

## 二次せん断変形を考慮した曲げねじり理論と数値計算

WARPING TORSION THEORY IN CONSIDERATION OF THE DEFORMATION  
DUE TO SECONDARY SHEARING STRESS AND ITS NUMERICAL EXAMPLES

佐 伯 昇\*

By Noboru Saeki

## 1. ま え が き

最も簡単なねじり理論は Coulomb によって解析された丸棒のねじり理論で軸方向のそりが生じなく、せん断ひずみは回転による角変化のみで表わされる。矩形断面に代表される任意形状の断面では軸方向の変位(そり)が生ずる。このそりが自由に変形しようとして解析したのが Saint Venant の理論であり、薄肉閉断面の場合は Bredt の理論である。この場合せん断ひずみは回転による角変化とそりによる角変化の和として表わされる。そりが自由に変形するというこの仮定は実際に不適當であり、そりは拘束をうけて軸応力を生じているとして解析したのが、Wagner<sup>1)</sup> によって誘導された曲げねじり理論である。Bornscheuer<sup>2)</sup>, Vlasov<sup>3)</sup> らによって系統的にまとめられた。この理論ではそり応力によって2次的なせん断応力が生ずるが、これによる2次的なせん断変形を考慮していない。これを考慮したのが2次せん断変形を考慮した曲げねじり理論である。この考えから Heilig<sup>4)</sup>, Roik<sup>5)</sup>, Grasse<sup>6)</sup> などの研究がある。Heilig はそりに関係するねじり率と実際の桁のねじり率は違うものとして、この2つのねじり率の関係を Potential Energy 極小の条件で求めている。Roik は曲げと軸力をうける桁のせん断変形とこれが相似であるとして2次せん断変形を求めている。Grasse は2次せん断流によるひずみエネルギーと等価になるような仮定の2次的なねじり率を求めている。これらは多少の相違はあるが2次せん断変形に関係する係数( $\alpha$ )は同じものになっている。この係数は2次せん断流の方向に関係なく、2次せん断流によるひずみエネルギーに等価の仮定の回転をあたえるので、特に箱形断面において2次せん断変形を過大に見積ることになる。本論文では2次せん断流の方向を考慮して仕事の式から2次せん断変形を解析したものであ

る。このねじり理論を用いて単純桁、固定桁、単純一固定桁、片持ばりについて断面力を導いている。この断面力の影響線と単純ねじり理論、Bornscheuer の曲げねじり理論および2次せん断変形を考慮した Grasse の理論による断面力の影響線を比較してその差異を明らかにしている。変断面の解析には Knoten-Last 法<sup>7)</sup>を用いて解析し、実際のコンクリート箱桁橋(上姫川橋)の断面を用いて活荷重を載荷し、おのおののねじり理論によるせん断応力およびそり応力について数値計算を行ない、実際の場合のそれぞれの理論による応力の差異を明らかにしている。

## 2. 仮定と記号

次のような仮定と記号を用いる。

(1) 薄肉断面である。閉断面の場合一次せん断流が一定に流れ、Bredt のねじり剛度が成り立っている。開断面に対しては  $\frac{1}{3} \Sigma bt^3$  のねじり剛度が成り立っている。

(2) 周辺方向の変位  $V_s$ 、ねじり角  $\theta$  は軸方向  $z$  のみの関数であり、軸方向の変位  $W$  は  $z, s$  の関数である。すなわち  $V_s = V_s(z)$ 、 $\theta = \theta(z)$ 、 $W = W(z, s)$  である。

(3) フックの法則が成り立っている。そり応力を解析する場合  $\sigma = E \frac{\partial W}{\partial z}$  が成り立っている。

## 記号

$T$ : 全ねじりモーメント

$m_t$ : 1次ねじりモーメント

$\bar{m}_t$ : 2次ねじりモーメント

$m_w$ : 曲げねじりモーメント

$\theta$ : ねじり角

$\theta_s$ : Saint Venant (閉断面では Bredt) によるねじり角

$\bar{\theta}$ : 2次せん断変形によるねじり角

\* 正会員 工博 北海道大学講師 工学部土木工学科

- $W$  : 軸方向の変位 (そり)
- $V_s$  : 周辺方向の変位
- $\sigma$  : そり応力
- $\tau_s$  : 1次ねじりモーメントによるせん断応力
- $\bar{\tau}$  : 2次ねじりモーメントによるせん断応力
- $\tau$  : 全せん断応力
- $r_s$  : 1次のせん断ひずみ
- $\bar{r}$  : 2次のせん断ひずみ
- $r$  : 全せん断ひずみ
- $q_s$  : 1次せん断流
- $\bar{q}$  : 2次せん断流
- $D$  : せん断中心
- $F$  : 断面の中央を通る線によって囲まれる面積
- $I_{tb}$  : Bredt によるねじり剛度
- $I_{ts}$  : Saint Venant によるねじり剛度
- $I_t$  : 全体のねじり剛度
- $C_w$  : 曲げねじり剛度

3. 2次せん断変形を考慮した曲げねじり理論

(1) 2次せん断変形を考慮した曲げねじり理論 (箱形断面)

図-1 の点線で示すように1次のせん断ひずみ  $r_s$  は周辺方向の変位  $V_s$  と軸方向の変位  $W$  の角変化で表わされる。

$$r_s = \frac{\partial V_s}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{q_s}{Gt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

図-1 の実線で示すように2次の仮想のせん断ひずみ  $\bar{r}$  は

$$\bar{r} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (2)$$

で表わされ、1次せん断変形によるねじり角  $\theta_s$ 、2次のせん断変形によるねじり角  $\bar{\theta}$  とすると

$$V_s = r_D \theta_s \quad \dots\dots\dots (3)$$

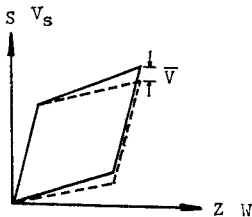


図-1 エレメントの変位

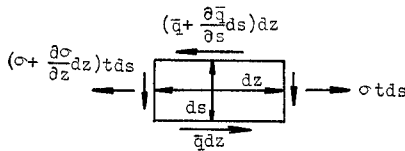


図-2 そり応力と2次せん断応力のつり合い

$$\bar{V} = r_D \bar{\theta} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で表わされる。 $r_D$  はせん断中心からの距離である。式(3)を式(1)に代入し、積分して  $W$  を求めると、

$$W = -\theta_s' \int r_D ds + \frac{1}{G} \int q_s \frac{ds}{t} + W_0 = \varphi \theta_s' \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで

$$\varphi = - \int r_D ds + \frac{1}{G \theta_s'} \int q_s \frac{ds}{t} + \varphi_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

閉断面ではそり  $W$  は連続しているので

$$\oint \frac{\partial W}{\partial s} ds = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)に式(5)を代入して整理すると

$$\frac{q_s}{G \theta_s'} = \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(6)に式(8)を代入すると、 $\varphi$  が決定される。

$$\varphi = - \int r_D ds + \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \int \frac{ds}{t} + \varphi_0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

図-2 において  $z$  方向のつり合いをとって、 $ds dz$  でわると

$$\frac{\partial \sigma t}{\partial z} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial s} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$s$  で積分して  $\bar{q}$  を求めると

$$\bar{q} = \bar{q}_0 - \int \sigma' t ds \quad \dots\dots\dots (11)$$

フックの法則により

$$\sigma = E \frac{\partial W}{\partial z} = E \varphi \theta_s'' \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(11)に式(12)を代入すると

$$\bar{q} = \bar{q}_0 - E \theta_s''' \int \varphi dF = \bar{q}_0 - E \theta_s''' F_\varphi \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで

$$F_\varphi = \int \varphi dF$$

2次せん断流によるせん断ひずみも閉断面部で連続条件を満足しなければならないから

$$\oint \frac{\bar{q}}{Gt} ds = \oint \frac{\bar{q}_0 - E \theta_s''' F_\varphi}{Gt} ds = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{q}_x = \frac{\bar{q}_0}{E \theta_s'''}$$

とおいて式(14)に代入すると  $\bar{q}_x$  は下式のように表わされる。

$$\bar{q}_x = \oint F_\varphi \frac{ds}{t} / \oint \frac{ds}{t} \quad \dots\dots\dots (15)$$

結局式(13)は

$$\bar{q} = -E \theta_s''' (F_\varphi - \bar{q}_x) \quad \dots\dots\dots (16)$$

と表わされる。この2次せん断流  $\bar{q}$  によって図-1 に示したように  $\bar{V}$  が生じ、ねじり角  $\bar{\theta}$  が導かれる。1次のせん断ひずみと2次せん断流によるせん断ひずみの和を  $r$  とする

$$r = \frac{\partial V_s}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = \frac{q}{Gt} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) に式 (3), 式 (4) を代入して, 式 (7) の連続条件を用いると

$$q = G(\theta_s' + \bar{\theta}') \int \frac{ds}{t} \dots\dots\dots (18)$$

となる。q による 1 次ねじりモーメント  $m_t$  は

$$m_t = \oint q r_D ds = G(\theta_s' + \bar{\theta}') I_{tb} \dots\dots\dots (19)$$

ここで

$$I_{tb} = \frac{4 F^2}{\oint \frac{ds}{t}} \dots\dots\dots (20)$$

$\bar{q}$  による 2 次ねじりモーメント  $\bar{m}_t$  は

$$\bar{m}_t = \int \bar{q} r_D ds \dots\dots\dots (21)$$

式 (9) より

$$r_D ds = -d\phi + \int \frac{ds}{t} \frac{ds}{t}$$

であり, 式 (21) に代入すると右辺の第 2 項目は式 (14) より 0 である。すなわち

$$\bar{m}_t = - \int \bar{q} d\phi \dots\dots\dots (22)$$

となる。これを部分積分すると

$$[-\bar{q}\phi] + \int \frac{d}{dF} (\bar{q}) \phi dF$$

第 1 項目は仕事をしないので 0 であり, 2 項目に式 (16) を代入すると

$$\bar{m}_t = -E\theta_s''' \int \phi^2 dF = -EC_w\theta_s''' \dots\dots\dots (23)$$

ここで

$$C_w = \int \phi^2 dF \dots\dots\dots (24)$$

薄肉開断面部分のねじり剛度は

$$I_{ts} = \frac{1}{3} \Sigma b t^3$$

薄肉閉断面部分のねじり剛度は

$$I_{tb} = \frac{4 F^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

全体のねじり剛度

$$I_t = I_{ts} + I_{tb} \dots\dots\dots (25)$$

式 (19) は

$$m_t = G(\theta_s' + \bar{\theta}') I_t \dots\dots\dots (26)$$

全体のねじりモーメント  $T$  は  $m_t$  と  $\bar{m}_t$  の和であるから

$$T = m_t + \bar{m}_t$$

式 (26) と式 (23) を上式に代入すると

$$T = GI_t(\theta_s' + \bar{\theta}') - EC_w\theta_s''' \dots\dots\dots (27)$$

これが 2 次せん断変形を考慮した曲げねじりの微分方程式である。

(2) 2 次せん断変形によるねじり率 (箱形断面)

図-3 に示すように 2 次せん断流の分布は向きを変化しながら分布している。これらの正負の符号の変換点を  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$  とし, せん断中心から点  $S$  における接線までの距離を  $r_D$  とすれば 2 次ねじりモーメントは正負の部分に分けられる。

$$\begin{aligned} \bar{m}_t &= \int_{(+)} \bar{q} r_D ds + \int_{(-)} \bar{q} r_D ds = \bar{m}_{t1} + \bar{m}_{t2} \\ &= -EC_w\theta_s''' \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

(+), (-) は 2 次せん断流の正の部分と負の部分を表わす。

$\bar{m}_{t1}, \bar{m}_{t2}$  に相当するせん断変形によって生ずるねじり率をそれぞれ  $\bar{\theta}'_1, \bar{\theta}'_2$  とすると, これらの外働はそれぞれ  $\bar{m}_{t1}\bar{\theta}'_1, \bar{m}_{t2}\bar{\theta}'_2$  である。これに対応している内働はおのおの

$$\frac{1}{G} \int_{(+)} \frac{\bar{q}^2}{t} ds, \quad \frac{1}{G} \int_{(-)} \frac{\bar{q}^2}{t} ds$$

となる。これらの外働と内働はおのおの等しいから

$$\bar{\theta}'_1 = \frac{1}{G\bar{m}_{t1}} \int_{(+)} \frac{\bar{q}^2}{t} ds \dots\dots\dots (29)$$

$$\bar{\theta}'_2 = \frac{1}{G\bar{m}_{t2}} \int_{(-)} \frac{\bar{q}^2}{t} ds \dots\dots\dots (30)$$

で表わされる。

$$\bar{q}_{(+)} = -\bar{q}_1 E\theta_s''', \quad \bar{q}_{(-)} = \bar{q}_2 E\theta_s''' \dots\dots\dots (31)$$

$$\phi_1 = \int_{(+)} \bar{q}_1 r_D ds, \quad \phi_2 = \int_{(-)} \bar{q}_2 r_D ds \dots\dots\dots (32)$$

とおくと式 (29) および式 (30) はそれぞれ

$$\bar{\theta}'_1 = -\frac{E\theta_s'''}{G\phi_1} \int_{(+)} \frac{\bar{q}_1^2}{t} ds \dots\dots\dots (33)$$

$$\bar{\theta}'_2 = \frac{E\theta_s'''}{G\phi_2} \int_{(-)} \frac{\bar{q}_2^2}{t} ds \dots\dots\dots (34)$$

となる。全体としての 2 次せん断変形によるねじり率を  $\bar{\theta}'$  とすると  $\bar{\theta}' = \bar{\theta}'_1 + \bar{\theta}'_2$  であり, 相反法則  $\bar{m}_{t1}\bar{\theta}'_2 - \bar{m}_{t2}\bar{\theta}'_1 = 0$  で整理すると

$$\bar{m}_{t1}(\bar{\theta}' - \bar{\theta}'_1) - \bar{m}_{t2}(\bar{\theta}' - \bar{\theta}'_2) = 0$$

上式に式 (33), 式 (34) を代入して  $\bar{\theta}'$  で整理すると,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}' &= -\frac{E}{G} \frac{1}{\phi_1 + \phi_2} \left( \int_{(+)} \frac{\bar{q}_1^2}{t} ds - \int_{(-)} \frac{\bar{q}_2^2}{t} ds \right) \theta_s''' \\ &= -\alpha_0 \theta_s''' \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

式 (35) に式 (27) を代入すると

$$GI_t\theta_s' - EC_w\theta_s''' \left( 1 + \alpha_0 \frac{GI_t}{EC_w} \right) - T = 0 \dots\dots (36)$$

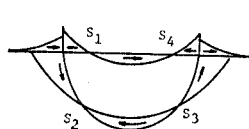


図-3 2 次せん断流

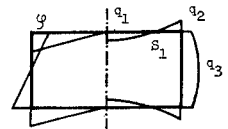


図-4 そり関数と 2 次せん断流

$$\alpha = \frac{I_t}{C_w(\phi_1 + \phi_2)} \left( \int_{(+)} \frac{\bar{q}_1^2}{t} ds - \int_{(-)} \frac{\bar{q}_2^2}{t} ds \right) \dots\dots\dots (37)$$

$$\bar{C}_w = C_w(1 + \alpha) \dots\dots\dots (38)$$

とおけば式 (36) は

$$GI_t \theta_s' - E\bar{C}_w \theta_s''' - T = 0 \dots\dots\dots (39)$$

結局 2 次せん断変形を考慮した曲げねじりの微分方程式はこれまでの曲げねじりの微分方程式と同じ形になる。

(3) 箱形断面の 2 次せん断変形の影響係数 (α)

厚さ (t) が一定で幅 (b), 高さ (h) の箱形断面を考えると, そり関数は図-4 の左半分に示すようになる。

$$\varphi = \frac{bh(b-h)}{4(b+h)} \dots\dots\dots (40)$$

図-4 の右半分に 2 次せん断流の分布を示す。

$$S_1 = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1+2\beta}{3}}, \quad q_1 = -\frac{b+2h}{12} \varphi t,$$

$$q_2 = \frac{b-h}{6} \varphi t, \quad q_3 = \frac{h+2b}{12} \varphi t \dots\dots\dots (41)$$

ここで  $\beta = \frac{h}{b}$

式 (24) より

$$C_w = \frac{b^2 h^2 t}{24(b+h)} (b-h)^2 \dots\dots\dots (42)$$

式 (32) より

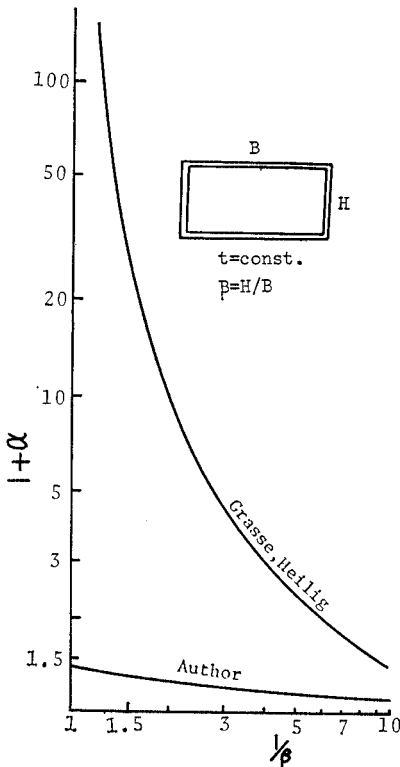


図-5 2 次せん断変形の影響係数

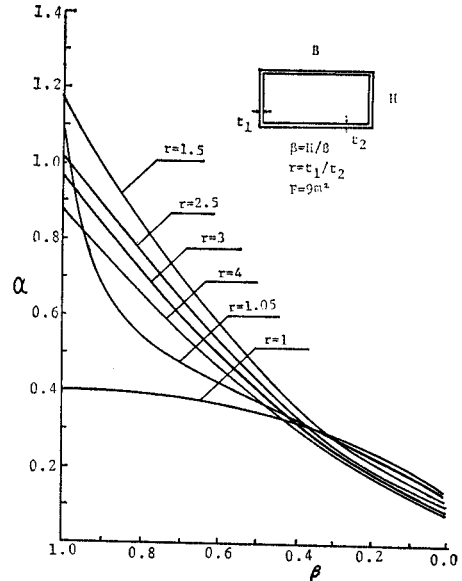


図-6 2 次せん断変形の影響係数 (著者)

$$\phi_1 + \phi_2 = C_w + \frac{2}{9} S_1 (b+2h) h \varphi t \dots\dots\dots (43)$$

$$\int_{(+)} \frac{\bar{q}_1^2}{t} ds - \int_{(-)} \frac{\bar{q}_2^2}{t} ds = \left\{ h^2(h+5b) + b^2(b+5h) - \frac{8}{3} S_1 (b+2h)^2 \right\} \frac{\varphi^2 t}{90} \dots\dots\dots (44)$$

Bredt のねじり剛度のみをとると,

$$I_t = \frac{2bh^2t}{1+\beta} \dots\dots\dots (45)$$

式 (37) より

$$\alpha = 0.4 \left\{ 0.5(1+\beta)(1+4\beta+\beta^2) - \frac{2\sqrt{3}}{9}(1+2\beta)^{2.5} \right\} / \left[ (1-\beta^2) \left\{ 0.5(1-\beta) + \frac{\sqrt{3}}{9}(1+2\beta)^{1.5} \right\} \right] \dots\dots\dots (46)$$

正方形箱断面に近づくと

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \alpha = 0.4 \dots\dots\dots (47)$$

で極限值 0.4 をとっている。

図-5 で 2 次せん断変形の影響係数 (α) について Grasse, Heilig および著者の誘導した係数と比較している。図-6 で式 (37) を用いて面積 F を一定にして r = ウェブ厚/フランジ厚をパラメーターにして  $\beta = H/B$  と α の関係を示している。

(4) I 形断面の 2 次せん断変形の影響係数 (α)

開断面では一次のせん断流  $q_0$  および 2 次せん断流によるひずみの連続条件によって生ずる  $\bar{q}_x$  は生じないから, それぞれ式 (9) の右辺第 2 項目および式 (16) の右辺の第 2 項目がない式になる。このほかを除いて開断面のねじり理論は箱断面のねじり理論と同じになる。

I 断面の高さ  $h$ , 上下フランジの厚さをそれぞれ  $t_1, t_2$ , 幅をそれぞれ  $b_1, b_2$  とし,  $I_1 = b_1^3 t_1 / 12, I_2 = b_2^3 t_2 / 12$  とすればせん断中心  $D$  の位置は上フランジから

$$h_1 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} h, \quad h_2 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} h \dots\dots\dots(48)$$

と表わされる。2 次せん断流は図 7 に示すような 2 次放物線で表わされ上下フランジの頂点の値はそれぞれ  $h_1 t_1 b_1^2 / 8, h_2 t_2 b_2^2 / 8$  となる。この 2 次せん断流はせん断中心  $D$  に関して同じ方向の回転をあたえるので式 (33) のみとなり  $\bar{\theta}_2 = 0$  となる。式 (37) より

$$\alpha = \frac{1.2 I_t}{h^2} \left( \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) \dots\dots\dots(49)$$

ここで  $F_1, F_2$  は上下フランジの面積

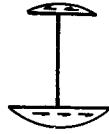


図-7 2次せん断流

この場合 2 次せん断流の方向が同じ回転を与えているので Grasse, Heilig の係数と一致している。

#### 4. 定断面桁の変形と断面力の解析

式 (39) を解いて境界条件を代入すると、それぞれの支承条件における断面力が求められる。以下集中荷重の場合を扱う。I, II は荷重点の左右の式を表わす。

##### (1) 単純支承桁の場合 (表-1)

$$\begin{aligned} \theta(z=0) &= 0, & \theta(z=l) &= 0 \\ \theta_s(z=0) &= 0, & \theta_s(z=l) &= 0 \\ \theta_s''(z=0) &= 0, & \theta_s''(z=l) &= 0 \\ \theta_s' \text{ 左} &= \theta_s' \text{ 右}, & \theta_s' \text{ 左} &= \theta_s' \text{ 右} \end{aligned}$$

(左, 右は荷重点の左, 右を示す)

表-1

|             | I   | II   |
|-------------|---|--|
| $\theta$    | $\frac{1}{GI_t} \left( \frac{b}{l} z - \frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} b}{\bar{\lambda} \text{sh } \bar{\lambda} l} \text{sh } \bar{\lambda} z \right)$ | $\frac{1}{GI_t} \left( \frac{a}{l} z - \frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} a}{\bar{\lambda} \text{sh } \bar{\lambda} l} \text{sh } \bar{\lambda} z' \right)$ |
| $m_t$       | $\frac{b}{l} - \frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} b}{\text{sh } \bar{\lambda} l} \text{ch } \bar{\lambda} z$   | $-\frac{a}{l} + \frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} a}{\text{sh } \bar{\lambda} l} \text{ch } \bar{\lambda} z'$  |
| $\bar{m}_t$ | $\frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} b}{\text{sh } \bar{\lambda} l} \text{ch } \bar{\lambda} z$   | $-\frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} a}{\text{sh } \bar{\lambda} l} \text{ch } \bar{\lambda} z'$  |
| $m_w$       | $\frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} b}{\bar{\lambda} \text{sh } \bar{\lambda} l} \text{sh } \bar{\lambda} z$   | $\frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} a}{\bar{\lambda} \text{sh } \bar{\lambda} l} \text{sh } \bar{\lambda} z'$   |

表-2

|   | I   | II   |
|---|---|--|
| $\theta$  | $\frac{1}{GI_t} \left( \mu_1 z + \frac{C_2}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z}{\bar{\lambda}} \right)$ | $\frac{1}{GI_t} \left( \mu_2 z' - \frac{\mu_2}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda}} + \frac{C_1}{1+\alpha} \frac{1 - \text{ch } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda}} \right)$ |
| $m_t$   | $\mu_1 + \frac{C_2}{1+\alpha} \cdot \text{ch } \bar{\lambda} z$   | $-\mu_2 + \frac{\mu_2}{1+\alpha} \text{ch } \bar{\lambda} z' + \frac{C_1}{1+\alpha} \text{sh } \bar{\lambda} z'$   |
| $\bar{m}_t$   | $-\frac{C_2}{1+\alpha} \cdot \text{ch } \bar{\lambda} z$  | $-\frac{\mu_2}{1+\alpha} \text{ch } \bar{\lambda} z' - \frac{C_1}{1+\alpha} \text{sh } \bar{\lambda} z'$   |
| $m_w$   | $-\frac{C_2}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z}{\bar{\lambda}}$  | $\frac{\mu_2}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda}} + \frac{C_1}{1+\alpha} \frac{\text{ch } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda}}$  |
| $C_1 = \frac{\bar{\lambda} a \text{th } \bar{\lambda} l - \bar{\lambda} l \text{sh } \bar{\lambda} a / \text{ch } \bar{\lambda} l}{\text{th } \bar{\lambda} l - \bar{\lambda} l}$ |   | $C_2 = \frac{-\bar{\lambda} a + \bar{\lambda} l \text{ch } \bar{\lambda} b - \text{sh } \bar{\lambda} b}{(\text{th } \bar{\lambda} l - \bar{\lambda} l) \text{ch } \bar{\lambda} l}$             |
| $\mu_2 = \frac{\text{sh } \bar{\lambda} a / \text{ch } \bar{\lambda} l - \bar{\lambda} a}{\text{th } \bar{\lambda} l - \bar{\lambda} l}$  |   | $\mu_1 = 1 - \mu_2$  |

表-3

|  | I   | II   |
|--|---|--|
| $\theta$   | $\frac{1}{GI_t} \left( \mu_1 z - \frac{\mu_1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z}{\bar{\lambda}} + \frac{C_2}{1+\alpha} \frac{1 - \text{ch } \bar{\lambda} z}{\bar{\lambda}} \right)$ | $\frac{1}{GI_t} \left( \mu_2 z' - \frac{\mu_2}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda}} + \frac{C_2}{1+\alpha} \frac{1 - \text{ch } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda}} \right)$ |
| $m_t$  | $\mu_1 - \frac{\mu_1}{1+\alpha} \text{ch } \bar{\lambda} z - \frac{C_1}{1+\alpha} \text{sh } \bar{\lambda} z$   | $-\mu_2 + \frac{\mu_2}{1+\alpha} \text{ch } \bar{\lambda} z' + \frac{C_2}{1+\alpha} \text{sh } \bar{\lambda} z$  |
| $\bar{m}_t$  | $\frac{\mu_1}{1+\alpha} \text{ch } \bar{\lambda} z + \frac{C_1}{1+\alpha} \text{sh } \bar{\lambda} z$   | $-\frac{\mu_2}{1+\alpha} \text{ch } \bar{\lambda} z' - \frac{C_2}{1+\alpha} \text{sh } \bar{\lambda} z'$   |
| $m_w$  | $\frac{\mu_1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z}{\bar{\lambda}} + \frac{C_1}{1+\alpha} \frac{\text{ch } \bar{\lambda} z}{\bar{\lambda}}$   | $\frac{\mu_2}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda}} + \frac{C_2}{1+\alpha} \frac{\text{ch } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda}}$  |
| $C_1 = \frac{-\bar{\lambda} a \text{th } (\bar{\lambda} l / 2) + (\text{sh } \bar{\lambda} a + \text{sh } \bar{\lambda} b) / \text{sh } \bar{\lambda} l - 1 + \bar{\lambda} l (\text{th } (\bar{\lambda} l / 2) + (1 - \text{ch } \bar{\lambda} b) / \text{sh } \bar{\lambda} l)}{2 \text{th } (\bar{\lambda} l / 2) - \bar{\lambda} l}$ |   |  |
| $C_2 = \frac{-\bar{\lambda} b \text{th } (\bar{\lambda} l / 2) + (\text{sh } \bar{\lambda} a + \text{sh } \bar{\lambda} b) / \text{sh } \bar{\lambda} l - 1 + \bar{\lambda} l (\text{th } (\bar{\lambda} l / 2) + (1 - \text{ch } \bar{\lambda} a) / \text{sh } \bar{\lambda} l)}{2 \text{th } (\bar{\lambda} l / 2) - \bar{\lambda} l}$ |   |  |
| $\mu_1 = \frac{-b \bar{\lambda} + \text{th } (\bar{\lambda} l / 2) + (\text{ch } \bar{\lambda} b - \text{ch } \bar{\lambda} a) / \text{sh } \bar{\lambda} l}{2 \text{th } (\bar{\lambda} l / 2) - \bar{\lambda} l}$  |   | $\mu_2 = 1 - \mu_1$  |

表-4  
(荷重は自由端に載荷している)

|             |  |
|-------------|--|
| $\theta$    | $\frac{1}{GI_t} \left( z - \frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} l - \text{sh } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda} \text{ch } \bar{\lambda} l} \right)$ |
| $m_t$       | $1 - \frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{ch } \bar{\lambda} z'}{\text{ch } \bar{\lambda} l}$  |
| $\bar{m}_t$ | $\frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{ch } \bar{\lambda} z'}{\text{ch } \bar{\lambda} l}$  |
| $m_w$       | $-\frac{1}{1+\alpha} \frac{\text{sh } \bar{\lambda} z'}{\bar{\lambda} \text{ch } \bar{\lambda} l}$   |

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{GI_t}{EC_w}}$$

(2) 単純-固定支承桁の場合 (表-2)

$$\begin{aligned} \theta(z=0) &= 0, & \theta(z=l) &= 0 \\ \theta_s(z=0) &= 0, & \theta_s(z=l) &= 0 \\ \theta_s''(z=0) &= 0, & \theta_s'(z=l) &= 0 \\ \theta_s \text{ 左} &= \theta_s \text{ 右}, & \theta_s' \text{ 左} &= \theta_s' \text{ 右} \\ \theta_s'' \text{ 左} &= \theta_s'' \text{ 右} \end{aligned}$$

(3) 固定桁の場合 (表-3)

$$\begin{aligned} \theta(z=0) &= 0, & \theta(z=l) &= 0 \\ \theta_s(z=0) &= 0, & \theta_s(z=l) &= 0 \\ \theta_s'(z=0) &= 0, & \theta_s'(z=l) &= 0 \\ \theta_s \text{ 左} &= \theta_s \text{ 右}, & \theta_s' \text{ 左} &= \theta_s' \text{ 右} \\ \theta_s'' \text{ 左} &= \theta_s'' \text{ 右} \end{aligned}$$

(4) 固定-自由桁の場合 (表-4) ↗

$$\begin{pmatrix} -(1-r_0) & (2+10r_1) & -(1-r_2) & 0 & 0 \\ 0 & -(1-r_1) & (2+10r_2) & -(1-r_3) & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & -(1-r_{n-1}) & (2+10r_n) & -(1-r_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta z K_1(\bar{\lambda}^2 T) \\ \Delta z K_2(\bar{\lambda}^2 T) \\ \vdots \\ \Delta z K_n(\bar{\lambda}^2 T) \end{pmatrix} \dots (52')$$

式が  $n$  個で未知数  $n+2$  であるから 2 個の境界条件が必要である。

a) 単純支承の場合

$$\left. \begin{aligned} m_0' &= m_{n+1}' = 0 \text{ から} \\ (1+5r_0)m_0 - (1-r_1)m_1 &= \Delta z K_0(\bar{\lambda}^2 T) \\ -(1-r_n)m_n + (1+5r_{n+1})m_{n+1} &= \Delta z K_{n+1}(\bar{\lambda}^2 T) \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

b) 単純-固定支承の場合

$$(1+5r_0)m_0 - (1-r_1)m_1 = \Delta z K_0(\bar{\lambda}^2 T) \dots (54)$$

$$m_{n+1} = 0$$

c) 固定支承の場合

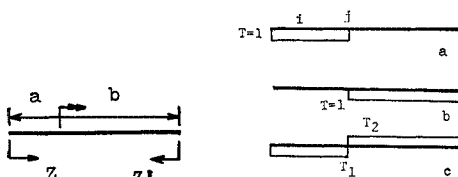


図-8 荷重位置

図-9 全ねじりモーメントの分布

$$\begin{aligned} \theta(z=0) &= 0, & \theta_s''(z=l) &= 0 \\ \theta_s(z=0) &= 0 \\ \theta_s'(z=0) &= 0 \end{aligned}$$

これらの結果を表-1~表-4 に示す。図-8 に示すように荷重位置を  $a, b$ , 左の支承部から  $z$ , 右支承部から  $z'$  をとる。sh=sinh, ch=cosh, th=tanh を示す。

5. 変断面桁の断面力の解析

Knoten-Last 法を用いて 1 次ねじりモーメント  $m_t$  を求め、2 次ねじりモーメント  $\bar{m}_t$  は  $(T-m_t)$  によって求める。曲げねじりモーメント  $m_w$  は荷重点で不連続となるので前者と分けて解析する。

(1)  $m_t, \bar{m}_t$  の解析

$$m = GI_t \theta_s' \dots (50)$$

とおいて式 (39) に代入すると

$$m'' - \bar{\lambda}^2 m + \bar{\lambda}^2 T = 0 \dots (51)$$

$m$  を放物線として Knoten-Last 法によって展開すると、

$$\begin{aligned} -(1-r_{i-1})m_{i-1} + (2+10r_i)m_i - (1-r_{i+1})m_{i+1} \\ = \Delta z K_i(\bar{\lambda}^2 T) \dots (52) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta z = \frac{l}{n+1}$ ,  $r = \frac{\bar{\lambda}^2 \Delta z^2}{12}$ ,  $n+1$  分割

マトリックスで表示すると

$$m_0 = m_{n+1} = 0 \dots (55)$$

次に式 (52) の右辺の荷重項を決めるには、まず図-9

(a) のように  $T=1$  をかけると

$$\begin{aligned} \Delta z K_0(\bar{\lambda}^2 T) &= (3.5r_0 + 3r_1 - 0.5r_2) \\ \Delta z K_i(\bar{\lambda}^2 T) &= (r_{i-1} + 10r_i + r_{i+1}) \\ \Delta z K_j(\bar{\lambda}^2 T) &= (-0.5r_{j-2} + 3r_{j-1} + 3.5r_j) \\ \Delta z K_k(\bar{\lambda}^2 T) &= 0 \end{aligned}$$

同様に図-9 (b) のように荷重をかける。このおのこの式 (52) の解を  $m_L, m_R$  とすると、支承両端においてねじり角が 0 であるから、

$$\int_0^l \frac{m}{GI_t} dz = 0$$

が成り立つ。図-9 (c) のように  $T_1, T_2$  の分布とすると上式は

$$T_1 \int_0^l \frac{m_L}{GI_t} dz + T_2 \int_0^l \frac{m_R}{GI_t} dz = 0$$

$T_1 = T_2 + 1$  であり、 $m_L + m_R = m_{T=1}$  とおくと上式から

$$T_2 = - \int_0^l \frac{m_L}{GI_t} dz / \int_0^l \frac{m_{T=1}}{GI_t} dz \dots (56)$$

式 (56) で求めた  $T_2$  から図-9(c) の分布が決定されるから、これを式 (52) の右辺の荷重項に代入すれば実際の  $m$  が決定される。式 (51) から

$$m'' = \bar{\lambda}^2(m - T)$$

であるから、1次ねじりモーメント  $m_t = m - \alpha_0 m''$ 、2次ねじりモーメント  $\bar{m}_t = T - m_t$  が求まる。

(2)  $m_w$  の解析 ↗

$$\begin{pmatrix} -(1-\tau_0) & (2+10\tau_1) & -(1-\tau_2) & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\tau_1) & (2+10\tau_2) & -(1-\tau_3) & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & -(1-\tau_{n-1}) & (2+10\tau_n) & -(1-\tau_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{w0} \\ m_{w1} \\ \vdots \\ m_{wn+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1+\tau_i}{1+\alpha_i} \Delta z \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (59)$$

式の数が  $n$  個、未知数が  $n+2$  であるから 2 個の境界条件が必要である。

a) 両端単純支承桁の場合

$$m_{w0} = m_{wn+1} = 0 \dots\dots\dots (60)$$

b) 単純一固定支承桁の場合

両端単純支承桁に図-10 のように曲げねじりモーメント  $X_1=1$  を作用させた場合の  $m$  の方程式をマトリックス表示すると

$$\begin{pmatrix} (1+5\tau_0) & -(1-\tau_1) & 0 & 0 \\ -(1-\tau_0) & (2+10\tau_1) & -(1-\tau_2) & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & -(1-\tau_{n-1}) & (2+10\tau_n) & -(1-\tau_{n+1}) \\ 0 & -0.5\tau_{n-1} & -(1-3\tau_n) & (1+3.5\tau_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{GI_{tn+1}}{EC_{wn+1}} \Delta z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (61)$$

上式の  $m_{n+1}$  の解を  $\delta_{11}$  とおき、5.(1) で求めた 両端単純支承桁の  $m_{n+1}$  の解を  $-\delta_{10}^i$  ( $i$  は荷重点の位置) とすると

$$X_1^i = -\frac{\delta_{10}^i}{\delta_{11}} \dots\dots\dots (62)$$

で表わされ、 $m_w$  に関する方程式をマトリックス表示すると

$$\begin{pmatrix} (2+10\tau_1) & -(1-\tau_2) & 0 & 0 \\ -(1-\tau_1) & (2+10\tau_2) & -(1-\tau_3) & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & -(1-\tau_{n-2}) & (2+10\tau_{n-1}) & -(1-\tau_n) \\ & & -(1-\tau_{n-1}) & (2+10\tau_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{w1} \\ \vdots \\ m_{wn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_1^i(1-\tau_{n+1}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (63)$$

固定端では  $m_{wn+1} = X_1^i$  の曲げねじりモーメントが生じている。式 (63) によって単純一固定支承桁の  $m_w$  が求まる。

c) 両端固定支承桁の場合 (対称)

b) の場合と同じようにして、両端単純支承桁に曲げねじりモーメント  $X_1=1$  を作用させた時の  $m_{n+1}$  の解を  $\delta_{11}$ 、 $m_0$  の解を  $-\delta_{12}$  とする、5.(1) で求めた両端単純支承桁の  $m_{n+1}$  の解を  $-\delta_{10}^i$ 、 $m_0$  の解を  $\delta_{20}^i$  とすると仕事方程式は

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1^i + \delta_{12}X_2^i &= -\delta_{10}^i \\ \delta_{12}X_1^i + \delta_{22}X_2^i &= -\delta_{20}^i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

式 (64) を解くと

$$X_1^i = \frac{-\delta_{11}\delta_{10}^i + \delta_{12}\delta_{20}^i}{\delta_{11}^2 - \delta_{12}^2}, \quad X_2^i = \frac{-\delta_{11}\delta_{20}^i + \delta_{12}\delta_{10}^i}{\delta_{11}^2 - \delta_{12}^2} \dots\dots\dots (65)$$

となる。

これを  $m_w$  に関する方程式に代入し、マトリックス表示すると

$$\begin{pmatrix} (2+10r_1) & -(1-r_2) & 0 & 0 \\ -(1-r_1) & (2+10r_2) & -(1-r_3) & 0 \\ 0 & -(1-r_{n-2}) & (2+10r_{n-1}) & -(1-r_n) \\ 0 & 0 & -(1-r_{n-1}) & (2+10r_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{w1} \\ m_{w2} \\ \vdots \\ m_{wn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2^i(1-r_0) \\ 0 \\ \frac{1+r_i}{1+\alpha_i} \Delta z \\ 0 \\ X_1^i(1-r_{n+1}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(66)$$

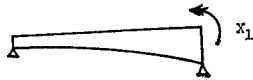


図-10 不静定曲げねじりモーメント

左右の固定支承においてそれぞれ  $X_1^i, X_2^i$  の曲げねじりモーメントが生じている。式 (66) を解くことによって両端固定支承桁の  $m_w$  が求まる。

6. ねじり理論の差異による影響線の計算

単純ねじり理論, Bornscheuer による曲げねじり理論, Grasse の 2 次せん断変形を考慮した曲げねじり理論および著者の理論を比較するために,  $l=30\text{ m}$ ,  $I_t=6.36\text{ m}^4$ ,  $C_w=1.90\text{ m}^6$ ,  $\alpha=0.53$  (Grasse による係数は 2.6),  $E=3 \times 10^4\text{ t/m}^2$ ,  $G=1.3 \times 10^4\text{ t/m}^2$  のコンクリート箱形断面を用いて  $m_t, m_w$  の影響線を比較してみた。 $\bar{m}_t$  は  $T-m_t$  によって比較しえる。図-11(a), (b) によって両端単純支承桁についての  $m_t, m_w$  の影響線(支

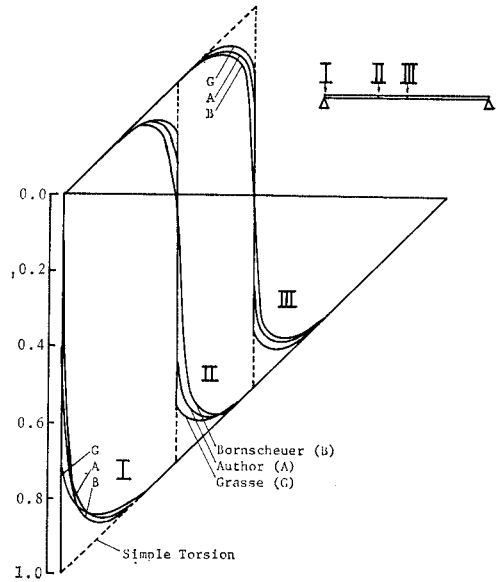


図-12(a) 1次ねじりモーメントの影響線

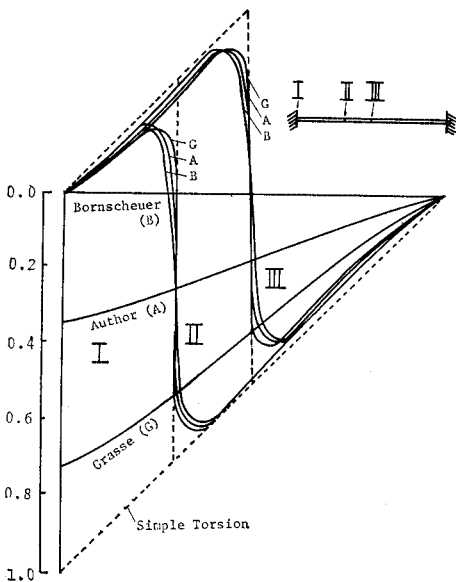


図-11(a) 1次ねじりモーメントの影響線

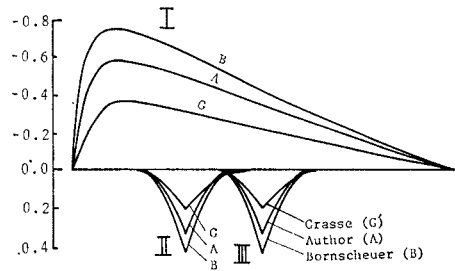


図-12(b) 曲げねじりモーメントの影響線

点,  $l/3$  点および中央点に関して) を示している。同様にして図-12(a), (b) によって両端固定支承桁について示している。

7. 変断面箱桁橋におけるねじり理論の差異によるねじり応力の計算

実際のコンクリート変断面箱桁橋の断面を用いて, 6. と同じように単純ねじり理論, Bornscheuer, Grasse および著者の曲げねじり理論を用いてせん断応力, そり応力を計算する。支承条件は単純一固定支承および両端固定桁を扱う。これらの場合支点において最大のせん断応力が生ずるので, この点の値を計算する。荷重は線荷重  $5\text{ t/m}$ , 分布荷重  $0.35\text{ t/m}^2$  を一番不利な状態に載荷

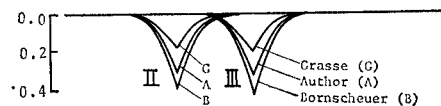


図-11(b) 曲げねじりモーメントの影響線



する。桁高の変化は単純一固定支承桁の場合は直線変化、両端固定支承桁の場合は支点から  $l/3$  までパラボラ、そのあと  $l/2$  まで直線変化していて、対称になっている。桁高の変化と同時に下床版の厚さも変化している。ねじりによる応力の計算は、まず1次せん断応力  $\tau_s$  は Saint Venant による開断面部のせん断応力を無視して式 (18) と式 (19) により

$$\tau_s = \frac{q}{t} = \frac{m_t}{2 F t} \dots\dots\dots (67)$$

2次せん断応力  $\bar{\tau}$  は式 (16) と式 (23) より

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{q}}{t} = \frac{\bar{m}_t}{C_w} \frac{F \varphi - \bar{q} x}{t} \dots\dots\dots (68)$$

全体のせん断応力  $\tau$  は

$$\tau = \tau_s + \bar{\tau} \dots\dots\dots (69)$$

そり応力  $\sigma$  は式 (12) より

$$\sigma = -\frac{m_w}{C_w} \varphi \dots\dots\dots (70)$$

ここで  $m_w = -EC_w \theta_s''$

式 (69) と式 (70) によってせん断応力およびそり応力が計算される。

(1) 両端固定支承桁の場合のねじり応力の計算

図-13 で両端固定支承桁(上姫川橋の一部)の概略図を示す。図-14(a)で  $m_t$  の影響線および(b)図で1次ねじり応力の分布図を示す。図-15(a)で  $\bar{m}_t$  の影響線および(b)図で2次ねじり応力の分布図を示す。図-

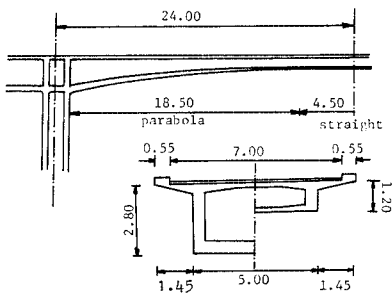


図-13 固定桁(上姫川橋の一部)

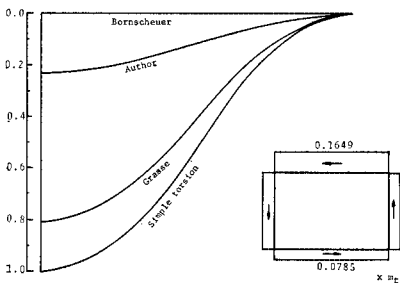


図-14(a) 1次ねじりモーメント影響線(支点)

図-14(b) 1次せん断応力(支点)

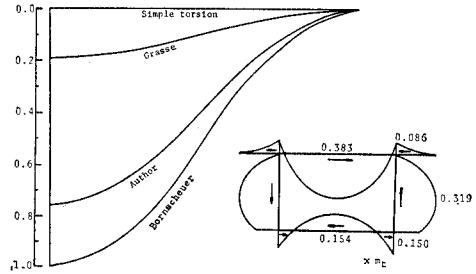


図-15(a) 2次ねじりモーメント影響線(支点)

図-15(b) 2次せん断応力(支点)

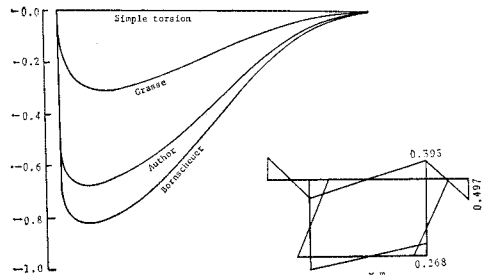


図-16(a) 曲げねじりモーメント影響線(支点)

図-16(b) そり応力(支点)

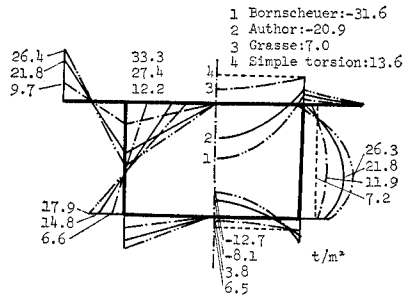


図-17 そり応力(左), せん断応力(右) (固定桁の固定端)

16(a)で  $m_w$  の影響線および(b)図でそり応力の分布図を示す。これらの影響線に活荷重を載荷するとおのおの分布図の乗数がえられ応力が解析される。これらの影響線および分布図は最大応力が生ずる固定端に関するもので、おのおのねじり理論によるそり応力およびせん断応力の分布図は図-17 で示している。

(2) 単純一固定支承桁の場合のねじり応力の計算

図-18 で単純一固定支承桁(上姫川橋の一部)の概略図を示す。固定支承桁と同じように最大応力が生ずる固定端で活荷重を載荷した場合のそれぞれのねじり理論による応力を比較している(図-19)。

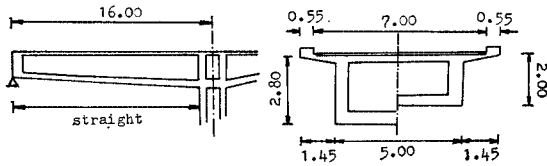


図-18 単純固定桁 (上姫川橋の一部)

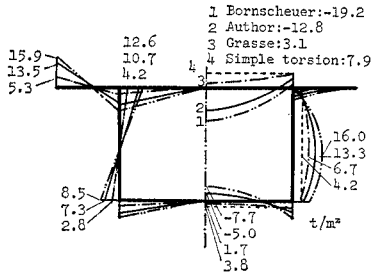


図-19 そり応力 (左), せん断応力 (右)  
(単純一固定桁の固定端)

## 8. 結 論

(1) 図-5 に示しているように 2 次せん断変形に関する影響係数 ( $\alpha$ ) は厚さが一定の場合  $0.1 < \alpha < 0.4$  の値をとるのに対して, Grasse らによって導かれた値は  $0.5 < \alpha < \infty$  の値で対応しており, 2 次せん断変形の影響を過大に見積る傾向があることを示している。図-6 では一般断面形状の場合について床版とウェブの厚さを異にして計算すると  $0.1 < \alpha < 1.2$  の範囲にあることを示している。

(2) 著者のねじりの微分方程式はこれまでの曲げねじり (Bornscheuer による) の場合と同じ形となるが, 方程式の係数と境界条件が変わっているので解はこれまでと違っている (表-1~4)。

(3) 図-11(a), (b) に示すように単純桁の影響線ではこれまでの曲げねじり理論 (Bornscheuer, Grasse) と著者のとでは差が小さいが, 図-12(a) に示すように固定支承点で大きな差が生じている。すなわち Bornscheuer の理論では固定支承点での 1 次ねじりモーメントの影響線が生じないのに対してある値が生じている。著者と Grasse との比較では Grasse の方がより単純ねじりに近くなっている。他の点での影響線については大差

はない。図-12(b) に示すように曲げねじりモーメントの影響線については大差がないが 2 次せん断変形の影響により Bornscheuer, 著者, Grasse の順に小さくなっている。

(4) 実際のコンクリート変断面箱桁橋の活荷重による単純一固定支承桁および固定支承桁の固定支承点の著者の理論によるせん断応力 (Web の最大応力点) は Bornscheuer に比して 2 割小, Grasse に比して 2 倍大, 単純ねじりに比して 3 倍大となっている。そり応力も同じような傾向で著者の値は Bornscheuer に比して 2 割小, Grasse に比して 2 倍大となっている (図-17, 図-19)。

(5) 著者の理論は単純ねじり理論とこれまでの曲げねじり理論の中間の性状 (影響線, 応力) を示している。

## 9. あとがき

コンクリート桁橋によく用いられる箱桁橋について, 2 次せん断変形による影響を考慮した曲げねじり理論を誘導し, 実際のねじり応力について数値計算を行った。この計算には北海道大学大型計算機センターの FACOM-230/60 を用いた。

最後に, 本論文の作成にあたり, 終始ご指導をしてくださりました北海道大学工学部土木工学科 横道英雄 教授に謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) Wagner, H.: Luftfahrt-Forschung Band 11, 1939, S 119.
- 2) Bornscheuer, F.W.: Systematische Darstellung des Biege und Verdrehvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion Stahlbau 21-1.
- 3) Vlasov, V.Z.: Thin-Walled Elastic Beams.
- 4) Heilig, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform Stahlbau 11/1961
- 5) Roik, K. und Sedlacek, G.: Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen Analogiebetrachtung zur Berechnung des quer belasten Zugstabes, Stahlbau 2/1966
- 6) Grasse, W.: Wölbkrafttorsion dünnwandiger prismatischer Stäbe beliebigen Querschnitts, Ingenieur-Archiv, XXXIV. Band, 1965
- 7) Stüssi, Futz: Entwurf und Berechnung von Stahlbauten.

(1972.6.6・受付)