon_3 &= Bd\sigma_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.4)$$

ただし、

$$A = \left(\frac{1}{9K_1} + \frac{2}{6G_1} \right), B = \left(\frac{1}{9K_2} - \frac{1}{6G_2} \right) \dots\dots\dots(3.5)$$

である。また等方性限度内では $K_1 = K_2, G_1 = G_2$ である。

(4) 平面ひずみ 3 軸試験

本報告では、3 軸直交異方性については求めていないので、等方性限度内について考える。条件は、 $d\varepsilon_2 = 0, d\sigma_3 = 0$ であるので、式 (2.10) に代入すると、次の連立微分方程式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= Ad\sigma_1 + Bd\sigma_2 \\ 0 &= Bd\sigma_1 + Ad\sigma_2 \\ d\varepsilon_3 &= Bd\sigma_1 + Bd\sigma_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

ただし、

$$A = \left(\frac{1}{9K} + \frac{2}{6G} \right), B = \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} \right)$$

である。

4. 応力-ひずみマトリックスの求め方とその実験結果

(1) 体積弾塑性変形係数と等方圧縮試験

体積弾塑性変形係数 K を求めるため等方圧縮試験を行なった。試料は、豊浦標準砂（比重 2.664）である。結果を図-1 に示す。この曲線は、次式で近似した。

$$\varepsilon_V = a \cdot \sigma_m^{1/4} \dots\dots\dots(4.1)$$

したがって、体積弾塑性変形係数は、次式で示される。

$$K = \frac{4}{a} \sigma_m^{3/4} \dots\dots\dots(4.2)$$

実験の結果 a の値は、 $e_i = 0.664$ で $a = 1/51.0, e_i =$

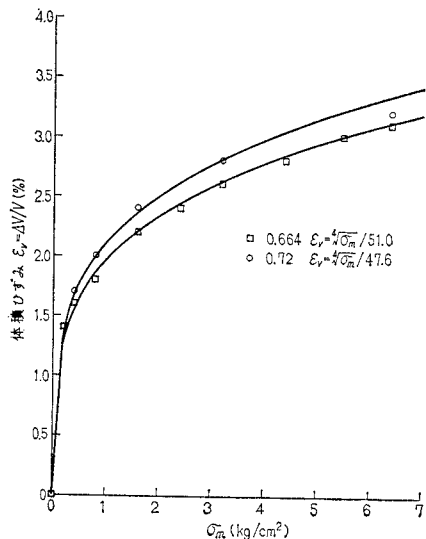


図-1 等方圧縮試験結果

0.72 で $a=1/47.6$ となった。ここで e_i は、初期間げき比である。

変形係数 K を各時点の間げき比 e と、平均応力 σ_m の関数と仮定し、次式を仮定した。

$$K=f(e, \sigma_m) \dots\dots\dots(4.3)$$

実験結果より、この関数を次のようにして求めた。各時点の間げき比と初期間げき比、体積ひずみとの関係は、一般的に次式で示される。

$$e = -(e_i+1) \cdot e_V + e_i \dots\dots\dots(4.4)$$

式 (4.4) に式 (4.1) を代入すると、次式を得る。

$$e = -(e_i+1) \cdot a \cdot \sigma_m^{1/4} + e_i \dots\dots\dots(4.5)$$

$e_i=0.72$ での K を K_a 、 e を e_a 、 $e_i=0.664$ での K を K_b 、 e を e_b とすると次の関係を得る。

$$e_a = -1.72 \times \sigma_m^{1/4} / 47.6 + 0.72 \text{ で}$$

$$K_a = 47.6 \times 4.0 \times \sigma_m^{3/4}$$

$$e_b = -1.664 \times \sigma_m^{1/4} / 51.0 + 0.664 \text{ で}$$

$$K_b = 51.0 \times 4.0 \times \sigma_m^{3/4}$$

となる。

任意の e に対する K は、比例配分して次式で示した。

$$K=f(e, \sigma_m) = \frac{K_a - K_b}{e_a - e_b} (e - e_a) + K_a \dots\dots(4.6)$$

式 (4.6) を図に示すと 図-2 となる。

式 (4.6) を式 (3.1) に代入することにより、等方圧縮試験は、式 (3.1) の解として、微分方程式でも示される。

(2) せん断弾塑性変形係数と平均応力一定試験

せん断弾塑性変形係数を求めるために、平均応力一定の試験を行なった。実験装置は、普通の3軸試験機を用い、側圧を与える水銀容器の位置を σ_1 方向応力の変化

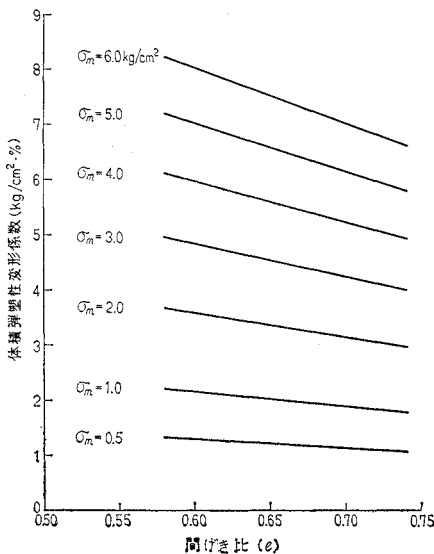


図-2 体積弾塑性変形係数 K と σ_m, e の関係

に合わせて動かすために横に目盛りのついた定規を作った。この定規の目盛りは、 σ_1 測定用リングのダイヤルゲージと関連した目盛りで、 σ_m が一定となるダイヤルゲージの目盛が打ってある。実験方法は、 σ_1 方向に一定ひずみ速度で圧縮し、実験中 σ_1 測定ダイヤルゲージの読みにあわせて、たえず水銀容器を定規上のこの読みの目盛りに合わせ操作を行なった。本研究の試験は、すべて排水試験を行ない、試料の大きさは、直径約 3.5 cm、高さ約 13 cm である。試験装置を 図-3 に示す。平均応力一定試験の結果を 図-4 に示す。図-4 からわかるように、 $\tau_{oct}/\sigma_m \approx 0.6$ に達するまでは、体積変化は生じない。すなわち、この間は等方性であり、せん断弾塑性変形係数は線形と見なせ、弾性変形をしていると考えられる。この点を越えた領域では、せん断力により

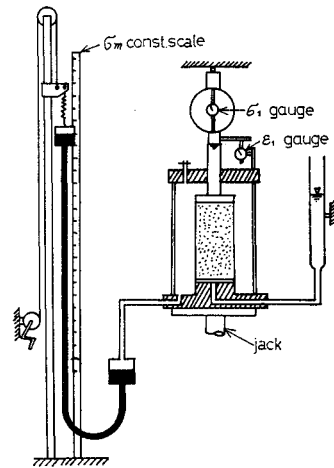


図-3 平均応力一定試験装置

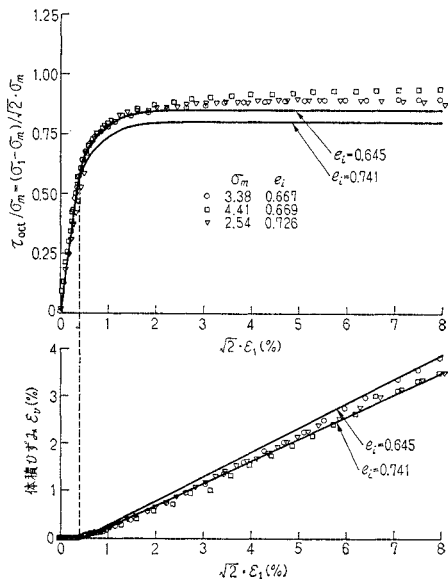


図-4 平均応力一定試験結果

粒子間のすべりが生じ異方性となり、体積増加を伴うと考えられる。図-4 の上図の曲線の接線が G_1/σ_m となるように横軸に $\sqrt{2}\epsilon_1$ をとった。なぜなら式 (3.3) より次式の関係がある。

$$G_1 = \frac{d\sigma_1}{2d\epsilon_1} = \frac{d\tau_{oct}}{\sqrt{2}d\epsilon_1} \dots\dots\dots(4.7)$$

ただし、

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

であり、

$$\sigma_2 = \sigma_3, \sigma_m = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3}$$

を代入すると、 τ_{oct} は次式となる。

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_m)}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots(4.8)$$

G_2 は、等方性限度内では G_1 と同じ値となり、限度外では体積変化から次のように求められる。

図-4 の下図より、等方性限度外では次式を得る。

$$d\epsilon_V = -b \cdot \sqrt{2} d\epsilon_1 \dots\dots\dots(4.9)$$

ただし b は、図-4 の下図の直線の傾きである。

式 (2.13), (4.7), (4.9) より、 G_2 は次の式で示される。

$$G_2 = \frac{G_1}{1 + \sqrt{2}b} = \frac{G_1}{C} \dots\dots\dots(4.10)$$

図-4 での実線は、側圧一定試験の計算に用いた近似曲線であり、側圧一定試験での計算値と実験値が一致するよう次のように補正したものである。今回平均応力一定試験では、特別な装置でなく普通の3軸試験機を用いて行なったので、かなり誤差が入っていると思われる。特に、破壊時の τ_{oct}/σ_m の値は、平均応力一定試験の方が高い値を示している。図-6 は、側圧一定試験より求めた破壊時の τ_{oct}/σ_m の値と初期間げき比との関係である。平均応力一定試験でも同じ条件 (τ_{oct}/σ_m) で破壊すると考えられるので文献^{2), 3), 8)} を参考にして実線のように補正を加えた。この曲線は、図-5 で示すように、1本の直線と1本の曲線をつないで表わした。この曲線を常に原点をとおり、同時に破壊時の τ_{oct}/σ_m を側圧一定試験(図-6) から求めた値と一致するように平行移動させた。 b も側圧一定試験から補正を加え次のように表

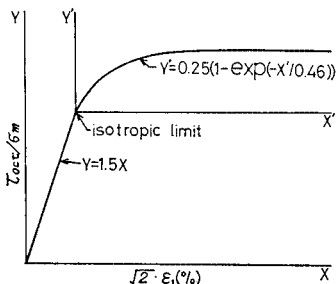


図-5 平均応力一定試験結果の数値表現

わした。

$e_i=0.645$ で $b=0.51$, $e_i=0.741$ で $b=0.47$, 任意の e_i に対しては、比例配分して次式で示した。

$$b = \frac{(0.51-0.47)}{(0.645-0.741)} (e_i-0.645) + 0.51 \dots\dots(4.11)$$

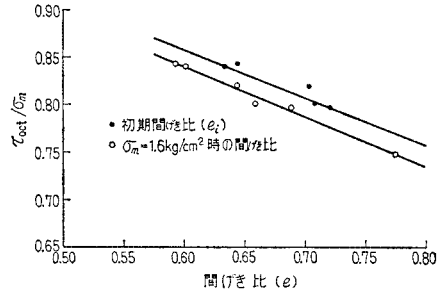


図-6 初期間げき比と強度の関係

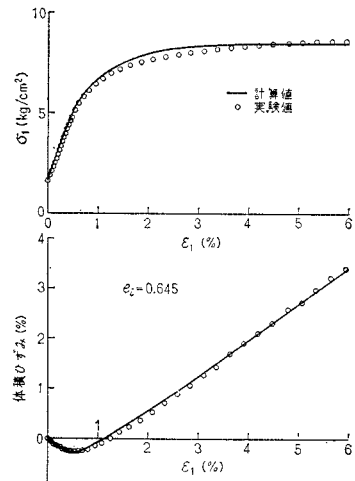


図-7 側圧一定試験結果(1)

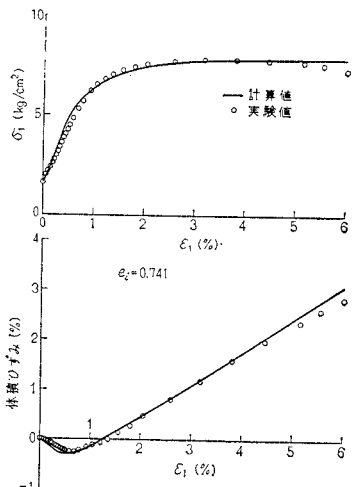


図-8 側圧一定試験結果(2)

(3) 側圧一定3軸試験

この試験は、前述2試験の両成分を含んだ応力状態にあり、前述の2試験から得た各弾塑性変形係数の合成から計算で求めたものとの一致を調べるためと、平均応力一定試験の補正のために行なった。その結果を 図-6, 一例を 図-7, 8 に示す。

5. 計算値と実験値の比較と考察

(1) 計算値と実験値の比較

4. で求めた弾塑性変形係数から式 (3.4), (3.5) に体積増分、間げき比増分の式を加えて、次の計算式を用い側圧一定試験の応力-ひずみ挙動を電子計算機で計算した。微分方程式の解法は、ルンゲ・クッタ・ギル法によった。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} &= \frac{1}{A} \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} &= \frac{B}{A} \\ \frac{d\varepsilon_V}{d\varepsilon_1} &= \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} = 1 + 2 \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} \\ \frac{de}{d\varepsilon_1} &= \frac{-(e_i + 1)d\varepsilon_V}{100 \cdot d\varepsilon_1} \\ A &= \frac{1}{9K_1} + \frac{2}{6G_1}, \quad B = \frac{1}{9K_1} - \frac{1}{6G_2} \\ G_1 &= f_1(\tau_{oct}/\sigma_m, e_i), \quad G_2 = f_2(\tau_{oct}/\sigma_m, e_i) \\ K_1 &= K_2 = K = f(e, \sigma_m) \text{ (等方性)} \\ K_1 &\neq K_2 = f(e, \sigma_m) \text{ (異方性)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

K_1, K_2 は、異方性になった場合での体積弾塑性変形係数であるが、今回は、 K とほぼ等しいとして計算した。この結果の一例を 図-7, 8 に実線で示した。初期間げき比約 0.6~0.74 の間での、他の側圧一定試験結果と計算結果でも 図-7, 8 と同様に良い一致を示した。

(2) 弾塑性マトリックス $[AN]$ の非線形性と異方性の関係

$[AN]$ マトリックスを分解すると次の項に分けられる。

$$[AN] = [K_e] + [K_p] + [G_e] + [G_p] \dots\dots (5.2)$$

ここで、 $[K_e], [K_p]$ は σ_m に関する、 $[G_e], [G_p]$ は偏差応力に関する弾性成分と塑性成分を示すマトリックスである。 $[K_e], [G_e]$ は、ほぼ線形であると考えられる。また $[K_p], [G_p]$ は、非線形であると考えられる。なぜなら、弾性では、粒子間のすべりがなく、塑性では、粒子間のすべりが生じると考えられる。

異方性について考えると、 $[K_e], [G_e]$ は、弾性成分

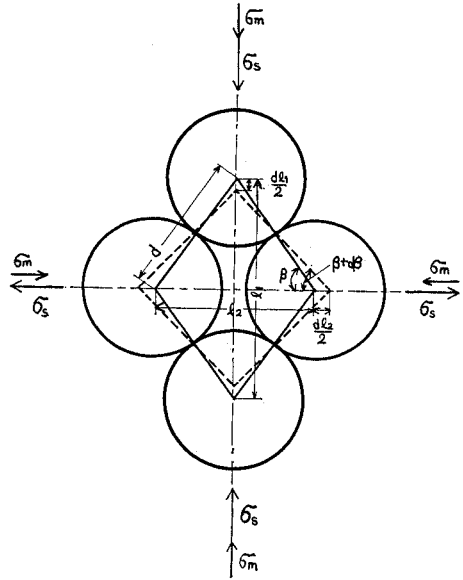


図-9 2次元粒状体の破壊機構

であるので、等方性限度外でもほぼ等方性を示すと考えられる。他方 $[G_p]$ は、常に異方性を示すと考えられる。これを2次元粒状体の破壊機構 図-9 により示す。これは、平均応力 σ_m でせん断応力 σ_s をうけている図である。この状態で、せん断応力が $d\sigma_s$ 増加し、すべりが生じ角 β が $\beta + d\beta$ に変化したとすると各方向ひずみ増分は、次式で示される。

$$d\varepsilon_1 = \frac{dl_1}{l_1} = \frac{\cos \beta \cdot d\beta}{d \cdot \sin \beta} = \frac{d\beta}{d \cdot \tan \beta} \dots\dots (5.3)$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{dl_2}{l_2} = \frac{-\sin \beta \cdot d\beta}{d \cdot \cos \beta} = \frac{-\tan \beta \cdot d\beta}{d} \dots (5.4)$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = \frac{-1}{\tan^2 \beta} \dots\dots\dots (5.5)$$

これをマトリックスで示すと次式となる。

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2G_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_s \\ -d\sigma_s \end{Bmatrix} \dots\dots (5.6)$$

G_1 と G_2 の比は、式 (5.5), (5.6) より次式を得る。

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{1}{\tan^2 \beta} \dots\dots\dots (5.7)$$

このことは、 $[G_p]$ が異方性を示すことを示している。

式 (5.7) の $\tan^2 \beta$ は、式 (4.10) の C に相当する。本研究での実験では、塑性変形が生じてからほぼ一定であった。このことは、平均応力一定試験において、初期間げき比によりほぼ C の値が決まり、各粒子間では、この値はランダムであるが平均値がこの値となり、この平均値を保つように変形が進むと考えられる。

平均応力、偏差応力を含む一般的応力を加えてゆくと、等方性限度内では、 $[AN]$ マトリックスは $[K_e]$,

$[K_p]$, $[G_e]$ より成り, $[K_p]$ のため非線形挙動すると考えられる。等方性限度に達すると $[G_p]$ が加わり異方性と著しい非線形性となり破壊に達すると考えられる。

6. 結 論

以上の実験, 理論計算により次の結論を得た。

(1) 砂の破壊過程では破壊近くで, せん断力により塑性変形が生じ異方性となる。すなわち, 等方性→異方性→破壊の過程をとおり, 砂には等方性の取扱いの限度がある。

(2) ダイレイタンスーは, 異方性から説明と計算ができる。

(3) 等方性圧縮試験より K を求め, 平均応力一定試験より G_1, G_2 を求めることにより, 非線形2軸直交異方性応力-ひずみマトリックスが求まる。

(4) 弾性論等に必要任意の応力状態にある点の弾性定数 (K, G, E, ν) は, 等方圧縮試験, 平均応力一定試験により求まる。ただし, 異方性域では軸対称のみ求まる。

(5) 等方性限度内ならば, $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_3$ または $\epsilon_1 \approx \epsilon_2 \approx \epsilon_3$ (たとえば平面ひずみ条件) の条件の応力またはひずみ入力に, 限度外では $\sigma_2 = \sigma_3$ または $\epsilon_2 = \epsilon_3$ の条件の応力またはひずみ入力に対する挙動が前述の2試験から求まる。

(6) 等方性限度内ならば3次元有限要素法に利用できる。誤差を認めるならば破壊まで拡張できる。

この結論は今回の実験と計算により得られたものであるが, このような理論的取扱いがなされた例がないので, 以上の結論の厳密さの点ではまだ疑問の余地があると思われる。

最後に, 多くの助言を頂いた港湾技術研究所土質部長中瀬明男氏, 研究員 小林正樹氏, 勝野克氏に深く謝意を表わす。

参 考 文 献

- 1) Domaschuk, L.L. and N.H. Wade: A study of bulk and shear moduli of a sand, Proc. of ASCE, No. SM 2, pp. 561~581, March, 1969.
- 2) 落合英俊・山内豊聡: 砂質土とダイレイタンスーについて, 九大工学集報, pp. 102~108, Vol. 43, No. 2.
- 3) Pickering, D.J.: Anisotropic elastic parameters for soil, Geotechnique, Vol. 20, No. 3, pp. 271~276, Sept., 1970.
- 4) 柴田 徹: 粘土のダイラタンスーについて, 京大防災研究所年報, No. 6, pp. 1~7, 昭和 38 年 7 月.
- 5) 市原松平・松沢 宏: 平面ひずみ状態と軸対称ひずみ状態における乾燥砂のせん断特性, 土木学会論文報告集第 173 号, pp. 47~59, 昭和 45 年 1 月.
- 6) 最上武雄編: 土質力学, pp. 479~622, pp. 980~987, 技報堂, 昭和 44 年 8 月.
- 7) Holubec, I.: Elastic behavior of cohesionless soil, Proc. of ASCE, No. SM 6, pp. 1215~1231, Nov., 1968.
- 8) 佐武正雄: 土の降伏条件に関する一試案とその考案, 土木学会論文報告集, 第 189 号, pp. 79~88, 1971 年 5 月.
- 9) ツェンキーヴィッツ, O.C. & チューン, Y.K. 原著: マトリックス有限要素法, pp. 36~37, 邦訳培風館, 昭和 45 年.

(1972. 1.17・受付)
(1972. 9.30・再受付)