

## 飽和した多孔質弾性体中を伝播する非線形波動について

### ON THE NON-LINEAR WAVE PROPAGATION IN A SATURATED POROUS ELASTIC SOLID

後藤 尚 男\*・佐藤 忠 信\*\*

By Hisao Goto and Tadanobu Sato

#### 1. ま え が き

地震時の地盤の動的挙動を論ずる場合、地盤を構成する土の動的な物理定数と波動の伝播速度の関係が明らかにされ、その解析的な表示が可能であることが要求される。このような観点から、土に振動を与えたときの振動特性を測定し線形弾性論に基づいて土のヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数などを求めようとする研究がなされてきた<sup>1)~4)</sup>。しかし、土木構造物の安全性に関係する地表層では層を構成する土はかなり軟かく、かつ固体と流体の2相から構成されていることが多いから、このような物質を単一相からなる線形弾性体と考えることはかなり大胆な仮定といえる。2相系の物体中を伝わる実体波の研究には M.A. Biot<sup>5), 6)</sup> のものがあるが、これは線形理論であるから土のような非線形性を有する物体の挙動を十分表示できるものとは考えられない。

本研究は強震時の地盤の非線形応答を解析するための第一段階として、地盤を構成する土を流体で飽和された等方性の非線形多孔質弾性体でモデル化し、このような物質中を伝播する実体波の形態について考察を加えたものである。

近年、電磁流体の非線形問題を解くために開発された数学的手法を用いて、1相系の物体中を伝播する非線形波動の理論的な解析が詳しくなされている。これらの研究は物体中を伝播する不連続面を取り扱ったもの<sup>7)~12)</sup>と simple wave を取り扱ったもの<sup>13)~17)</sup>に大別することができる。simple wave とは、運動を支配する双曲形方程式の解のうち時間と空間の全領域において滑らかなものをいい、その基礎理論は P.D. Lax<sup>13)</sup>によって与えられた。D.R. Bland は等方性の可圧縮性非線形弾性体中

を伝わる圧縮波の解析<sup>14)</sup>にこの理論を用い、引き続いて平面波の解析<sup>15)</sup>を行なって可圧縮性非線形弾性体中を伝播する simple wave は3組あることを示した。また、W.D. Collins<sup>16)</sup> は非圧縮性の非線形弾性体中を伝わる平面波の研究にこの理論を使い、D.R. Bland が得たのと同様な結論を得た。直交異方性の非線形弾性体については I.C. Howard<sup>17)</sup> が研究し、このような物体中を伝播する simple wave は3組存在することを確かめた。

本文では simple wave 理論により、先に述べた2相系の物体(流体と非線形弾性体の混合体)中を伝播する波動の構造とその伝播速度について考察を行なう。本文の 2. では流体で飽和された非線形多孔質弾性体を支配する保存系の運動方程式について述べ、3. ではこのような物体の構成式について述べ、4. では 2. で得られた方程式系を用い、このような物体中を伝播する simple wave の特性について述べる。

#### 2. 運動方程式

物体の運動を取り扱う場合、ある特定の時刻に粒子の占めていた位置を基準としてそれからの変形を考える場合と、時間とともに変化する粒子位置を基準として考える場合の2通りがある。基準となる座標系を前者では単に基準座標(reference coordinate)と名づけ、後者を流通座標(current coordinate)と名づけることにする。以下では両者とも直交直線座標系を用いることにする。

いま混合体の $\alpha$ 番目の構成要素を $s^{(\alpha)}$ という文字で代表する。時刻 $\tau=0$ で同じ位置 $X_I$ にある $s^{(\alpha)}$ が互いに相対運動を行なって、時刻 $\tau=t$ で $x_i^{(\alpha)}$ にあるとすれば次式をうる。

$$x_i^{(\alpha)} = x_i^{(\alpha)}(X_I, t) \dots \dots \dots (1)$$

なお、すべてのラテン文字の添字は1,2,3の値を取り、特に断わらないかぎりラテン文字の添字については総和規約を適用し、ギリシャ文字の添字には適用しないもの

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学教室  
\*\* 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科博士課程在学中

とする。大文字の添字の付いた記号はすべて基準座標系によるものを表わし、小文字の添字の付いた記号は流通座標系によるものを表わすものとする。運動方程式を基準座標系で表示する場合には、時刻  $\tau=0$  で単位体積の中にあった物質が時刻  $\tau=t$  までにどれだけ変形するかを考えなければならない。この場合構成要素  $s^{(\alpha)}$  の変位は次式で表わされる。

$$x_i^{(\alpha)} = X_I + U_I^{(\alpha)}(X_I, t) \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $U_I^{(\alpha)}$  は基準座標系で測った  $s^{(\alpha)}$  相の変位。これから  $s^{(\alpha)}$  相の基準座標系での速度  $V_I^{(\alpha)}$ 、加速度  $A_I^{(\alpha)}$  は次のようになる。

$$V_I^{(\alpha)} = \frac{\partial U_I^{(\alpha)}}{\partial t}, \quad A_I^{(\alpha)} = \frac{\partial^2 U_I^{(\alpha)}}{\partial t^2} \dots\dots\dots(3)$$

また、 $s^{(\alpha)}$ 相の変形勾配 (deformation gradient) は次式で表わされる。

$$x_{i,J}^{(\alpha)} = \delta_{IJ} + U_{I,J}^{(\alpha)} \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 $(\ )_{,J}$  は  $\partial(\ )/\partial X_J$  を表わす記号であり、 $\delta_{IJ}$  はクロネッカーのデルタである。これから  $s^{(\alpha)}$  相のグリーンひずみテンソル  $E_{IJ}^{(\alpha)}$  は次式で定義される。

$$E_{IJ}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (U_{I,J}^{(\alpha)} + U_{J,I}^{(\alpha)} + U_{K,I}^{(\alpha)} U_{K,J}^{(\alpha)}) \dots\dots\dots(5)$$

連続体の運動方程式をラグランジェの方程式によって求められれば、独立した粒子からなる構成系の運動方程式を取り扱う場合のようにその形式が単純化される。 $n$  次の自由度をもつ粒子系の場合には、ラグランジェの方程式は独立変量と時間  $t$  に関する  $n$  元の連立常微分方程式になる。すなわち、ラグランジェ関数は  $n$  個の一般化座標と  $n$  個の一般化速度でもって表示される。一方、連続的な保存系では、運動方程式は時間と空間座標で表わされる連立偏微分方程式になるはずである。これは内部エネルギーが変形勾配に関係しているからである。したがって連続体のラグランジェ関数は一般化座標と一般化速度ならびに一般化座標の空間微分の関数になると考えられる。方程式の詳細な形は用いる座標の性質によって異なってくる。以下では直交直線座標を基準座標とした場合の混合体のラグランジェの運動方程式を誘導する。

以上のことから、3次元空間内での混合体のラグランジェ密度  $L$  は基準座標空間で次のように表わせる。

$$L = L(H_I, J^{(\alpha)}, \dot{H}_I^{(\alpha)}, H_I^{(\alpha)}, t) \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $H_I^{(\alpha)}$  は基準座標空間での  $s^{(\alpha)}$  相の一般化座標、 $t$  は時間、 $\cdot$  記号は  $\partial/\partial t$  を表わしている。したがって基準座標空間での体積が  $V$  なる系全体のラグランジアン  $\mathfrak{L}$  は次式で表わされる。

$$\mathfrak{L} = \int_V L dV$$

上式にハミルトンの変分原理を適用すると次式をうる。

$$\delta \mathfrak{L} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_V \delta L dV dt = 0 \dots\dots\dots(7)$$

上式に式 (6) を代入し部分積分をほどこすと次式をうる。

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{L} = & \int_V \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_I^{(\alpha)}} \delta H_I^{(\alpha)} dV \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_S \frac{\partial L}{\partial H_{I,J}^{(\alpha)}} \delta H_I^{(\alpha)} N_J^{(\alpha)} dS dt \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_V \left\{ \frac{\partial L}{\partial H_I^{(\alpha)}} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_I^{(\alpha)}} \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial L}{\partial H_{I,J}^{(\alpha)}} \right)_{,J} \right\} \delta H_I^{(\alpha)} dV dt = 0 \end{aligned}$$

ここに、 $N_J^{(\alpha)}$  は  $s^{(\alpha)}$  相の基準座標における外向き法線ベクトルの成分。変分量  $\delta H_I^{(\alpha)}$  は互いに独立であるから、上式より混合体のラグランジェの運動方程式として次式をうる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_I^{(\alpha)}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial H_{I,J}^{(\alpha)}} \right)_{,J} - \frac{\partial L}{\partial H_I^{(\alpha)}} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

以上混合体の保存系の運動方程式の一般論を述べたが、以下では流体と弾性体の混合した2相系について考える。いま、一般化座標として

$$\begin{cases} U_I^{(1)}(X_J, t) \equiv U_I(X_J, t) : \text{弾性相の変位} \\ U_I^{(2)}(X_J, t) \equiv V_I(X_J, t) : \text{流体相の変位} \end{cases} \dots\dots(9)$$

をとれば、式 (8) は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_I} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left( \frac{\partial L}{\partial U_{I,J}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_I} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{V}_I} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left( \frac{\partial L}{\partial V_{I,J}} \right) - \frac{\partial L}{\partial V_I} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 $\alpha=1$  は弾性相の、 $\alpha=2$  は流体相の変量を表わすものとし、以後の解析でも同様に考える。

なお構成系全体のラグランジェ密度  $L$  は、系全体の運動エネルギー  $T$ 、ひずみエネルギー  $W$ 、流体相ならびに弾性相の物体力ポテンシャル  $\phi_F, \phi_E$  を用いて次のように表わされる。

$$L = T - W - \rho_F \phi_F - \rho_E \phi_E \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 $\rho_F, \rho_E$  は基準座標系における流体相ならびに弾性相の密度を表わす。いま、弾性相の物体力を  $\rho_E G_I^E$ 、流体相のそれを  $\rho_F G_I^F$  とおけば次式をうる。

$$G_I^E = \frac{\partial \phi_E}{\partial x_i^{(1)}}, \quad G_I^F = \frac{\partial \phi_F}{\partial x_i^{(2)}} \dots\dots\dots(12)$$

また、系全体の運動エネルギーは次のように表わされる。

$$2T = \rho_{11} \dot{U}_K \dot{U}_K + 2\rho_{12} \dot{U}_K \dot{V}_K + \rho_{22} \dot{V}_K \dot{V}_K \dots\dots(13)$$

ここに、 $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$  は Biot<sup>5)</sup> が提唱した質量係数であり、基準座標系で表示したものである。なお、微小変形時の Biot の解析と同じ手法を用いて、有限変形の場合に  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}, \rho_F, \rho_E$  の間に次式の成立することが簡

単に求められる。

$$\rho_E = \rho_{11} + \rho_{12}, \rho_F = \rho_{12} + \rho_{22} \dots\dots\dots(14)$$

流体相が動的な変形をするときは弾性相から抵抗を受ける。逆に弾性相が動的変形をするときは流体相から抵抗を受け、あたかも各相の動的質量に変化を生じたような挙動を示す。 $\rho_{12}$  はこのような動的エネルギーの coupling を表わす質量係数と考えられる。なおこれら質量係数は次の関係式を満たさなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} > 0, \rho_{22} > 0, \rho_{12} < 0 \\ \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

構成系全体のひずみエネルギー  $W$  は、流体相と弾性相のグリーンのひずみテンソルの関数となるから、式(5),(9)を考慮すれば次式をうる。

$$W = W(E_{IJ}^{(1)}, E_{IJ}^{(2)}) = W(U_{I,J}, V_{I,J}) \dots\dots(16)$$

式(11),(13),(16)を式(10)に代入することによって、流体相と弾性相の混合された物体の運動方程式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} + \rho_E \frac{\partial \Phi_E}{\partial U_I} &= \left( \frac{\partial W}{\partial U_{I,J}} \right)_{,J} \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial V_I} &= \left( \frac{\partial W}{\partial V_{I,J}} \right)_{,J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

上式の第1,第2式はそれぞれ弾性相,流体相に対する運動方程式であり、いずれも有限変形理論によって誘導されたものである。式(17)に現われる  $\Phi_E, \Phi_f$  の変位による微分項は式(2),(12)を用いて次式が示すように物体力に關係する。

$$\left. \begin{aligned} \rho_E \frac{\partial \Phi_E}{\partial U_I} &= \rho_E \frac{\partial \Phi_E}{\partial x_i^{(1)}} = \rho_E G_I^E, \\ \rho_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial V_I} &= \rho_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial x_i^{(2)}} = \rho_f G_I^F \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

なお、式(17)の右辺の値はおのおの弾性相と流体相に発生する Piola-Kirchhoff の応力テンソル  $L_{Ji}^{(\alpha)}$  の空間微分  $L_{Ji,J}^{(\alpha)}$  に相当する量になっている。

### 3. 構成式

2相系が超弾性体\* (hyperelastic material<sup>18)</sup>) と超弾性流体\*\* (hyperelastic fluid<sup>18)</sup>) の混合したものからなり、2相を構成する物質の巨視的な性状が等方性を示せば、構成系全体のひずみエネルギー  $W$  は各相のひずみ不変量のみ関数と考えられるから、式(16)の關係は次式のように表わされる。

\* 物体が単位質量当たりのひずみエネルギー関数  $W$  をもち、これがひずみテンソルの解析関数であり、均質な応力のない自然状態において、 $W$  の変化の割合が応力仕事の変化の割合に等しいような物体。

\*\* 上記の条件を満たし、かつ、ひずみエネルギー関数が体積ひずみのみの関数になっているような物体。

$$W = W(I^{(1)}, II^{(1)}, III^{(1)}, I_{Vf}) \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 $I^{(1)}, II^{(1)}, III^{(1)}$  は弾性相のひずみ不変量であり、 $I_{Vf}$  は流体相の体積変化を表わす不変量であり、流体相のひずみ不変量  $I^{(2)}, II^{(2)}, III^{(2)}$  とは次式の關係がある<sup>19)</sup>。

$$I_{Vf} = (1 + 2I^{(2)} + 4II^{(2)} + 8III^{(2)})^{1/2} \dots\dots(20)$$

この場合、弾性相の Kirchhoff の応力テンソル  $K_{IJ}$  と流体相の Kirchhoff の応力テンソル  $P_{IJ}$  は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{IJ} &= \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}^{(1)}} = \frac{\partial W}{\partial I^{(1)}} \frac{\partial I^{(1)}}{\partial E_{IJ}^{(1)}} \\ &+ \frac{\partial W}{\partial II^{(2)}} \frac{\partial II^{(2)}}{\partial E_{IJ}^{(2)}} + \frac{\partial W}{\partial III^{(2)}} \frac{\partial III^{(2)}}{\partial E_{IJ}^{(2)}} \\ P_{IJ} &= \frac{\partial W}{\partial I_{Vf}} \delta_{IJ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

なおひずみ不変量とひずみテンソルの間には次式の關係式がある<sup>19)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} I^{(\alpha)} &= \delta_{KL} E_{KL}^{(\alpha)}, \\ II^{(\alpha)} &= \frac{1}{2!} e_{KMPELNP} E_{LK}^{(\alpha)} E_{NM}^{(\alpha)} \\ III^{(\alpha)} &= \frac{1}{3!} e_{KMPELNP} E_{LK}^{(\alpha)} E_{NM}^{(\alpha)} E_{QP}^{(\alpha)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 $\delta_{KL}$  はクロネッカーのデルタ、 $e_{KMPELNP}$ などは交代記号である。なお、弾性流体を考えるときはひずみエネルギー  $W$  におよぼす流体相の変形は体積変化のみに関するものであるから、弾性相と流体相のグリーンのひずみテンソルは次式によって計算されることになる。

$$\left. \begin{aligned} E_{IJ}^{(1)} &= \frac{1}{2} (U_{I,J} + U_{J,I} + U_{K,I} U_{K,J}) \\ E_{IJ}^{(2)} &= \left( V_{I,J} + \frac{1}{2} V_{I,J}^2 \right) \delta_{IJ} \text{ (総和規約なし)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

### 4. Simple Wave の伝播速度とその伝播形態

式(17)で物体力を無視した場合の方程式は準双曲形の偏微分方程式になるから、適当な条件があれば特性曲線法によって解を求めることができる。特に2個の独立変量をもつ準双曲形偏微分方程式の解の内1組の特性曲線上の Riemann 不変量が一定値になるような解を simple wave 解といい、時間と空間の全領域において滑らかな解となっている。ここでは文献(13),(20)に紹介されている simple wave 理論により弾性流体で飽和された多孔質弾性体中を伝わる simple wave の存在条件、伝播速度、ならびにその伝播形態について述べる。なお simple wave に関する一般的な理論は付録 A に簡単に記述する。

(1) Simple Wave の存在条件

系を支配する運動方程式は式 (17) で与えられる。以下の解析は波動の伝播速度ならびに伝播形式を主に考えるので、式 (17) で物体力を無視した場合のみを取り扱うことにする。

いま座標軸  $X_1$  を波動の伝播する方向と一致させ、次式で表わされるような変形場を考える。

$$U_I = U_I(X_1, t), V_I = V_I(X_1, t) \dots\dots\dots(24)$$

この場合、変位勾配  $U_{I,J}, V_{I,J}$  は  $J=1$  以外は 0 となるので次式で表わされる変数を定義する。

$$m_I = U_{I,1}, n_I = V_{I,1} \dots\dots\dots(25)$$

このよう変形場は  $X_1$  方向へ伝播する均一な平面波を考えることによって得られる。弾性相のひずみ不変量  $I^{(1)}, II^{(1)}, III^{(1)}$  と流体相の体積変化を表わすひずみ不変量  $I_{Vf}$  は式 (20), (22), (23) を考慮して次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I^{(1)} &= m_1 + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2), \\ II^{(1)} &= -\frac{1}{4}(m_2^2 + m_3^2), III^{(1)} = 0 \\ I_{Vf} &= (1 + 2n_1 + n_1^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

式 (25) の関係を用いて式 (17) の物体力を無視した式を書きなおすと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial m_I \partial m_J} \frac{\partial m_J}{\partial X_1} \\ &+ \frac{\partial^2 W}{\partial m_I \partial n_J} \frac{\partial n_J}{\partial X_1} \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial n_I \partial m_J} \frac{\partial m_J}{\partial X_1} \\ &+ \frac{\partial^2 W}{\partial n_I \partial n_J} \frac{\partial n_J}{\partial X_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

いま、次式で定義される変数

$$\xi_I = \dot{U}_I, \eta_I = \dot{V}_I \dots\dots\dots(28)$$

を用いると、式 (27) は次のような 1 階の連立偏微分方程式系へ変換される。

$$\left. \begin{aligned} A_{IJ} m_{J,1} + B_{IJ} n_{J,1} - \xi_I - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}}\right) \dot{\eta}_I &= 0 \\ C_{IJ} m_{J,1} + D_{IJ} n_{J,1} - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right) \xi_I - \dot{\eta}_I &= 0 \\ \xi_{I,1} - \dot{m}_I &= 0 \\ \eta_{I,1} - \dot{n}_I &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

ただし、 $A_{IJ}, B_{IJ}, C_{IJ}, D_{IJ}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_{IJ} &= \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial m_I \partial m_J}, B_{IJ} = \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial m_I \partial n_J} \\ C_{IJ} &= \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial^2 W}{\partial n_I \partial m_J}, D_{IJ} = \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial^2 W}{\partial n_I \partial n_J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

式 (19), (26) を考慮して式 (30) を成分で表示すると次

式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \theta_{mm}/\rho_{11}, A_{12} = 2 m_2 \theta_{mM}/\rho_{11} \\ A_{13} &= 2 m_3 \theta_{mM}/\rho_{11} \\ A_{22} &= \{4 m_2^2 \theta_{MM} + 2 \theta_M\}/\rho_{11} \\ A_{33} &= \{4 m_3^2 \theta_{MM} + 2 \theta_M\}/\rho_{11} \\ A_{23} &= 4 m_2 m_3 \theta_{MM}/\rho_{11}, A_{12} = A_{21} \\ A_{13} &= A_{31}, A_{23} = A_{32} \\ B_{11} &= \theta_{mn}/\rho_{11}, B_{21} = 2 m_2 \theta_{Mn}/\rho_{11} \\ B_{31} &= 2 m_3 \theta_{Mn}/\rho_{11} \\ \text{他の } B_{IJ} &= 0 \\ C_{11} &= \theta_{mn}/\rho_{22}, C_{12} = 2 m_2 \theta_{Mn}/\rho_{22}, \\ C_{13} &= 2 m_3 \theta_{Mn}/\rho_{22} \\ \text{他の } C_{IJ} &= 0 \\ D_{11} &= \theta_{nn}/\rho_{22}, \text{他の } D_{IJ} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

ただし、

$$M = m_2^2 + m_3^2 \dots\dots\dots(32)$$

であり、次式の関係式を用いている。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{mm} &= \frac{\partial^2 W}{\partial m^2}, \theta_{mn} = \frac{\partial^2 W}{\partial m \partial n}, \theta_{nn} = \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} \\ \theta_M &= \frac{\partial W}{\partial M}, \theta_{MM} = \frac{\partial^2 W}{\partial M^2}, \theta_{mM} = \frac{\partial^2 W}{\partial m \partial M} \\ \theta_{Mn} &= \frac{\partial^2 W}{\partial M \partial n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

式 (29) は準線形 1 階 12 元連立偏微分方程式であるが、式 (31) の関係を考慮すると次式で表わされるような 1 階 8 元連立偏微分方程式系へ変換される。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} m_{1,1} + A_{12} m_{2,1} + A_{13} m_{3,1} + B_{11} n_{1,1} \\ - \xi_1 - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}}\right) \dot{\eta}_1 &= 0 \\ A_{21} m_{1,1} + A_{22} m_{2,1} + A_{23} m_{3,1} + B_{21} n_{1,1} \\ - \left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11} \rho_{22}}\right) \xi_2 &= 0 \\ A_{31} m_{1,1} + A_{32} m_{2,1} + A_{33} m_{3,1} + B_{31} n_{1,1} \\ - \left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11} \rho_{22}}\right) \xi_3 &= 0 \\ C_{11} m_{1,1} + C_{12} m_{2,1} + C_{13} m_{3,1} + D_{11} n_{1,1} \\ - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right) \xi_1 - \dot{\eta}_1 &= 0 \\ \xi_{1,1} - \dot{m}_1 &= 0 \\ \xi_{2,1} - \dot{m}_2 &= 0 \\ \xi_{3,1} - \dot{m}_3 &= 0 \\ \eta_{1,1} - \dot{n}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

ただし、次式の関係が成立している。

$$\dot{\eta}_2 = -\left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right) \xi_2, \dot{\eta}_3 = -\left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right) \xi_3 \dots\dots\dots(35)$$

式 (34) の特性曲線の勾配を  $\lambda$  とすれば、付録式 (A-2) を参考にして次式のように与えられる。

$$|m_{ij} - \lambda l_{ij}| = 0 \dots\dots\dots(36)$$

ただし、 $m_{ij}, l_{ij}$  は次式で示されるようなマトリックスである。

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (37)$$

$$l_{ij} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \rho_{12}/\rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{12}/\rho_{22} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots (38)$$

ここに,

$$\alpha = 1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11}\rho_{22}} \dots (39)$$

式 (37), (38) を式 (36) に代入し整理すると次式をうる。

$$|f_{IJ}| = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda^2 & A_{12} & A_{13} & B_{11} - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}}\right)\lambda^2 \\ A_{21} & A_{22} - \alpha\lambda^2 & A_{23} & B_{21} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \alpha\lambda^2 & B_{31} \\ C_{11} - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right)\lambda^2 & C_{12} & C_{13} & D_{11} - \lambda^2 \end{vmatrix} \dots (40)$$

式 (40) に式 (31) を代入し整理すると次式をうる。

$$\left(\alpha\lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}}\right)\{\alpha^2\lambda^6 - \alpha(p+q)\lambda^4 + (\alpha r + qp - s)\lambda^2 - qr + t\} = 0 \dots (41)$$

これより次式のいずれかが成立する。

$$\lambda^2 = \frac{2\theta_M}{\alpha\rho_{11}} \dots (42)$$

$$\alpha^2\lambda^6 - \alpha(p+q)\lambda^4 + (\alpha r + qp - s)\lambda^2 - qr + t = 0 \dots (43)$$

ここに,  $p, q, r, s, t$  は次式で定義されるような変数でひずみエネルギーと関係をもつものである。

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\theta_{mm}}{\rho_{11}} - 2\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}}\theta_{mn} + \frac{1}{\rho_{22}}\theta_{nn} \\ q &= \frac{2}{\rho_{11}}(2M\theta_{MM} + \theta_M) \\ r &= \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}}(\theta_{mm}\theta_{nn} - \theta_{mn}^2) \\ s &= \frac{4M}{\rho_{11}}\left(\frac{1}{\rho_{11}}\theta_{mM}^2 - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}}\theta_{mM}\theta_{Mn}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_{22}}\theta_{Mn}^2\right) \\ t &= \frac{4M}{\rho_{11}^2\rho_{22}}(\theta_{nn}\theta_{mM}^2 - 2\theta_{mn}\theta_{mM}\theta_{Mn} \\ &\quad + \theta_{mm}\theta_{Mn}^2) \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

式 (41) が  $\lambda^2$  に関して正の 4 実根をもつとき, 方程式 (34) は完全双曲形となり simple wave が存在することになる。このためには, 式 (42) の右辺が正でかつ式 (43) が正の 3 実根をもてばよいことになる。すなわち, 次式の関係が満たされればよい。

$$\theta_M > 0 \dots (45)$$

$$\left. \begin{aligned} 4b(3b-a^2)^2 - 2a(3b-a^2)(9c-ab) \\ + 3(9c-ab)^2 < 0 \\ c < 0, b > 0, a < 0 \end{aligned} \right\} \dots (46)$$

ただし,  $a, b, c$  は  $p, q, r, s, t$  と次式の関係にある。

$$a = -(p+q)/\alpha, b = (\alpha r + pq - s)/\alpha^2, c = (t - qr)/\alpha^2 \dots (47)$$

式 (45), (46) が成立するとき, すなわちひずみの間に適当な条件のあるとき超弾性体と超弾性流体との混合体中を伝播する simple wave は 4 組存在することになる。おのおの 1 組は同じ速度で正ならびに負の方向へ伝播する波からなっている。以下で詳しく述べるが, これらは流体相を伝わる圧縮波, 弾性相を伝わる圧縮波, 弾性相を伝わる 2 種類のせん断波の計 4 組から構成される。

## (2) 伝播する波動の形態

式 (40) の I 行目の各余因子行列式を  $F_{I1}, F_{I2}, F_{I3}, F_{I4}$  とすれば, これらは  $\lambda^2$  の関数となる。この場合, 変位勾配  $m_1, m_2, m_3, n_1$  の増分  $dm_1, dm_2, dm_3, dn_1$  はマトリックス  $[f_{IJ}]$  の固有ベクトルとして表わされるから,  $dm_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) と  $dn_1$  の間には次式が成立する (付録 式 (A-10) 参照)。

$$\frac{dm_1}{F_{I1}} = \frac{dm_2}{F_{I2}} = \frac{dm_3}{F_{I3}} = \frac{dn_1}{F_{I4}} \dots (48)$$

a)  $\lambda^2 = \lambda_s^2 \equiv 2\theta_M/\alpha\rho_{11}$  の場合

$\lambda^2 = \lambda_s^2$  を  $[f_{IJ}]$  の 1 行目の各余因子行列式に代入すると, すべてが 0 となるから, 式 (48) の計算を行なうのに, 2 行目の余因子行列式を計算し,  $\lambda^2 = \lambda_s^2$  を代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} F_{21}(\lambda_s^2) = 0, F_{22}(\lambda_s^2) = f_1 m_3^2 \\ F_{23}(\lambda_s^2) = -f_1 m_2 m_3, F_{24}(\lambda_s^2) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

なお,  $f_1$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{16}{\alpha\rho_{11}^3}\theta_{MM}\theta_M^2 - \frac{8}{\alpha\rho_{11}^2}\theta_{MM}\theta_M \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\rho_{11}}\theta_{mm} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}}\theta_{mn} + \frac{1}{\rho_{22}}\theta_{nn}\right) \\ &\quad + \frac{8}{\alpha\rho_{11}^3}\theta_{mM}^2\theta_M + \frac{8}{\alpha\rho_{11}^2\rho_{22}}\theta_{Mn}^2\theta_M \\ &\quad + \frac{4}{\rho_{11}^2\rho_{22}}\theta_{MM}(\theta_{mm}\theta_{nn} - \theta_{mn}^2) \\ &\quad + \frac{4}{\rho_{11}^2\rho_{22}}(2\theta_{mM}\theta_{Mn}\theta_{mn} - \theta_{mM}^2\theta_{nn} - \theta_{Mn}^2\theta_{mn}) \end{aligned} \dots (50)$$

式 (49) を式 (48) に代入し積分を行なうと次式をうる。

$$m_1 = C_1, \quad m_2^2 + m_3^2 = M = C_2^2, \quad n_1 = C_3 \quad \dots (51)$$

一方、 $\theta_M = \theta_M(m_1, n_1, M)$  であったから、 $\theta_M$  は  $\lambda = \lambda_s$  の場合には一定値となり、すべての特性曲線は同じ勾配をもつ直線群となる。この場合、弾性相を伝わる波動の形態は、その変位勾配ベクトル  $[m_I]$  が一定の大きさ

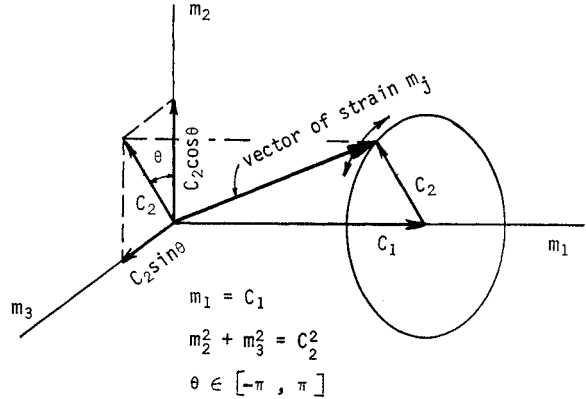
$$(m_1^2 + M)^{1/2} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

をもち、その波動伝播方向の成分が  $C_1$  なる一定値となるようなものとなる。また波動の伝播方向に直交する面内の成分は任意の方向を向くが、その大きさは  $C_2$  なる一定値をもつ。これから、補助変数  $\theta$  を用いて次式のように  $m_2, m_3$  を表わすことができる。

$$m_2 = C_2 \cos \theta, \quad m_3 = C_2 \sin \theta \quad \dots (52)$$

これらのことから、弾性相を伝わる波は円偏波になっていることがわかる。なお、流体相の変位勾配ベクトルは波動の伝播する方向を向き、かつ、その方向に一定値  $C_3$  をもつようなものとなっている。

もしかりに境界上で  $C_1 = C_3 = 0$  なる条件が与えられれば、ひずみは弾性相のみに起こり、波動の伝播方向に直角な面内だけに発生するから、 $\lambda = \lambda_s$  の場合の波動は弾性相を伝播するせん断波ということができる。図一



図一 円偏波における弾性相のひずみ場

1 は以上の関係を示したものである。

**b)  $\lambda^2$  が式 (43) から求まる場合**

いま式(43)から得られる根を大きさの順に  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$  とおく。この場合は a) で行なったように、 $\lambda_i^2$  ( $i=1, 2, 3$ ) の形が簡単に求まらないから、一般的な考察を行なうことはできないが、若干の演算の結果次のようなことが明らかになる。まず、 $[f_{IJ}]$  の 4 行目の余因子行列式を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_{41} &= \left( \alpha \lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}} \right) \left[ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \alpha \lambda^4 - \left\{ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (4M\theta_{MM} + 2\theta_M) + \alpha \theta_{mn} \right\} \frac{1}{\rho_{11}} \lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_{11}} (2M\theta_{MM}\theta_{mn} + \theta_M\theta_{mn} - 2M\theta_{mM}\theta_{Mn}) \right] \\ F_{42} &= -\frac{m_2}{\rho_{11}} \left( \alpha \lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}} \right) \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \theta_{mM} - \theta_{MM} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\rho_{11}} (\theta_{mM}\theta_{mn} - \theta_{Mn}\theta_{mm}) \right\} \\ F_{43} &= -\frac{m_3}{\rho_{11}} \left( \alpha \lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}} \right) \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \theta_{mM} - \theta_{Mn} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\rho_{11}} (\theta_{mM}\theta_{mn} - \theta_{Mn}\theta_{mm}) \right\} \\ F_{44} &= -\left( \alpha \lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}} \right) \left[ \alpha \lambda^4 - \frac{1}{\rho_{11}} (\alpha \theta_{mm} + 4M\theta_{MM} + 2\theta_M) \lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{mM}\theta_{mM} + \theta_{mM}\theta_M - 2M\theta_{mM}^2) \right] \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

式 (53) を式 (48) に代入することにより式(54)~(56)をうる。

$$\frac{dm_3}{dm_2} = \frac{m_3}{m_2} \quad \dots (54)$$

$$\frac{dm_2}{dm_1} = \frac{-\frac{m_2}{\rho_{11}} \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \theta_{mM} - \theta_{MM} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\rho_{11}} (\theta_{mM}\theta_{mn} - \theta_{Mn}\theta_{mm}) \right\}}{\left[ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \alpha \lambda^4 - \left\{ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (4M\theta_{MM} + 2\theta_M) + \alpha \theta_{mn} \right\} \frac{\lambda^2}{\rho_{11}} + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{MM}\theta_{mn} + \theta_M\theta_{mn} - 2M\theta_{mM}\theta_{Mn}) \right]} \quad \dots (55)$$

$$\frac{dn_1}{dm_1} = \frac{-\left\{ \alpha \lambda^4 - \frac{1}{\rho_{11}} (\alpha \theta_{mm} + 4M\theta_{MM} + 2\theta_M) \lambda^2 + \frac{2}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{mM}\theta_{mM} + \theta_M\theta_{mM} - 2M\theta_{mM}^2) \right\}}{\left[ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \alpha \lambda^4 - \left\{ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (4M\theta_{MM} + 2\theta_M) + \alpha \theta_{mn} \right\} \frac{\lambda^2}{\rho_{11}} + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{MM}\theta_{mn} + \theta_M\theta_{mn} - 2M\theta_{mM}\theta_{Mn}) \right]} \quad \dots (56)$$

式 (54) より次式をうる。

$$\frac{m_2}{m_3} = \text{const.} = \phi \quad \dots (57)$$

式 (57) は弾性相の変位勾配のうち波面に平行な面内の成分が常に同一方向を向いていることを表わしてい

る。すなわち、弾性相の変位勾配ベクトルは波動の伝播する方向（この場合は  $X_1$  軸）を含む面内にあることになる。これらのことから、弾性相を伝わる波は平面偏波になっていることがわかる。この関係を示したのが 図一 2 である。式(57)はすべての  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) について成

立する式であるから、以上に述べたことは流体相を圧縮波が伝播するとき ( $\lambda = \lambda_1$  に相当), 弾性相を圧縮波が伝播するとき ( $\lambda = \lambda_2$  に相当), 弾性相をせん断波が伝播するとき ( $\lambda = \lambda_3$  に相当) のいずれの場合にも成立することになる。式 (55), (56) を解くためには  $\lambda_i^2$  ( $i=1, 2, 3$ ) の値が式 (43) より解析的に求まらなければならないが, 簡単に求めることはできない。ここでは, ひずみエネルギー  $W$  をひずみ不変量によりテラー展開し,  $\lambda_i^2$  ( $i=1, 2, 3$ ) の近似値を求め, それについて考察を加えることにする。式 (26) より各ひずみ不変量は  $m_1, M, n_1$  で表示できるから,  $W$  をひずみ不変量で展開することは,  $W$  を  $m_1, M, n_1$  で展開することにほかならない。いま  $W$  を  $m_1, M, n_1$  により 4 次のオーダーまでテラー展開して次式をうる。

$$\begin{aligned}
 W &= W(m_1, M, n_1) \\
 &= a_1 m_1 + a_2 m_1^2 + a_3 m_1^3 + a_4 m_1^4 + b_2 M + b_4 M^2 \\
 &\quad + e_{12} m_1 M + e_{22} m_1^2 M + f_1 n_1 + f_2 n_1^2 + f_3 n_1^3 \\
 &\quad + f_4 n_1^4 + c_{11} m_1 n_1 + c_{12} m_1 n_1^2 + c_{21} m_1^2 n_1 \\
 &\quad + c_{13} m_1 n_1^3 + c_{22} m_1^2 n_1^2 + c_{31} m_1^3 n_1 + d_{21} M n_1 \\
 &\quad + d_{22} M n_1^2 + d_{31} m_1 n_1 M + \dots \dots \dots (58)^*
 \end{aligned}$$

各相のひずみが 0 のとき物体内に応力が発生していないと考えれば,  $W$  の展開における 1 次の項がなくなるから

\* 式 (19) をひずみ不変量で 4 次のオーダーまで展開すれば次式となる。

$$\begin{aligned}
 W &= p_E^0 I + p_0^f (I_{V_f} - 1) + 1/2 (\lambda + 2\mu) I^2 - 2\mu II + II^3 \\
 &\quad + m I II + n III + \epsilon_1 I^4 + \epsilon_2 I^2 II + \epsilon_3 I^2 I^3 + \epsilon_4 I III \\
 &\quad + R I (I_{V_f} - 1) + 1/2 Q (I_{V_f} - 1)^2 + L (I_{V_f} - 1)^3 \\
 &\quad + A_1 (I_{V_f} - 1)^4 + f_1 (I_{V_f} - 1) II + f_2 I^2 (I_{V_f} - 1) \\
 &\quad + f_3 I (I_{V_f} - 1)^2 + f_4 III (I_{V_f} - 1) + f_5 II (I_{V_f} - 1)^2 \\
 &\quad + f_6 I II (I_{V_f} - 1) + f_7 I (I_{V_f} - 1)^3 + f_8 I^3 (I_{V_f} - 1) + \dots \\
 &\text{ただし } I^{(0)}, I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)} \text{ を単に } I, II, III \text{ と記した。また,} \\
 &p_E^0, p_0^f \text{ はひずみが 0 のときの弾性相の応力と流体圧, } \lambda, \\
 &\mu, l, m, n, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4 \text{ は弾性相の弾性定数, } Q, L, A_1 \text{ は} \\
 &\text{流体相の体積弾性定数, } R, f_1, f_2, \dots, f_8 \text{ は流体相と弾性} \\
 &\text{相の変形の間のカップリングを表わす定数である。なお,} \\
 &\lambda, \mu \text{ は線形弾性体のラーメの定数, } Q \text{ は線形流体の体積弾} \\
 &\text{性率に相当する定数である。いま式 (58) の展開項の係数と} \\
 &\text{上式の係数との相互関係を求めると次式のようになる。} \\
 a_2 &= \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu), \quad a_3 = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) + l, \quad a_4 = \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) \\
 &\quad + \frac{3}{2} l + \epsilon_1, \quad b_2 = \frac{1}{2} \mu, \quad b_4 = \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) - \frac{1}{8} m + \frac{1}{16} \epsilon_3, \\
 e_{12} &= \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) - \frac{1}{4} m, \quad e_{22} = \frac{1}{4} (\lambda + 2\mu) + \frac{3}{2} l - \frac{1}{8} m \\
 &\quad - \frac{1}{4} \epsilon_2, \quad f_2 = \frac{1}{2} Q, \quad f_3 = -\frac{1}{4} Q + L, \quad f_4 = -\frac{9}{8} Q \\
 &\quad - \frac{3}{2} L + A_1, \quad c_{11} = R, \quad c_{12} = -\frac{1}{2} R + f_3, \quad c_{21} = \frac{1}{2} R \\
 &\quad + f_2, \quad c_{13} = -R + f_7, \quad c_{22} = -\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{2} f_3, \\
 c_{31} &= f_2 - f_3 + f_8, \quad d_{21} = \frac{1}{2} R - \frac{1}{4} f_1, \quad d_{22} = -\frac{1}{2} R + \frac{1}{8} f_1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} f_3 - \frac{1}{4} f_4, \quad d_{31} = f_2 - \frac{1}{4} f_8
 \end{aligned}$$

$$a_1 = 0, \quad f_1 = 0 \dots \dots \dots (59)$$

とおける。以下の解析ではこの仮定を用いる。なお, 砂に対して式 (21) を用いて, 静的な構成式を実験的に求めた著者のうちの 1 人の研究<sup>21)</sup>によれば,  $W$  を 4 次のオーダーまで展開すればピーク応力まで十分な精度をもって追跡できることがわかっているから, 4 次のオーダーの展開はかなりの適応性をもつものといえる。

式 (58), (59) を式 (33) に代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_{mm} &= 2 a_2 + 6 a_3 m_1 + 12 a_4 m_1^2 + 2 e_{22} M \\
 &\quad + 2 c_{21} n_1 + 2 c_{22} n_1^2 + 6 c_{31} m_1 n_1 \\
 \theta_{mn} &= c_{11} + 2 c_{12} n_1 + 2 c_{21} m_1 + 3 c_{13} n_1^2 \\
 &\quad + 4 c_{22} m_1 n_1 + 3 c_{31} m_1^2 + d_{31} M \\
 \theta_{nn} &= 2 f_2 + 6 f_3 n_1 + 12 f_4 n_1^2 + 2 d_{22} M \\
 &\quad + 2 c_{12} m_1 + 2 c_{22} m_1^2 + 6 c_{13} m_1 n_1 \\
 \theta_{mM} &= e_{12} + 2 e_{22} m_1 + d_{31} n_1 \\
 \theta_{nM} &= d_{21} + 2 d_{22} n_1 + d_{31} m_1, \quad \theta_{MM} = 2 b_4
 \end{aligned} \right\} \dots (60)$$

式 (60) を式 (44) に代入し式 (43) を  $\lambda^2$  について解くが, 式 (60) の各項が 2 次のオーダーであるから  $\lambda^2$  のオーダーとしては 2 次まであれば十分である。したがって, 次式をうる。

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_1^2 &= \alpha_1 + \alpha_2 m_1 + \alpha_3 n_1 + \alpha_4 m_1^2 + \alpha_5 n_1^2 \\
 &\quad + \alpha_6 M + \alpha_7 m_1 n_1 \\
 \lambda_2^2 &= \beta_1 + \beta_2 m_1 + \beta_3 n_1 + \beta_4 m_1^2 + \beta_5 n_1^2 \\
 &\quad + \beta_6 M + \beta_7 m_1 n_1 \\
 \lambda_3^2 &= \gamma_1 + \gamma_2 m_1 + \gamma_3 n_1 + \gamma_4 m_1^2 + \gamma_5 n_1^2 \\
 &\quad + \gamma_6 M + \gamma_7 m_1 n_1
 \end{aligned} \right\} \dots \dots (61)$$

なお, 各  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ( $i=1, \dots, 7$ ) は式 (60) の展開項の係数ならびに式 (13) に現われる質量係数 ( $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ ) の複雑な関数であり, 付録の式 (B-1) ~ (B-13) で与えられる。

式 (61) でひずみが非常に小さい場合を考えれば,

$$m_1 \cong n_1 \cong M \cong 0$$

とおけるから次式をうる。

$$\lambda_1 \cong \pm \sqrt{\alpha_1}, \quad \lambda_2 \cong \pm \sqrt{\beta_1}, \quad \lambda_3 \cong \pm \sqrt{\gamma_1} \dots \dots (62)**$$

一方, 式 (42) より  $\lambda_s$  は次式のようになる。

$$\lambda_s \cong \pm \sqrt{\alpha_1} \dots \dots \dots (63)**$$

この場合には,  $\lambda_1 \cong \lambda_2 \cong \lambda_3 = \lambda_s$  となり, 微小ひずみのもとでは流体で飽和された多孔質弾性体中を伝播する実体波が 3 組存在するという Biot<sup>5)</sup> の研究結果と一致

\*\* 式 (58) の脚注で示した変数を用いると式 (62), (63) の  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[ \left( \frac{\lambda + 2\mu}{2\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} R + \frac{Q}{2\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\left( \frac{\lambda + 2\mu}{2\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} R + \frac{Q}{2\rho_{11}} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} \left\{ \frac{(\lambda + \mu)Q}{2} + R^2 \right\}} \right] \\
 \beta_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[ \left( \frac{\lambda + 2\mu}{2\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} R + \frac{Q}{2\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\left( \frac{\lambda + 2\mu}{2\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} R + \frac{Q}{2\rho_{11}} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} \left\{ \frac{(\lambda + \mu)Q}{2} + R^2 \right\}} \right] \\
 \gamma_1 &= \frac{\mu}{\alpha\rho_{11}}, \quad \text{ただし } \alpha = 1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11}\rho_{22}}
 \end{aligned}$$

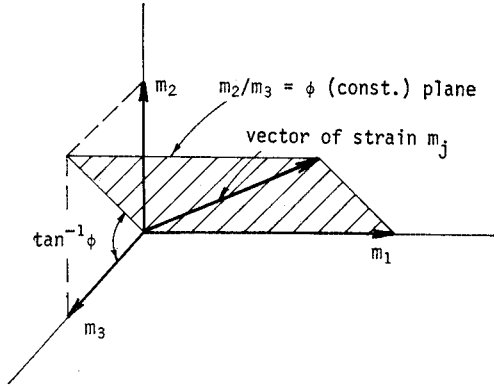


図-2 平面偏波における弾性相のひずみ場

する。それによれば、 $\sqrt{\alpha_1}$  は流体相を伝わる 圧縮波の 伝播速度を、 $\sqrt{\beta_1}$  は弾性相を伝わる 圧縮波の 伝播速度を、 $\sqrt{r_1}$  は弾性相を伝わるせん断波の 伝播速度になることがわかってから、有限変形の問題においても  $\lambda_1$  は流体相を伝わる 圧縮波の 伝播速度を、 $\lambda_2$  は弾性相を伝わる 圧縮波の 伝播速度を、 $\lambda_3, \lambda_5$  は弾性相を伝わるせん断波の 伝播速度を表わすものと考えることができる。なお、 $\lambda_5^2$  をひずみの 2 次のオーダーで表示すると次式となる。

$$\lambda_5^2 = \alpha_1 + \frac{2}{\alpha_{011}} (e_{12}m_1 + d_{21}n_1 + e_{22}m_1^2 + d_{22}n_1^2 + 2b_4M + d_{31}m_1n_1) \dots\dots\dots(64)$$

式 (61) ならびに式 (64) を比較すると、ひずみエネルギーをひずみの 3 次以上のオーダーまで展開した場合には、 $\lambda_3^2$  と  $\lambda_5^2$  の値は一致しなくなり、弾性相中を伝わるせん断波が 2 組存在することが明らかになる。

式 (61) の  $\lambda_i^2$  ( $i=1, 2, 3$ ) を式 (55), (56) に代入し式 (57) を考慮すれば次式をうる。

$$\frac{dm_2}{dm_1} = \frac{m_2(h_{0i} + h_{1i}m_1 + h_{2i}n_1)}{g_{0i} + g_{1i}m_1 + g_{2i}n_1 + g_{3i}m_1^2 + g_{4i}n_1^2 + g_{5i}m_1n_1 + g_{6i}m_2^2} \dots\dots\dots(65)$$

$$\frac{dm_2}{dm_1} = \frac{m_2(h_{0i} + h_{1i}m_1 + h_{2i}n_1)}{k_{0i} + k_{1i}m_1 + k_{2i}n_1 + k_{3i}m_1^2 + k_{4i}n_1^2 + k_{5i}m_1n_1 + k_{6i}m_2^2} \dots\dots\dots(66)$$

$$\frac{dn_1}{dm_1} = \frac{k_{0i} + k_{1i}m_1 + k_{2i}n_1 + k_{3i}m_1^2 + k_{4i}n_1^2 + k_{5i}m_1n_1 + k_{6i}m_2^2}{g_{0i} + g_{1i}m_1 + g_{2i}n_1 + g_{3i}m_1^2 + g_{4i}n_1^2 + g_{5i}m_1n_1 + g_{6i}m_2^2} \dots\dots\dots(67)$$

ここに、 $g_{0i}, g_{1i}, \dots, g_{6i}, k_{0i}, k_{1i}, \dots, k_{6i}, h_{0i}, h_{1i}, h_{2i}$  は  $\lambda_i^2$  を式 (55), (56) に代入したときに求まる係数で、式 (13) で定義した質量係数ならびに式 (61) で定義され

る  $\lambda_i^2$  の展開項の係数からなる複雑な関数で、付録の式 (C-1)~(C-4) で与えられるものである。

式 (65), (66), (67) は非線形の連立常微分方程式であり、このままでは積分は簡単にはできず、一般的な傾向はつかめない。いま、ひずみエネルギーの展開を 3 次のオーダーまでとすれば、これら 3 式は次式のように書きなおせる。

$$\frac{dm_2}{dm_1} = \frac{h_{0i}m_2}{g_{0i} + g_{1i}m_1 + g_{2i}n_1} \dots\dots\dots(68)$$

$$\frac{dm_2}{dn_1} = \frac{h_{0i}m_2}{k_{0i} + k_{1i}m_1 + k_{2i}n_1} \dots\dots\dots(69)$$

$$\frac{dn_1}{dm_1} = \frac{k_{0i} + k_{1i}m_1 + k_{2i}n_1}{g_{0i} + g_{1i}m_1 + g_{2i}n_1} \dots\dots\dots(70)$$

いま変形が小さい場合を考えると、

$$\left. \begin{aligned} g_{0i} &\gg g_{1i}m_1 + g_{2i}n_1 \\ k_{0i} &\gg k_{1i}m_1 + k_{2i}n_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(71)$$

が成立すると考えられるから、式 (70) は次式のように表わされる。なお以下式 (79) までに対して総和規約は用いない。

$$\frac{dn_1}{dm_1} = \frac{k_{0i}}{g_{0i}} + \left( \frac{k_{1i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{1i}}{g_{0i}^2} \right) m_1 + \left( \frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{2i}}{g_{0i}^2} \right) n_1 + \dots\dots\dots(72)$$

この式を積分し  $n_1 \sim m_1$  の関係を求めると次式のようになる。

$$n_1 = A_i + B_i m_1 + O(m_1^2) \dots\dots\dots(73)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_i &= C_0 - \left\{ \frac{k_{0i}}{g_{0i}} \left( \frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{2i}}{g_{0i}^2} \right) + \frac{k_{1i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{1i}}{g_{0i}^2} \right\} / \left( \frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{2i}}{g_{0i}^2} \right)^2 \\ B_i &= C_0 \left( \frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}k_{2i}}{g_{0i}^2} \right) + \left( \frac{k_{1i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{1i}}{g_{0i}^2} \right) / \left( \frac{k_{0i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{2i}}{g_{0i}^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(74)$$

であり、 $C_0$  は積分定数である。なお式 (71)<sub>1</sub> の条件が成立するためには少なくとも次式が成立しなければならない。

$$g_{0i} \gg g_{2i}A_i \dots\dots\dots(75)$$

式 (73) を式 (68) に代入し、式 (71), (57) を考慮すれば次式をうる。

$$m_2 = B_0 \left[ 1 + \left( \frac{h_{0i}}{g_{0i}} - \frac{h_{0i}g_{2i}}{g_{0i}^2} A_i \right) m_1 + O(m_1^2) \right] \dots\dots(76)$$

$$m_3 = \frac{B_0}{\phi} \left[ 1 + \left( \frac{h_{0i}}{g_{0i}} - \frac{h_{0i}g_{2i}}{g_{0i}^2} A_i \right) m_1 + O(m_1^2) \right] \dots\dots(77)$$

ここに、 $B_0$  は積分定数である。

式 (68), (69), (70) は  $n_1, m_1, m_2, m_3$  がいずれか 1 つの関数として表示されることを示している。式 (73), (76), (77) は  $n_1, m_2, m_3$  を  $m_1$  の関数として表示したものである。同様な手法を用いれば他の場合についても計



算することができる。一方、式(46)の条件を満たす特性曲線は直線となり、特性曲線上では  $n_1, m_1, m_2, m_3$  は一定値になるから(付録A参照)、境界条件として流体相あるいは弾性相の圧縮ひずみ、弾性相のせん断ひずみのいずれかが与えられれば、 $X_1-t$  平面内の変形はすべて求まることになる。

いま、境界条件として与えられる境界上のひずみ相互間に次のような条件が与えられる場合を考える。

$$m_1=0 \text{ のとき } n_1=0, m_2=0, m_3=0 \dots\dots(78)$$

ここで、式(73),(76),(77)を考えれば、 $n_1=n_1(m_1)$ ,  $m_2=m_2(m_1)$ ,  $m_3=m_3(m_1)$  であるから、式(78)は  $n_1(0)=m_2(0)=m_3(0)=0$  であることを意味している。この場合には、式(73),(74),(76),(77)より積分定数  $B_0, C_0$  の値が次式のように与えられる。

$$C_0 = \left\{ \frac{k_{0i}}{g_{0i}} \left( \frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{2i}}{g_{0i}^2} \right) + \frac{k_{1i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{1i}}{g_{0i}^2} \right\} \left/ \left( \frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i}g_{2i}}{g_{0i}^2} \right)^2 \right. \dots\dots(79)$$

$$B_0=0 \dots\dots\dots(80)$$

式(79),(80)が成立する場合は、式(76),(77)より  $m_2 \equiv m_3 \equiv 0$  が求まる。これは境界上でせん断ひずみが  $m_1$  に独立に作用しなければ、 $X_1-t$  平面の全領域においてせん断ひずみが発生しないことを示している。すなわち、非線形物体においても圧縮波が独立に存在できることを示し、著者らが行なった圧縮波の伝播に関する研究結果と一致する<sup>22)</sup>。

また、境界上のひずみ相互間に次のような条件が与えられる場合を考える。

$$m_1=0 \text{ のとき } n_1=0, m_2 \neq 0, m_3 \neq 0 \dots\dots(81)$$

この場合、 $C_0$  は式(79)と同じであるが

$$B_0 \neq 0 \dots\dots\dots(82)$$

をうる。したがって、式(76),(77)は  $m_2=B_0+f(m_1)$ ,  $m_3=B_0/\phi+g(m_1)$  となり、 $m_2, m_3$  には  $m_1$  に独立な項がある。これは境界上で  $m_1$  が0であっても、 $X_1-t$  平面の全領域で  $m_1$  が恒等的に0にならないことを表わすもので、非線形物体ではせん断波が独立に存在できないことを示している。

## 5. む す び

この論文は飽和土中を伝わる非線形波動の性質を調べるため、実体波を対象とし、土を流体と弾性体の混合体と考え、このような物体中を伝播する simple wave の特性を調べることを試みたものである。まず弾性相と流体相からなる2相系の運動方程式をラグランジュの運動方程式を用い基準座標系で表示した。次に、こうして得た方程式系が完全双曲形になるための条件を求めた。こ

の場合には simple wave 解が存在するので、その伝播形態について考察した結果次のようなことが明らかになった。

(1) 弾性流体で飽和された多孔質超弾性体中を伝播する simple wave は、正ならびに負の方向へ同じ速度で伝播する波動を1組のものと考えれば、4組存在する。それらは流体相中を伝わる1組の圧縮波、弾性相中を伝わる1組の圧縮波と2組のせん断波から構成されている。

(2) 波動の伝播形態には2種類あり、円偏波と平面偏波とからなっている。前者の形で伝播するのは弾性相中を伝播するせん断波の1組であり、残りの3組は後者の形で伝播する。

(3) 適当な境界条件が与えられると、流体相と弾性相を伝わる圧縮波はせん断変形をとともわずに伝播でき、非線形性を有する物体中でも圧縮波が独立に存在できる。これに反し、どんな境界条件のもとでも、弾性相中を伝わるせん断波はかならず流体相あるいは弾性相に体積変化を発生させるから、非線形性を有する物体中ではせん断波は独立に存在できない。

以上、simple wave の伝播形態についての結論を述べたが、混合体中を伝播する波動をもっと詳しく研究するためには、系を支配する方程式系が熱力学的条件を含んだものになっており、かつそのような方程式系の弱い解、衝撃解ならびに不連続解などについての研究を進めていかねばならない。また耐震工学的見地に立てば、非線形双曲形方程式の周期解についての考察も行なわなければならない。今後このような点について研究を行なうつもりである。

最後に本研究における理論式の誘導結果をご検討願った京都大学工学部土木工学教室 小林昭一助教授、ならびに波動の伝播形態について有益なご助言をいただいた京都大学防災研究所 土岐憲三助教授に感謝の念を表わす。また本文は土木学会第26回年次学術講演会(昭和46年)において発表した結果を取りまとめたものであることを付記する。

## 参 考 文 献

- 1) 土質工学会編：土質工学ハンドブック，pp. 292~297，技報堂，昭和40。
- 2) Hardin, B.O., and Black, W.L.: Sand Stiffness under Various Triaxial Stresses, Proc. ASCE, Vol. 92, No. SM 2, pp. 27~42, 1966.
- 3) Hardin, B.O., and Black, W.L.: Vibration Modulus of Normally Consolidated Clay, Proc. ASCE, Vol. 94, No. SM 2, pp. 353~569, 1968.
- 4) Kovacs, W.D., Seed, H.B., and Chan, C.K.: Dynamic Moduli and Damping Ratios for a Soft Clay, Proc. ASCE, Vol. 97, No. SM 1, pp. 59~75, 1971.
- 5) Biot, M.A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency

Range, Jour. Acoust. Soc. Am., Vol. 28, No. 2, pp. 168~178, 1956.

6) Biot, M.A. : Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range, Jour. Acoust. Soc. Am., Vol. 28, No. 2, pp. 178~191, 1956.

7) Truesdell, C. : General and Exact Theory of Waves in Finite Elastic Strain, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 8, No. 4, pp. 263~296, 1961.

8) Coleman, B.D., Gurtin, M.E. and I. Herrera, R. : I. The Velocity of One-Dimensional Shock and Acceleration Waves, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 1~19, 1965.

9) Coleman, B.D. and Gurtin, M.E. : II. On the Growth and Decay of One-Dimensional Acceleration Waves, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 239~265, 1965.

10) Coleman, B.D. and Gurtin, M.E. : III. Thermodynamic Influence of the Growth and Decay of Acceleration Waves, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 266~298, 1965.

11) Coleman, B.D. and Gurtin, M.E. : IV. Thermodynamics and the Velocity of General Acceleration Waves, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 317~338, 1965.

12) Coleman, B.D., Greenberg, J.M. and Gurtin, M.E. : V. On the Amplitude of Acceleration Waves and Mild Discontinuities, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 22, pp. 333~354, 1968.

13) Lax, P. : Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 10, pp. 537-566, 1957.

14) Bland, D.R. : Dilatational Waves and Shocks in Large Displacement Isentropic Dynamic Elasticity, Jour. Mech. Phys. Solids, Vol. 12, pp. 245~267, 1964.

15) Bland, D.R. : Plane Isentropic Large Displacement Simple Waves in a Compressible Elastic Solid-ZAMP, Vol. 16, pp. 752~769, 1965.

16) Collins, W.D. : One-Dimensional Non-linear Wave Propagation in Incompressible Elastic Materials, Quart. Jour. Mech. and Appl. Math., Vol. XIX, Pt. 3, pp. 259~328, 1966.

17) Howard, I.C. : Finite Simple Waves in a Compressible Transversely Isotropic Elastic Solid, Quart. Jour. Mech. Appl. Math., Vol. XIX, Pt. 3, pp. 329~341, 1966.

18) Truesdell, C. : The Nonlinear Field Theories in Mechanics, Topics in Nonlinear Physics, Proc. Physics Session International School of Nonlinear Mathematics and Physics, Munich 1966, Springer-Verlag, pp. 138~139, pp. 160~169, 1968.

19) Eringen, A.C. : Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, 1962.

20) Jeffrey, A. and Taniuti, T. : Non-Linear Wave Propagation with Application to Physics and Magnetohydrodynamics, Academic Press, 1964.

21) 柴田 徹・佐藤忠信・三浦 克：砂質土の構成式に関する考察—非線形弾性論の立場から—, 第6回土質工学研究発表講演概要, pp. 185~188, 1971.

22) 後藤尚男・佐藤忠信：非線形多孔質弾性体中を伝わる圧縮波の伝播速度について, 昭和46年度土木学会関西支部年次学術講演会概要, pp. I-52-1~I-55-2, 1971.

23) 佐藤忠信：飽和した非線形多孔質弾性体中を伝わる波動の simple wave 解について, 土木学会第26回年次学術講演会講演集, 第1部, pp. 197~200, 1971.

【付録 A】 特性曲線法による双曲形方程式の解法

いま, 従属変数  $u_j(j=1, 2, \dots, n)$  が次の1階連立偏微分方程式を満たすものとする。

$$\sum_j^n l_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + m_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial a} = c_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(A-1)$$

ここに,  $l_{ij}, m_{ij}, c_i$  は独立変数  $t, a$  ならびに従属変数  $u_j$  の関数である。ただし  $u_i$  の微分形は含まない。このような方程式は準線形方程式と呼ばれる。この方程式系の特性曲線の勾配  $\lambda = da/dt$  はマトリックス  $[m_{ij} - \lambda l_{ij}]$  の行列式を0とする次式によって与えられる。

$$|m_{ij} - \lambda l_{ij}| = 0 \quad \dots\dots\dots(A-2)$$

ここで, 式(24)の解として  $u_j$  が1個の補助変数  $\theta$  の関数  $u_j = u_j(\theta)$  となるような場合について考えると,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = u_j' \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial a} = u_j' \frac{\partial \theta}{\partial a},$$

$$\text{ただし } u_j' \equiv \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \quad \dots\dots\dots(A-3)$$

をうる。式(A-3)を式(A-1)に代入すると次式をうる。

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} u_j' \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{j=1}^n m_{ij} u_j' \frac{\partial \theta}{\partial a} = c_i \quad \dots\dots(A-4)$$

式(A-4)の任意の  $i$  番目の式の特性曲線の勾配  $\mu$  は次式で与えられる。

$$\mu = \frac{da}{dt} = \frac{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j'}{\sum_{j=1}^n l_{ij} u_j'} \quad \dots\dots\dots(A-5)$$

式(A-4)はすべての  $i$  に対して成立するから, 式(A-5)もすべての  $i$  に対して成立し, したがって次式をうる。

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} - \mu l_{ij}) u_j' = 0 \quad \dots\dots\dots(A-6)$$

上式が  $u_j' \equiv 0$  以外に解をもつためには次式が成立しなければならない。

$$|m_{ij} - \mu l_{ij}| = 0 \quad \dots\dots\dots(A-7)$$

式(A-2)と式(A-7)は同じ式であるから,  $\lambda$  と  $\mu$  は一対一に対応する。

一方,  $t-a$  平面内の任意の曲線に沿って次式が成立する。

$$dt \frac{\partial \theta}{\partial t} + da \frac{\partial \theta}{\partial a} = d\theta \quad \dots\dots\dots(A-8)$$

式(A-4)と式(A-8)が1つの特性曲線に一致するためには次式が成立すればよい。

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\sum_{j=1}^n l_{ij} u_j'}{c_i} \quad \dots\dots\dots(A-9)$$

式(A-6), (A-7)より  $u_j'$  は特異マトリックス  $[m_{ij}$

$-\lambda l_{ij}$  の固有ベクトルであり、かつ各  $\lambda$  の値に対して 1 個の任意定数を含む形で求めることができる。この固有ベクトルが式 (A-4) の固有ベクトルに一致するためには、式 (A-9) の右辺がすべての  $i$  に対して同じ値をもたなければならない。このような場合の解が simple wave と呼ばれる。

式 (A-1) の右辺の  $c_i$  がすべての  $i$  に対して 0 である場合には、 $n$  個の  $\lambda$  のおのおのに対し、 $d\theta=0$  とおくことにより式 (A-9) が成立する。すなわち、特性曲線上では  $\theta=\text{const.}$  となる。したがって、 $u_i=u_i(\theta)$  もまた特性曲線上で一定となる。これより、式 (A-1) が完全双曲形\*で同次形の場合には  $n$  個の simple wave が存在することになる。

$l_{ij}$  ならびに  $m_{ij}$  が  $u_i$  の関数で  $t$  ならびに  $a$  に陽に関係しないときには、 $l_{ij}$  と  $m_{ij}$  は  $\theta$  のみの関数と

なり、式 (A-2) より  $\lambda$  も  $\theta$  のみの関数となる。特性曲線上で  $\theta$  が一定ならば  $\lambda$  も一定値となる。したがって、各 simple wave の特性曲線は直線となり、その直線上で  $u_i$  は一定値を取るようになる。

$u_j'$  がマトリックス  $[m_{ij}-\lambda l_{ij}]$  の固有ベクトルであることから、 $u_j'$  は  $[m_{ij}-\lambda l_{ij}]$  のすべてが 0 でない余因子行列式に比例することになる。したがって、simple wave はその特性曲線上で従属変数の間に次の関係式が成立する。

$$\frac{du_1}{A_{i1}} = \frac{du_2}{A_{i2}} = \dots = \frac{du_n}{A_{in}} \dots\dots\dots (A-10)$$

ここに、 $A_{ij}$  は  $m_{ij}-\lambda l_{ij}$  の  $i$  行の余因子行列式を表わしている。式 (A-10) は  $(n-1)$  個の独立な関係を与える。すなわち、すべての従属変数はその中の 1 つによって表示できることになる。

**【付録 B】**

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \left( \frac{a_2}{\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{f_2}{\rho_{22}} \right) + \sqrt{\left( \frac{a_2}{\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{f_2}{\rho_{22}} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2)} \right\} \\ \beta_1 &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \left( \frac{a_2}{\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{f_2}{\rho_{22}} \right) - \sqrt{\left( \frac{a_2}{\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{f_2}{\rho_{22}} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2)} \right\} \\ r_1 &= \frac{2b_2}{\alpha\rho_{11}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B-1)$$

$$\alpha_2 = \frac{C_2 - \alpha_1 B_2 + \alpha_1^2 A_2}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)}, \quad \beta_2 = \frac{C_2 - \beta_1 B_2 + \beta_1^2 A_2}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)}, \quad r_2 = \frac{C_2 - r_1 B_2 + r_1^2 A_2}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} \dots\dots\dots (B-2)$$

$$\alpha_3 = \frac{C_3 - \alpha_1 B_3 + \alpha_1^2 A_3}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)}, \quad \beta_3 = \frac{C_3 - \beta_1 B_3 + \beta_1^2 A_3}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)}, \quad r_3 = \frac{C_3 - r_1 B_3 + r_1^2 A_3}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} \dots\dots\dots (B-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{C_4 - \alpha_1 B_4 + \alpha_1^2 A_4}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_2 r_2}{\alpha_1 - r_1} \\ \beta_4 &= \frac{C_4 - \beta_1 B_4 + \beta_1^2 A_4}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)} + \frac{\beta_2 \alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\beta_2 r_2}{\beta_1 - r_1} \\ r_4 &= \frac{C_4 - r_1 B_4 + r_1^2 A_4}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} + \frac{r_2 \alpha_2}{r_1 - \alpha_1} + \frac{r_2 \beta_2}{r_1 - \beta_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B-4)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_5 &= \frac{C_5 - \alpha_1 B_5 + \alpha_1^2 A_5}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)} + \frac{\alpha_3 \beta_3}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_3 r_3}{\alpha_1 - r_1} \\ \beta_5 &= \frac{C_5 - \beta_1 B_5 + \beta_1^2 A_5}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)} + \frac{\beta_3 \alpha_3}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\beta_3 r_3}{\beta_1 - r_1} \\ r_5 &= \frac{C_5 - r_1 B_5 + r_1^2 A_5}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} + \frac{r_3 \alpha_3}{r_1 - \alpha_1} + \frac{r_3 \beta_3}{r_1 - \beta_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B-5)$$

$$\alpha_6 = \frac{C_6 - \alpha_1 B_6 + \alpha_1^2 A_6}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)}, \quad \beta_6 = \frac{C_6 - \beta_1 B_6 + \beta_1^2 A_6}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)}, \quad r_6 = \frac{C_6 - r_1 B_6 + r_1^2 A_6}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} \dots\dots\dots (B-6)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_7 &= \frac{C_7 - \alpha_1 B_7 + \alpha_1^2 A_7}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)} + \frac{\alpha_3 r_2 + \alpha_2 r_3}{\alpha_1 - r_1} + \frac{\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3}{\alpha_1 - \beta_1} \\ \beta_7 &= \frac{C_7 - \beta_1 B_7 + \beta_1^2 A_7}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)} + \frac{\beta_3 r_2 + \beta_2 r_3}{\beta_1 - r_1} + \frac{\beta_2 \alpha_3 + \alpha_2 \beta_3}{\beta_1 - \alpha_1} \\ r_7 &= \frac{C_7 - r_1 B_7 + r_1^2 A_7}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} + \frac{r_3 \beta_2 + r_2 \beta_3}{r_1 - \beta_1} + \frac{r_2 \alpha_3 + \alpha_2 r_3}{r_1 - \alpha_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B-7)$$

なお、式 (B-2)~(B-7) に出てくる  $A_i, B_i, C_i$  ( $i=2, 3, \dots, 7$ ) は次式で与えられる。

\* 式 (A-1) が完全双曲形になるのは、式 (A-2) の  $n$  個の根がすべて独立な場合である。

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \alpha \left\{ \frac{6a_3}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{21} + \frac{2c_{12}}{\rho_{22}} + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \right\} \\
 B_2 &= \left[ \frac{2b_2}{\rho_{11}} \left( \frac{6a_3}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{21} + \frac{c_{12}}{\rho_{22}} \right) + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \left( \frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2c_2 + 12a_3f_2 + 4c_{11}c_{21}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{B-8}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \left[ \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2) + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2c_{12} + 12a_3f_2 + 4c_{11}c_{21}) \right] \\
 A_3 &= \alpha \left\{ \frac{2c_{21}}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{12} + \frac{12f_3}{\rho_{22}} + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \right\} \\
 B_3 &= \left[ \frac{2b_2}{\rho_{11}} \left( \frac{2c_{21}}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{12} + \frac{12f_3}{\rho_{22}} \right) + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \left( \frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (4f_2c_{21} + 12a_2f_3 + 4c_{11}c_{12}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{B-9}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \left[ \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2) + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4f_2c_{21} + 12a_2f_3 + 4c_{11}c_{12}) \right] \\
 A_4 &= \alpha \left\{ \frac{12a_4}{\rho_{11}} - \frac{6\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{31} + \frac{2c_{22}}{\rho_{22}} + \frac{2e_{22}}{\rho_{11}} \right\} \\
 B_4 &= \left[ \frac{2b_2}{\rho_{11}} \left( \frac{12a_4}{\rho_{11}} - \frac{6\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{31} + \frac{2c_{22}}{\rho_{22}} \right) + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \left( \frac{6a_3}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{22}\rho_{11}} c_{21} + \frac{2c_{12}}{\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e_{22}}{\rho_{11}} \left( \frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{B-10}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \left[ \frac{2e_{22}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2) + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2c_{12} + 12a_3f_2 + 4c_{11}c_{21}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (24f_2a_4 + 4a_2c_{22} + 12a_3c_{21} + 4c_{12}^2 + 6c_{11}c_{13}) \right] \\
 A_5 &= \alpha \left\{ \frac{2c_{22}}{\rho_{11}} - \frac{6\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{13} + \frac{24f_4}{\rho_{22}} + \frac{2d_{22}}{\rho_{11}} \right\} \\
 B_5 &= \left[ \frac{2b_2}{\rho_{11}} \left( \frac{2c_{22}}{\rho_{11}} - \frac{6\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{13} + \frac{24f_4}{\rho_{22}} \right) + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \left( \frac{2c_{21}}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{12} + \frac{12f_3}{\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2d_{22}}{\rho_{11}} \left( \frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{B-11}$$

$$\begin{aligned}
 C_5 &= \left[ \frac{2d_{22}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2) + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4f_2c_{21} + 12a_2f_3 + 4c_{11}c_{12}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (24a_2f_4 + 4f_2c_{22} + 12f_3c_{21} + 4c_{12}^2 + 6c_{11}c_{13}) \right] \\
 A_6 &= \alpha \left\{ \frac{2e_{22}}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} d_{31} + \frac{2d_{22}}{\rho_{22}} + \frac{12b_4}{\rho_{11}} \right\} \\
 B_6 &= \left[ \frac{2b_2}{\rho_{11}} \left( \frac{2e_{22}}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} d_{31} + \frac{2d_{22}}{\rho_{22}} \right) + \frac{12b_4}{\rho_{11}} \left( \frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2d_{22} + 4f_2e_{22} + 2c_{11}d_{31}) - \frac{4}{\rho_{11}^2} e_{12}^2 + \frac{4}{\rho_{11}} \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} e_{12}d_{21} - \frac{4}{\rho_{11}\rho_{22}} d_{21}^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{B-12}$$

$$\begin{aligned}
 C_6 &= \left[ \frac{12b_4}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2) + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2d_{22} + 4f_2e_{22} + 2c_{11}d_{31}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\rho_{11}^2\rho_{22}} (2f_2e_{12}^2 - 4c_{11}e_{12}d_{21} + 2a_2d_{21}^2) \right] \\
 A_7 &= \alpha \left\{ \frac{6c_{31}}{\rho_{11}} - \frac{8\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{22} + \frac{6c_{13}}{\rho_{22}} + \frac{6d_{31}}{\rho_{11}} \right\} \\
 B_7 &= \left[ \frac{2b_2}{\rho_{11}} \left( \frac{6c_{31}}{\rho_{11}} - \frac{8\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{22} + \frac{6c_{13}}{\rho_{22}} \right) + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \left( \frac{2c_{21}}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{12} + \frac{12f_3}{\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \left( \frac{6a_3}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{21} + \frac{2c_{12}}{\rho_{22}} \right) + \frac{2d_{31}}{\rho_{11}} \left( \frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (12a_2c_{13} + 12f_2c_{31} + 36a_3f_3 + 12c_{12}c_{21}) \right] \\
 C_7 &= \left[ \frac{2d_{31}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2) + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2c_{12} + 12c_3f_2 + 4c_{11}c_{21}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{B-13}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{2 e_{12}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11} \rho_{22}} (4 f_2 c_{21} + 12 a_3 f_3 + 4 c_{11} c_{12}) + \frac{2 b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11} \rho_{22}} \\ & \cdot (12 a_2 c_{13} + 12 f_2 c_{31} + 12 c_{12} c_{11}) \end{aligned} \right\}$$

## 【付録 C】

いま、付録 B で定義した  $\alpha_j, \beta_j, \tau_j$  ( $j=1, 2, \dots, 7$ ) を次に定義するような変数におきかえる。

$$\delta_{j1} = \alpha_j, \delta_{j2} = \beta_j, \delta_{j3} = \tau_j \quad (j=1, 2, \dots, 7) \dots\dots\dots (C-1)$$

式 (C-1) を用いて、本文中の式 (65)~(67) に現われる定数  $g_{0i}, g_{1i}, \dots, g_{6i}, k_{0i}, k_{1i}, \dots, k_{6i}, h_{0i}, h_{1i}, h_{2i}$  は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} g_{0i} &= \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \delta_{1i}^2 - \frac{1}{\rho_{11}} \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 b_2 + \alpha c_{11} \right) + \frac{1}{\rho_{11}^2} b_2 c_{11} \\ g_{1i} &= 2 \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \delta_{1i} \delta_{2i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 e_{22} + 3 \alpha c_{21} \right) \delta_{1i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{2i} \\ & \quad + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2 b_2 c_{21} + e_{12} c_{11}) \\ g_{2i} &= 2 \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \delta_{1i} \delta_{3i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 d_{21} + 2 \alpha c_{12} \right) \delta_{1i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{3i} \\ & \quad + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2 b_2 c_{12} + d_{21} c_{11}) \\ g_{3i} &= \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (\delta_{2i}^2 + 2 \delta_{1i} \delta_{4i}) - \frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 e_{22} + 3 \alpha c_{31} \right) \delta_{1i} + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 e_{12} + 2 \alpha c_{21} \right) \delta_{2i} \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{4i} \right\} + \frac{1}{\rho_{11}^2} (3 b_2 c_{31} + e_{22} c_{11} + e_{12}^2) \\ g_{4i} &= \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (\delta_{3i}^2 + 2 \delta_{1i} \delta_{5i}) - \frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 d_{22} + 3 \alpha c_{12} \right) \delta_{1i} + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 d_{21} + 2 \alpha c_{12} \right) \delta_{3i} \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{5i} \right\} + \frac{1}{\rho_{11}^2} (3 b_2 c_{13} + d_{22} c_{11} + d_{21}^2) \\ g_{5i} &= \alpha \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (2 \delta_{2i} \delta_{3i} + 2 \delta_{1i} \delta_{7i}) - \frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 d_{31} + 4 \alpha c_{22} \right) \delta_{1i} + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 d_{21} + 2 \alpha c_{12} \right) \delta_{2i} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 e_{12} + 2 \alpha c_{21} \right) \delta_{3i} + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{7i} \right\} \right) \\ & \quad + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2 e_{12} c_{12} + 2 d_{21} c_{21} + d_{31} c_{11} + 4 b_2 c_{22}) \\ g_{6i} &= \left[ 2 \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \delta_{1i} \delta_{6i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 12 b_4 + \alpha d_{31} \right) \delta_{1i} + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 b_2 + \alpha c_{11} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\rho_{11}^2} (b_2 d_{31} + 2 b_4 c_{11} - 8 a_2 b_2 - e_{12} d_{21}) \right] (1 + \phi^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (C-2)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{0i} &= -\alpha \delta_{1i}^2 + \frac{1}{\rho_{11}} (2 \alpha a_2 + b_2) \delta_{1i} - \frac{1}{\rho_{11}^2} 2 a_2 b_2 \\ k_{1i} &= -2 \alpha \delta_{1i} \delta_{2i} + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (6 \alpha a_3 + 2 e_{12}) \delta_{1i} + (2 \alpha a_2 + 2 b_2) \delta_{2i} \} - \frac{1}{\rho_{11}^2} (6 b_2 a_3 + 2 a_2 e_{12}) \\ k_{2i} &= -2 \alpha \delta_{1i} \delta_{3i} + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (2 \alpha c_{21} + 2 d_{21}) \delta_{1i} + (2 \alpha a_2 + 2 b_2) \delta_{3i} \} - \frac{1}{\rho_{11}^2} (2 b_2 c_{21} + 2 a_2 d_{21}) \\ k_{3i} &= -\alpha (\delta_{2i}^2 + 2 \delta_{1i} \delta_{4i}) + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (12 \alpha a_4 + 2 e_{22}) \delta_{1i} + (2 \alpha a_2 + 2 b_2) \delta_{4i} + (6 \alpha a_3 + 2 e_{12}) \delta_{2i} \} \\ & \quad - \frac{1}{\rho_{11}^2} (12 b_2 a_4 + 2 a_2 e_{22} + 6 a_3 e_{12}) \\ k_{4i} &= -\alpha (\delta_{3i}^2 + 2 \delta_{1i} \delta_{5i}) + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (2 \alpha c_{22} + 2 d_{22}) \delta_{1i} + (2 \alpha a_2 + 2 b_2) \delta_{5i} + (2 \alpha c_{21} + 2 d_{21}) \delta_{3i} \} \\ & \quad - \frac{1}{\rho_{11}^2} (12 b_2 a_4 + 2 a_2 e_{22} + 6 a_3 e_{12}) \\ k_{5i} &= -2 \alpha (\delta_{2i} \delta_{3i} + \delta_{1i} \delta_{7i}) + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (6 \alpha c_{31} + 2 d_{31}) \delta_{1i} + 2 (\alpha a_2 + b_2) \delta_{7i} + 2 (3 \alpha a_3 + e_{12}) \delta_{3i} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (C-3)$$

$$\begin{aligned}
& +2(\alpha c_{21} + d_{21})\delta_{2i}\} - \frac{1}{\rho_{11}^2} (6 b_2 c_{31} + 2 a_2 d_{31} + 6 a_3 d_{21} + 2 e_{12} c_{21}) \\
k_{6i} = & \left[ -2 \alpha \delta_{1i} \delta_{6i} + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (2 \alpha e_{22} + 12 b_4) \delta_{1i} + 2(\alpha a_2 + b_2) \delta_{6i} \} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\rho_{11}^2} 2(b_2 e_{22} + 2 a_2 b_4 + 4 b_4 a_2 - e_{12}^2) \right] (1 + \phi^2) \\
h_{0i} = & -\frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} e_{12} - d_{21} \right) \delta_{1i} - \frac{1}{\rho_{11}} (e_{12} c_{11} - 2 d_{21} a_2) \right\} \\
h_{1i} = & -\frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2 e_{22} - d_{31} \right) \delta_{1i} + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} e_{12} - d_{21} \right) \delta_{2i} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\rho_{11}} 2(e_{12} c_{21} + e_{22} c_{11} - 3 d_{21} a_3 - d_{31} a_2) \right\} \\
h_{2i} = & -\frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} d_{31} - 2 d_{22} \right) \delta_{1i} + \left( \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} e_{12} - d_{21} \right) \delta_{3i} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\rho_{11}} (2 e_{12} c_{12} + d_{13} c_{11} - 2 d_{21} c_{21} - 4 d_{22} a_2) \right\}
\end{aligned}
\tag{C-4}$$

(1972.6.15・受付)