

自由地下水面をもつ半無限領域内の  
円形暗きよの取水量についてUNCONFINED FLOW INTO INFILTRATION GALLERIES  
IN SEMI-INFINITE HOMOGENEOUS SOIL杉 尾 哲\*  
By Satoru Sugio

## 1. まえがき

自由地下水面をもつ、均一な透水性の半無限浸透領域に、円形の集水暗きよを埋設して、地下水を取水する場合を考える。暗きよによる取水開始前に、水平な直線であった自由地下水面は、取水を行なうことによって、暗きよ付近が局部的に低下した曲線になる。この自由地下水面は、毛管上昇帯を通る流れを無視すれば、最も上側の流線であり、自由地下水面より下の部分が暗きよに対する浸透領域である。したがってこの場合には、地面上に湛水がある場合<sup>1,2)</sup>とは異なり、暗きよ取水量だけでなく、浸透領域の形そのものが解析の対象になる。

これまでの研究として、暗きよ内水位が暗きよ中心と一致している場合の Hooghoudt による近似解、あるいは暗きよがちょうど滴流している、さらに暗きよ頂部に自由地下水面が達している場合の Van deemter による厳密解などがあるが<sup>3,4)</sup>、これらは暗きよ内水圧が特定の場合の解であり、暗きよ内水圧が任意の値の場合には適用できなかった。

本論文は、半無限浸透領域内に暗きよが1個埋設された場合と、同じ深さの位置に、同規模の暗きよが多数並列された場合とについて、暗きよ内が満水状態と未満水状態における解を複素ポテンシャル理論により導いた。この結果より、満水状態では種々の暗きよ内水圧の場合、および未満水状態では種々の暗きよ内水位の場合の暗きよ取水量と自由地下水面の形状などを求め、これを粘性流体を用いた Hele-Shaw モデル実験によって検証した。

## 2. 基礎式

図-1 に示すような流れの場の、任意点  $(x, y)$  にお

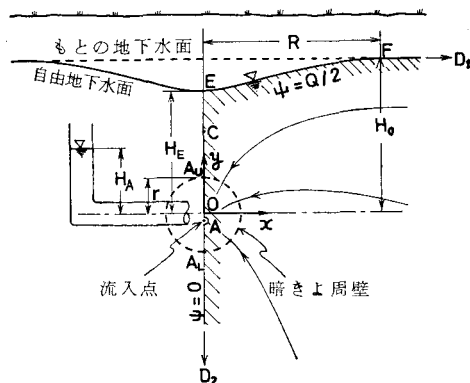


図-1 暗きよが1個の場合の  $z$  平面

ける速度ポテンシャル  $\phi$  は、その点の圧力を  $p$ 、透水係数を  $k$ 、水の単位体積重量を  $w$  とすると、

$$\phi = k \left\{ \frac{p}{w} + y \right\} \dots \dots \dots (1)$$

で表わされる。いま図-1の自由地下水面の速度ポテンシャルを求めると、 $p = p_a$  (大気圧) = 0 より、 $\phi = ky$  となる。したがって  $\theta_1 = \phi - ky$  で表わされる Zhukovsky 関数<sup>5)</sup>を用いると、 $z$  平面で曲線をなす自由地下水面が、 $\theta$  平面では  $\theta_1 = 0$  の直線で表わされることになる。また  $\theta_1$  の共役関数として、流れ関数  $\psi$  を用いて  $\theta_2 = \psi + kx$  とおくと、 $\theta_1$  と  $\theta_2$  は直交条件を満足し、ともに Laplace の式を満足する。ここに

$$W = \phi + i\psi, \quad z = x + iy \quad \text{より}$$

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = W + ikz \dots \dots \dots (2)$$

## 3. 暗きよが1個の場合の解析

半無限浸透領域に、円形の集水暗きよを1個埋設して取水する場合の、暗きよ取水量と自由地下水面の形状を検討してみよう。

## (1) 複素ポテンシャル

いま、暗きよ内に流入点を仮想して、暗きよへ向う流

\* 正会員 九州大学助手 工学部水工土木学科

れを流入点へ向う流れにおきかえ、このポテンシャル流の解を用いて暗きょへの流れを解析することにしよう。まず  $z$  平面の座標軸の原点を暗きょの中心点に選び、流入点を A 点とし、流入点への流入量を  $Q'$  とおいて、式 (2) より領域境界上の  $\theta$  の値を求めると、 $D_1FE$  区間で  $\theta_1=0$ 、EA 区間で  $\theta_2=Q'/2$ 、 $AD_2$  区間で  $\theta_2=0$  となる。ここで EA 区間の圧力の変化を考えると、E 点は淀み点であり、E 点の近傍では流速が小さいから、E 点より下のある範囲は、下にゆくにつれて圧力が静水圧分布的に大きくなってゆくと考えられる。また A 点は流入点であるから  $p=-\infty$  である。したがって EA 区間の  $\theta_1$  の値は、E 点付近では下にゆくにつれ増加し、EA 区間の途中で最大値を示した後減少し、A 点で  $\theta_1=-\infty$  となるものと考えられる。

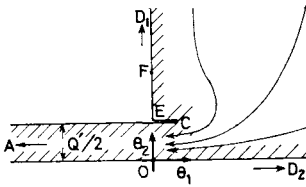


図-2  $\theta$  平面

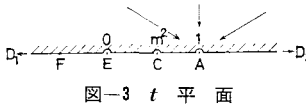


図-3  $t$  平面

この  $\theta_1$  が最大になる点を C 点とすると、図-1 のハッチの部分がか図-2 のようにかける。次に図-2 を図-3 の  $t$  平面の上半面に写像するとき、D 点を無限遠点に、E 点を  $t=0$  に、A 点を  $t=m^2$  に選び、C 点の位置を  $t=m^2$ 、係数を  $M$  とおくと、写像関数は Schwarz-Christoffel の変換式より

$$\theta = M \int \frac{t-m^2}{\sqrt{t \cdot (t-1)}} dt \dots\dots\dots (3)$$

となる。さらに

$$\sqrt{t} = \zeta i \dots\dots\dots (4)$$

とおくと、式 (3) は積分定数を  $C_1$  とするとき、

$$\theta = 2Mi [\zeta - (1-m^2) \cdot \tan^{-1} \zeta] + C_1 \dots\dots\dots (5)$$

となり、式 (4) の変換により、図-3 の実軸上の上半平面は図-4 の 4 半平面に写像される。また同様に、図-1 の左半分領域は、

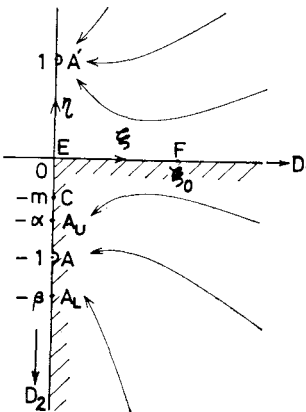


図-4  $\zeta$  平面

図-4 のハッチの部分の左隣に写像されるから、図-1 の流入点への流れが、図-4 の流入点への流れに写像されることになる。この図-4 の流入点への流れは、 $\xi$  軸に関して A 点と対称な位置 A' 点に、A 点と同じ強さの流入点を仮想した、無限領域に流入点が 2 つある場合のポテンシ

ャル流と同じであり、1 つの流入点への流入量を  $Q'$  とおくと、複素ポテンシャルは次式で与えられる。

$$W = (Q'/2\pi) \cdot \ln (\zeta+i)(\zeta-i) + \mu \dots\dots\dots (6)$$

したがって、式 (6) を式 (2)、(5) と連立させれば、 $z$  平面および  $\theta$  平面を媒介平面として、 $t$  平面と  $W$  平面の対応が見つかるから、図-1 の流入点への流れを解くことができる。

### (2) 未知定数の決定

式 (5) に  $\zeta = \xi + i\eta$  を代入して実数部と虚数部にわけると、

$$\theta_1 = -2M(\eta - I_m) + C_1 \dots\dots\dots (7)$$

$$\theta_2 = 2M(\xi - R_e) \dots\dots\dots (8)$$

ここに

$$R_e = -(1-m^2)/2 \cdot \tan^{-1} \{2\xi/(\xi^2 + \eta^2 - 1)\} \dots\dots (9)$$

$$I_m = (1-m^2)/4 \cdot \ln \left[ \frac{\xi^2 + (\eta+1)^2}{\xi^2 + (\eta-1)^2} \right] \dots\dots\dots (10)$$

ここで式 (9) の逆正接の値を、 $AD_2$  線上で 0、EA 線上で  $\pi$  と選ぶと、EA 線上では  $\theta_2=Q'/2$  であるから、式 (8) より  $M_1=Q'/\{2\pi(1-m^2)\}$  をうる。また E 点 ( $\xi=\eta=0$ ) では  $\theta_1=0$  であるから、式 (7) より  $C_1=0$  となる。以上の値を式 (7)、(8) に代入して整理すると、

$$\phi - ky = -\frac{Q'\eta}{\pi(1-m^2)} + \frac{Q'}{4\pi} \cdot \ln \frac{\xi^2 + (\eta+1)^2}{\xi^2 + (\eta-1)^2} \dots\dots\dots (11)$$

$$\psi + kx = \frac{Q'\xi}{\pi(1-m^2)} + \frac{Q'}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 - 1} \dots\dots\dots (12)$$

がえられる。

次に式 (6) を実数部と虚数部にわけると、

$$\phi = (Q'/4\pi) \cdot \ln \left\{ \frac{\xi^2 + (\eta-1)^2}{\xi^2 + (\eta+1)^2} \right\} + \mu \dots\dots\dots (13)$$

$$\psi = (Q'/2\pi) \cdot \tan^{-1} \{2\xi\eta/(\xi^2 - \eta^2 + 1)\} \dots\dots (14)$$

となる。ここで E 点の  $\phi$  の値を求めると、式 (13) より  $\phi = \mu$  となり、E 点の自由地下水面の高さを  $H_E$  とおくと、式 (1) より  $\phi = kH_E$  となるから、 $\mu = kH_E$  である。

### (3) 流入点への流入量 $Q'$

式 (11)~(14) に各点の境界条件を与えて、流入点への流入量の算定式を導いてみよう。

地下水位回復位置 F 点においては、 $\phi = kH_0$ 、 $x=R$ 、 $\psi = Q'/2$ 、 $\eta=0$  であるから、 $\xi = \xi_0$  とおくと、式 (12)、(13) より

$$\frac{2\xi}{1-m^2} + \tan^{-1} \frac{2\xi_0}{\xi_0^2 - 1} = \frac{2\pi k}{Q'} R + \pi \dots\dots\dots (15)$$

$$Q'/(2\pi k) = (H_0 - H_E)/\ln (\xi_0^2 + 1) \dots\dots\dots (16)$$

暗きょ周壁の下端  $A_L$  点においては、 $\phi=kH_A$ ,  $y=-r$ ,  $\xi=0$  であるから、 $\eta=-\beta$  ( $\beta>1$ ) とおくと、式 (11), (13) より

$$\frac{2\beta}{1-m^2} + \ln \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{2\pi k}{Q'} (H_A+r) \dots\dots\dots(17)$$

$$H_E=H_A-Q'/(2\pi k) \cdot \ln(\beta^2-1) \dots\dots\dots(18)$$

暗きょ周壁の上端  $A_U$  点においては、暗きょ内が満水状態と未満水状態とで境界条件が異なるから、それぞれ別個に考える。

まず暗きょ内が満水状態の場合、 $\phi=kH_A$ ,  $y=r$ ,  $\xi=0$  であるから、 $\eta=-\alpha$  ( $\alpha<1$ ) とおくと、式 (11) より

$$\frac{2\alpha}{1-m^2} + \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{2\pi k}{Q'} (H_A-r) \dots\dots\dots(19)$$

式 (13) より

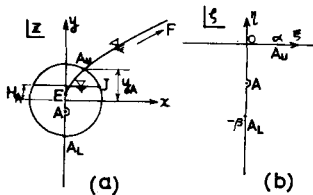
$$H_E=H_A-Q'/(2\pi k) \cdot \ln(1-\alpha^2)$$

となるから、式 (18) と連立させれば

$$\beta^2=2-\alpha^2 \dots\dots\dots(20)$$

がえられる。したがって、暗きょ内が満水状態の場合の流入点への流入量  $Q'$  と地下水面の最低点の高さ  $H_E$  は式 (15), (16), (17), (18), (19), (20) を連立させて、与えられた境界  $H_A$ ,  $r$ ,  $H_0$ ,  $R$  について解いてえられる。

次に暗きょ内が未満水状態の場合には、図一5(a)のように、暗きょ周壁の上端は自由地下水面より上にあって、浸透領域の外に



図一5 暗きょ内が未満水状態の場合の平面の位置は存在しない。そこで暗きょ周壁と自由地下水面との交点を  $A_U$  点と考える。この  $A_U$  点の位置は未知であり、いま  $y=y_A$ ,  $\xi=\alpha$  ( $\alpha\geq 0$ ) とおくと、 $\phi=ky_A$ ,  $\psi=Q'/2$ ,  $x=\sqrt{r^2-y_A^2}$ ,  $\eta=0$  であるから式 (12), (13) より

$$\frac{2\alpha}{1-m^2} + \tan^{-1} \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} = \frac{2\pi k}{Q'} \sqrt{r^2-y_A^2} + \pi \dots\dots\dots(21)$$

$$y_A=Q'/(2\pi k) \cdot \ln(\alpha^2+1) + H_E \dots\dots\dots(22)$$

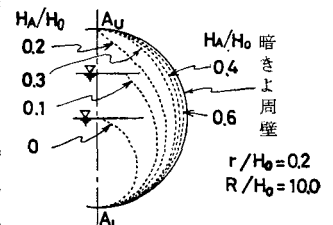
がえられる。したがって暗きょ内が未満水状態の場合の流入点への流入量  $Q'$  などは、式 (15), (16), (17), (18), (21), (22) より求めることになるが、未知数として  $y_A$  が1個増えたために、一般には解は求まらない。しかし、自由地下水面が図一5(a)のJ点を通る場合には、 $A_U$  点の位置が  $y_A=H_A$  と既知であるから、満水状態と同様にして、解を求めることができる。この  $y_A=H_A$  の場合の解を種々求めて検討してみると、境界条件として与えた  $R$  の値が小さいほど、算定式の解の  $m^2$  の値は小さくなり、ある値  $R=R_0$  のとき  $m^2=0$  と

なる。ここに  $C$  点の位置は、その定義より考えて、 $m^2 \geq 0$  であるから、境界条件が  $R<R_0$  の場合には、 $y_A>H_A$  でなければならない。そこで本論文では、 $y_A$  が最小の場合の解を次の方法により求め、これを暗きょ内が未満水の場合の近似解とした。まず式(15), (16), (17), (18), (21), (22) に  $R$  以外の境界条件を与えて  $m^2=0$ ,  $y_A=H_A$  について解き、 $R_0$  の値を求める。ついで境界条件として与えた  $R$  の値が  $R<R_0$  であれば  $m^2=0$  とおき、 $R>R_0$  であれば  $y_A=H_A$  とおいて、再び式 (15), (16), (17), (18), (21), (22) を解くと、暗きょ内が未満水状態での流入点への流入量  $Q'$  と、暗きょ周壁での自由地下水面の高さ  $y_A$  および  $H_E$  (この場合には物理的な意味はない) が求まる。

なお暗きょ内が未満水状態で、自由地下水面が暗きょの位置まで下がらず、 $H_E>r$  となる場合が考えられるが、この場合の解は  $R$  の値が非常に小さい場合にしか存在しないので、本報では検討していない。

(4) 暗きょ取水量  $Q$

以上の解析によってえられた流入点への流入量  $Q'$  が、暗きょ周壁への流入量すなわち暗きょ取水量  $Q$  と、どの程度一致しているか調べてみよう。まず式 (1) より暗きょ周壁上のポテンシャル分布を調べてみると、暗きょ内が満水状態の場合には、暗きょ周壁全体が  $\phi=kH_A$  の等ポテンシャル線であり、未満水状態の場合には、暗きょ内水面より下の部分で  $\phi=kH_A$  の等ポテンシャル線である。いま  $r/H_0=0.2$ ,  $R/H_0=10.0$  の場合について、式 (11)~(14) を用いて流入点のまわりの  $\phi=kH_A$  の等ポテンシャル線を求めてみると、図一6の点線のようになり、いずれも暗きょ周壁より収縮した曲線になっている。したがって、流入点へのポテンシャル流の各流線上では、図一6の点線が暗きょ周壁より収縮している分だけ、実 図一6  $\phi=kH_A$  の等ポテンシャル線際の暗きょ周壁に対するポテンシャル勾配より小さな勾配で流れていることになり、流入点への流入量はその分だけ暗きょ取水量より小さな値を示すことになる。そこで流入点へのポテンシャル流の各流線上において、暗きょ周壁の位置で、与えられた暗きょ周壁の速度ポテンシャルに一致するように補正した場合の流入点への流入量を求めてみよう<sup>2)</sup>。



まず流入点へのポテンシャル流において、暗きょ周壁上の任意点  $P$  の速度ポテンシャルを  $\phi=kH_1$  とし、 $\phi=kH_0$  の位置から  $P$  点までの流線の長さを  $l$  とすれ

ば、P 点における円周方向の単位長さ当りの流入量  $q_t$  は、Darcy 式より

$$q_t = C_0 k (H_0 - H_t) / l = d\psi / r d\theta$$

ここに、 $C_0$  は係数、 $\psi$  は P 点の流れ関数、 $\theta$  は暗きょ中心 O と P 点を結ぶ直線が、直線  $OA_L$  となす角とする。

次に実際の暗きょへの流れにおいて、P 点の速度ポテンシャルを  $\phi = kH_t$  とすると、実際の暗きょ周壁での単位長さ当りの流入量  $q_t$  は

$$q_t = C_0 k (H_0 - H_t) / l$$

ここに、暗きょ内が満水状態の場合  $H_t = H_A$ 、未満水状態の場合は、P 点が暗きょ内水面より下のとき  $H_t = H_A$ 、内水面より上のとき  $H_t = y = -r \cdot \cos \theta$

以上の  $q_1, q_t$  より  $C_0$  を消去すれば

$$q_t = \frac{d\psi}{r d\theta} \frac{H_0 - H_t}{H_0 - H_1}$$

となり、暗きょ周壁の全体からの流入量  $Q$  は、 $q_t$  を円周  $s$  に沿って積分してえられる。

$$Q = 2 \int_{A_U}^{A_L} q_t \cdot ds = 2 \int_0^{\theta_m} \frac{d\psi}{r d\theta} \frac{H_0 - H_t}{H_0 - H_1} \cdot r d\theta \dots\dots\dots(23)$$

ここに、暗きょ内が満水状態のとき、 $\theta_m = \pi$ 、未満水状態のとき

$$\theta_m = \sin^{-1}(y_A / r)$$

この流入量  $Q$  を、求める暗きょ取水量と考える。式 (23) の積分を行なうとき、式中の  $\psi, H_t$  の値は、式 (15) ~ (22) よりえられる流入点への流入量  $Q'$  を用いて、式 (11) ~ (14) より算出できるが、式 (11) ~ (14) が  $\xi, \eta$  を媒介変数として表わされているため、式 (23) の解析的な解をうることはできない。したがって数値積分により求めることにする。すなわち、暗きょ周壁上の各点の  $\psi$  の値をあらかじめ求めておき、この値から数値積分の各分点における  $d\psi / r d\theta$  の値を数値微分によって求め、これに各分点の  $r(H_0 - H_t) / (H_0 - H_1)$  の値を乗じたものを各分点の値として数値積分を行なえば、暗きょ取水量  $Q$  が求まる。

(5) 自由地下水面と流線網

自由地下水面は式 (2) の Zhukovsky 関数によって、 $\zeta$  平面の  $\xi$  軸上に写像されており、毛管上昇帯での浸透を考えなければ、浸透領域の最上部の流線が自由地下水面であるから、式 (11) ~ (13) に  $\eta = 0, \psi = Q' / 2$  を代入すると、次式のような自由地下水面の方程式がえられる。

$$x = \frac{Q'}{2\pi k} \left( \frac{2\xi}{1-m^2} + \tan^{-1} \frac{2\xi}{\xi^2-1} - \pi \right) \dots\dots(24)$$

$$y = \frac{Q'}{2\pi k} \cdot \ln(\xi^2 + 1) + H_E \dots\dots\dots(25)$$

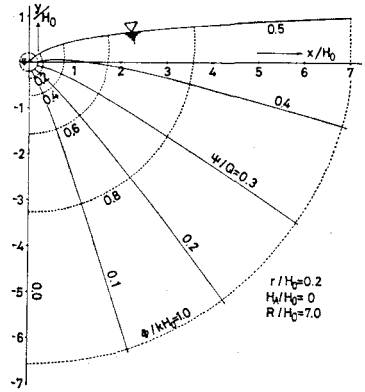


図-1 流線網

したがって、流入点への流入量の算定式より求めた  $Q', H_E$  および  $m$  の値を上式に代入すれば、 $\xi$  を媒介変数として自由地下水面が描かれる。また  $Q', H_E, m$  の値を式 (11) ~ (14) に代入すれば、領域内部の  $\phi, \psi$  の値が  $\xi, \eta$  を媒介として求まるから、これより図-7 のような流線網が描かれる。この図-7 は  $H_A/H_0 = 0, r/H_0 = 0.2, R/H_0 = 7.0$  の場合について求めたものである。なお以上の自由地下水面および流線網は、流入点へのポテンシャル流の解であるから、実際の形とは若干異なることが考えられる。

4. モデル実験による検証

(1) Hele-Shaw モデル実験

以上の解析結果の検証実験として、Hele-Shaw モデルを用いた実験を行なった。このモデル実験は、非常に狭い間隔の 2 枚の平行平板間に粘性流体がゆるやかに流れるとき、この流れが浸透流と同じ Laplace 式を満足することを利用したもので<sup>9)</sup>、主として自由地下水面を有する流れの場合に用いられる。一般に砂モデルで自由地下水面形を求める場合には、色素等を流しても、毛管浸透のために不鮮明になってしまうので、多数の点の圧力を測定して、圧力が大気圧と等しくなる位置を推定し、これを自由地下水面の位置とする方法が用いられる<sup>7)</sup>。しかし、この方法も地下水面の勾配が大きくなると、かなりの測定誤差を生ずる。この点 Hele-Shaw モデルの場合には直視観測できるので誤差も少なく、しかも実験装置およびその操作が簡単であるから、自由地下水面の形状<sup>9)</sup> あるいは地下密度流の境界面の形状<sup>9)</sup> などの検討に利用されているようである。なおモデルの透水係数は、平板間隔を  $D$ 、動粘性係数を  $\nu$ 、重力の加速度を  $g$  とすると、平板間の平均流速の式と Darcy 式との相関係から、次式で表わされる。

$$k = gD^2 / (12\nu)$$

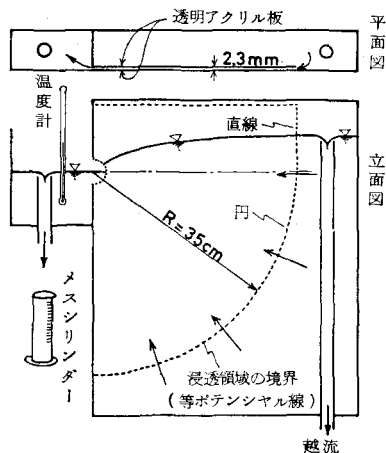


図-8 実験装置の概略図

本研究に用いた実験装置は、図-8の平面図に示すように、2枚の透明のアクリル板(厚さ5mm)を用いたもので、内側の板を立面図の点線のような形に切って、外側の板との間を浸透領域とした。この点線の形は図-7を参考にして、暗きょ中心点を中心とする  $R=35\text{ cm}$  の円と直線で近似した。また平板の間隔は  $2.3\text{ mm}$  であった。粘性流体には温度  $20^\circ\text{C}$  で  $\nu=0.83\text{ cm}^2/\text{sec}$  の機械油を用いた。油は温度に対する粘性の変化が大きいので、温度が  $26^\circ\text{C}$ 、 $45^\circ\text{C}$ 、 $68.5^\circ\text{C}$  のときの動粘性係数を Redwood 粘度計によって測定し<sup>10)</sup>、規定のグラフ用紙にプロットして、温度と動粘性係数との関係直線をえた。これを用いれば、実験時に温度を測定することにより、動粘性係数の値を知ることができる。次に自由地下水面の形状は、内側のアクリル板の裏側に張りつけた方眼紙を用いて読み取った。

(2) 解析結果と実験結果との比較

まず自由地下水面について調べてみよう。 $r/H_0=0.4$ の比較的大きな暗きょ径の場合の計算結果と実験結果を図-9に示している。これを比較すると、 $H_A/H_0$ が小さいとき暗きょの近くで計算結果が実験結果より高い位置を示している。これは図-6に示されるように、解析結果が暗きょ周壁の位置で、実際のポテンシャルより大きな値をもつためと考えられる。しかし、その相違はわずかであり、暗きょ径が大きいと解析誤差も大きいこ

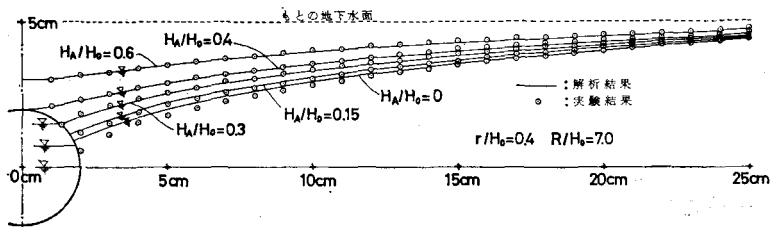


図-9 自由地下水面の実験結果との比較

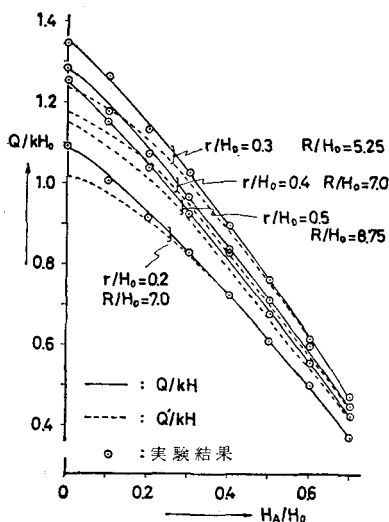


図-10 暗きょ取水量の実験結果との比較

と、および  $H_A/H_0$  が大きくなるとよく一致することなどを考慮すれば、解析結果はほぼ満足できる解であることがわかる。

次に暗きょ取水量について調べてみよう。実験は、 $r/H_0=0.2, 0.3, 0.4$  および  $0.5$  の場合について行ない、暗きょ内水圧を  $H_A/H_0=0\sim 0.7$  と変化させて、流量をメスシリンダーで測定した。解析結果を実験結果と比較すると、図-10に示すように、よく一致している。

以上によって、自由地下水面と暗きょ取水量の解析結果が、実験結果とよく一致することが確かめられたものとする。なお図-10には参考までに、 $Q'/kH_0$ の値を破線で示しているが、これより  $r/H_0$  が小さい場合、あるいは  $H_A/H_0$  が大きい場合には、 $Q'/kH_0$  を暗きょ取水量とみなしても、誤差は少ないことがわかる。

5. 計算図表および境界条件と取水量との関係

(1) 計算図表

本解析結果から暗きょ取水量を求める際には、式(15)~(22)の試行演算と式(23)の数値積分が含まれて、かなり面倒である。そこで算定に便利ように、 $Q/kH_0$ の計算図表を作成した。これを図-11に示す。これより  $r/H_0=0.01\sim 0.5$ 、 $R/H_0=2\sim 2500$ 、 $H_A/H_0=-0.3\sim 0.7$  の範囲の暗きょ取水量を読み取ることができる。図中の点線は、計算例として、 $R/H_0=13.3$ 、 $r/H_0=0.3$ 、 $H_A/H_0=0.1$  のとき  $Q/kH_0=0.86$  がえられる手順を例示したもので

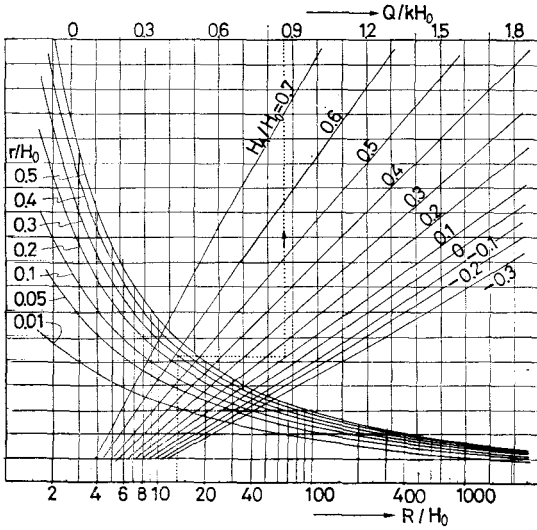


図-11 暗きょ取水量の計算図表

ある。

(2) 境界条件と取水量との関係

以上の解析結果を用いて、境界条件の変化にとまらぬ暗きょ取水量の変化を調べてみよう。まず図-10は  $Q/kH_0 \sim H_A/H_0$  の関係を示したものであり、これより、暗きょ内水圧を低くするほど取水量が多くなり、その変化はほぼ直線的であることがわかる。次に図-11の縦軸は、取水量を求める際の混乱をさけるために記入していないが、 $H_A/H_0=0.4$  のときの  $Q/kH_0$  であり、図中の右下がりの曲線群は  $Q/kH_0 \sim R/H_0$  の関係を示したものである。ここに影響範囲の値  $R$  は、井戸の影響半径と同様に、取水施設の設計時には、その地盤に適した値を与えて取水量を予測することになるが、この図より、影響範囲がある程度大きいとき、あるいは暗きょ径が小さいときには、取水量に与える影響範囲の影響は小さいことがわかる。図-12は  $Q/kH_0 \sim r/H_0$  の関係を示したもので、暗きょ径が大きいほど取水量が多く、暗きょ径の違いによる取水量の変化は、暗きょ径が小さいときに大きいことがわかる。図-13はもとの地下水面と暗きょ内水圧との水頭差を  $\Delta H$  とし、暗きょの埋

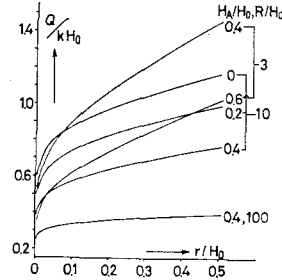


図-12 算定結果

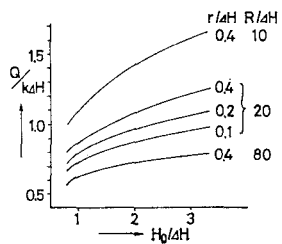


図-13 算定結果

設深さを変えた場合の取水量の変化を示したものである。これより水頭差が一定であれば、暗きょを深く埋設するほど取水量は多くなり、その増加率は深くするほどわずかながら小さくなるのがわかる。また影響範囲が小さいとき、あるいは暗きょ径が大きい場合に増加率が大きいようである。

次に自由地下水面の高さを調べてみよう。まず図-9より、暗きょ内水圧を低くするほど自由地下水面の位置が近くなるのがわかる。次に暗きょ内が満水状態のときの最低点の高さについて求めた図-14より、暗きょ径が大きいほど地下水面が低いこと、および影響範囲がある程度大きくなると、最低点の高さに与える影響範囲の影響は小さくなることなどがわかる。

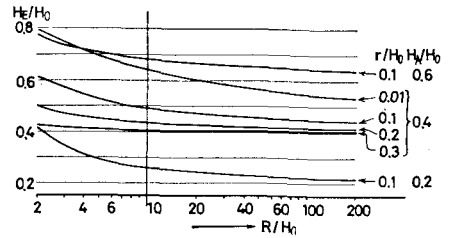


図-14 算定結果

6. 暗きょが多数並列された場合

半無限浸透領域の同じ深さの位置に、同じ規模の円形暗きょを一定間隔で多数並列させて取水する場合の、暗きょ取水量と自由地下水面の形状を検討してみよう。

(1) 複素ポテンシャル

図-15の流れの状態を調べてみると、各暗きょ間の中央線  $FD$  および暗きょ中心軸  $ED$  に関して左右対称である。したがって解析領域はハッチの部分を考える。式(2)より領域境界上の  $\theta$  の値を求めると、図-16のような  $\theta$  平面がかける。これを図-17の半平面に写像するとき、 $D$ 点を無限遠点に、 $E$ 点を  $t=0$  に、 $F$ 点

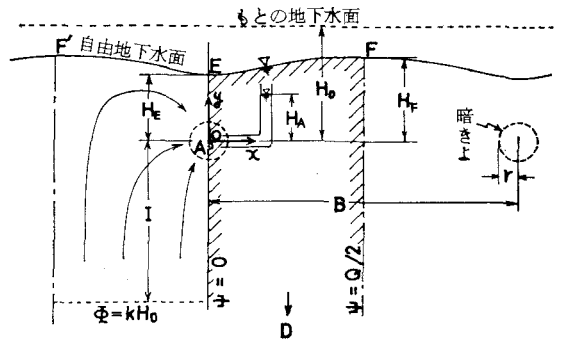


図-15 暗きょが多数並列された場合の  $z$  平面

もとの地下水面と暗きょ内水圧との水頭差を  $\Delta H$  とし、暗きょの埋

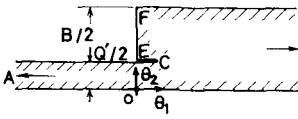


図-16 θ 平面

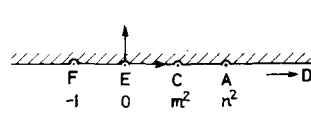


図-17 t 平面

を  $t = -1$  に選び、C 点および A 点の位置を  $t = m^2$  および  $t = n^2$  とすると、Schwarz-Christoffel の変換式より

$$\theta = M \int \frac{t - m^2}{\sqrt{t+1} \sqrt{t} (t - n^2)} dt \dots\dots\dots (26)$$

ここに M は係数である。

ここで

$$t = -\sin^2 \zeta \dots\dots\dots (27)$$

とおくと、式 (26) は次式のように積分される。

$$\theta = 2iM \{ \zeta - \tan^{-1}(\sqrt{n^2+1} \cdot \tan \zeta/n) / G \} + C_1 \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $G = n\sqrt{n^2+1}/(n^2-m^2)$ 、 $C_1$  は積分定数

また式 (27) の変換によって、図-17 の半平面は図-18 の帯状領域に写像される。この図-18 の流入点へのポテンシャル流は、帯状領域に流入点が2つある場合のポテンシャル流と同じであり、複素ポテンシャルの式は、1つの流入点への流入量を  $Q'$  とすると次式で表わされる。

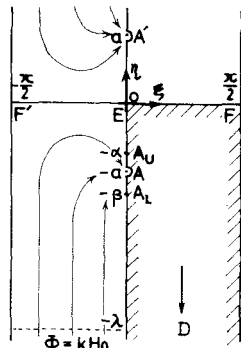


図-18 ζ 平面

$$W = (Q'/2\pi) \cdot$$

$$\ln \{ \sin(\zeta + ia) \cdot \sin(\zeta - ia) \} + \mu \dots\dots\dots (29)$$

ここに式 (27) より  $a = \sinh^{-1} n$

(2) φ および ψ の式

式 (28) に  $\zeta = \xi + i\eta$  を代入して実数部と虚数部にわけ、領域内での逆正接の値を、AD および DF 区間で、 $\tan^{-1} 0 = 0$ 、EA 区間で  $\tan^{-1} 0 = \pi$  と選ぶと、 $C_1 = 0$  および  $M = G \cdot Q'/2\pi$  がえられる。これらを式 (28) の実数部と虚数部に代入して整理すると、次式がえられる。

$$\phi - ky = \frac{Q'}{4\pi} \cdot \ln \frac{X^2 + (1+Y)^2}{X^2 + (1-Y)^2} - \frac{Q'}{\pi} G \eta \dots\dots\dots (30)$$

$$\psi + kx = \frac{Q'}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{2X}{X^2 + Y^2 - 1} + \frac{Q'}{\pi} G \xi \dots\dots\dots (31)$$

ここに

$$X = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \frac{\sin 2\xi}{\cos 2\xi + \cosh 2\eta}$$

$$Y = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \frac{\sinh 2\eta}{\cos 2\xi + \sinh 2\eta}$$

次に式 (29) に  $W = \phi + i\psi$ 、 $\zeta = \xi + i\eta$ 、 $\mu = \mu_1 + i\mu_2$  を代入して実数部と虚数部にわけ、E 点より求めた

$$\mu_1 = kH_E - (Q'/4\pi) \cdot \ln n^4$$

および F 点より求めた  $\mu_2 = Q'/2$  を代入して整理すると、

$$\phi = (Q'/4\pi) \cdot \ln \{ [\sin^2 \xi + \sinh^2(\eta+a)] \cdot \{ \sin^2 \xi + \sinh^2(\eta-a) \} / n^4 \} + kH_E \dots\dots (32)$$

$$\psi = (Q'/2\pi) \cdot [ \tan^{-1} \{ \cot \xi \cdot \tanh(\eta+a) \} + \tan^{-1} \{ \cot \xi \cdot \tanh(\eta-a) \} + \pi ] \dots\dots\dots (33)$$

がえられる。

(3) 暗きよ取水量 Q

まず式 (30)、(31)、(32)、(33) に各点の境界条件を与えて、流入点への流入量  $Q'$  の算定式を求めてみよう。

暗きよの中心軸上で、速度ポテンシャルが、もとの地下水面と同じポテンシャル  $\phi = kH_0$  に回復する位置を  $y = -I$ 、 $\eta = -\lambda$  とすると、 $\xi = 0$ 、 $X = 0$ 、 $Y = -\tanh \lambda \cdot \sqrt{n^2+1}/n$  であるから、式 (30)、(32) より

$$\ln \left| \frac{n - \sqrt{n^2+1} \cdot \tanh \lambda}{n + \sqrt{n^2+1} \cdot \tanh \lambda} \right| + 2\lambda G = \frac{2\pi k}{Q'} (H_0 + I) \dots\dots\dots (34)$$

$$\ln \{ \sinh(\lambda-a) \cdot \sinh(\lambda+a) / n^2 \} = (2\pi k/Q') \cdot (H_0 - H_F) \dots\dots\dots (35)$$

自由地下水面は暗きよ間の中央 (F 点) で最も高くなる。これを  $y = H_F$  (ただし  $H_E \leq H_0$ ) とおくと、 $\phi = kH_F$ 、 $\psi = Q'/2$ 、 $x = B/2$ 、 $\xi = \pi/2$ 、 $\eta = 0$ 、 $X = \infty$ 、 $Y = 0$  であるから、式 (31)、(32) より

$$G = n\sqrt{n^2+1}/(n^2-m^2) = kB/Q' + 1 \dots\dots\dots (36)$$

$$(2\pi k/Q') (H_F - H_E) = \ln(1/n^2 + 1) \dots\dots\dots (37)$$

暗きよ周壁の下端  $A_L$  点では、 $\eta = -\beta$  ( $\beta > 1$ ) とおくと、 $\phi = kH_A$ 、 $y = -r$ 、 $\xi = 0$ 、 $X = 0$ 、 $Y = -\tanh \beta \cdot \sqrt{n^2+1}/n$  であるから、式 (30)、(32) より

$$2G\beta + \ln \left| \frac{n - \sqrt{n^2+1} \cdot \tanh \beta}{n + \sqrt{n^2+1} \cdot \tanh \beta} \right| = \frac{2\pi k}{Q'} (H_A + r) \dots\dots\dots (38)$$

$$H_E = H_A - (Q'/2\pi k) \cdot \ln \{ \sinh(\beta-a) \cdot \sinh(\beta+a) / n^2 \} \dots\dots\dots (39)$$

$A_U$  点の位置は、暗きよ内が満水状態の場合には暗きよ周壁の上端とし、未満水状態の場合には暗きよ周壁と自由地下水面との交点とする。

暗きよ内が満水状態の場合には、 $\eta = -\alpha$  ( $\alpha < 1$ ) とおくと、 $\phi = kH_A$ 、 $y = r$ 、 $\xi = 0$ 、 $X = 0$ 、 $Y = -\tanh \alpha \cdot \sqrt{n^2+1}/n$  であるから、式 (30) より

$$2G\alpha + \ln \left| \frac{n - \sqrt{n^2+1} \cdot \tanh \alpha}{n + \sqrt{n^2+1} \cdot \tanh \alpha} \right| = \frac{2\pi k}{Q'} (H_A - r) \dots\dots\dots (40)$$

式 (32) より

$$H_E = H_A - (Q'/2\pi k) \cdot \ln \{ \sinh(\alpha - \alpha) \cdot \sinh(\alpha + \alpha) n^2 \}$$

となるから、式 (39) と連立させれば

$$2n^2 = \sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta \dots\dots\dots (41)$$

がえられる。したがって暗きょ内が満水状態の場合の、流入点への流入量  $Q'$  と自由地下水面の高さ  $H_E$  および  $H_F$  は、与えられた境界  $r, H_A, B, H_0, I$  について式 (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40), (41) を連立させて解いてえられる。また  $r, H_A, B, H_F$  を与えて  $Q'$  と  $H_E$  を求めることもでき、この場合には式 (36), (37), (38), (39), (40), (41) を連立させて解くことになる。

次に暗きょ内が未満水状態の場合の  $A_U$  点では、 $\xi = \alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ),  $y = y_A$  とおくと、 $\Phi = ky_A$ ,  $\psi = Q'/2$ ,  $x = \sqrt{r^2 - y_A^2}$ ,  $\eta = 0$ ,  $X = \tan \alpha \cdot \sqrt{n^2 + 1}/n$ ,  $y = 0$  であるから、式 (31), (32) より

$$2G\alpha + \tan^{-1} \frac{2n\sqrt{n^2+1} \cdot \tan \alpha}{(n^2+1) \cdot \tan^2 \alpha - n^2} = \frac{2\pi k}{Q'} \sqrt{r^2 - y_A^2} + \pi \dots\dots\dots (42)$$

$$y_A = H_E + (Q'/2\pi k) \cdot \ln(1 + \sin^2 \alpha/n^2) \dots\dots (43)$$

がえられる。したがって暗きょ内が未満水状態の場合の流入点への流入量  $Q'$  と自由地下水面の高さは、暗きょが1個の場合と同様に  $m=0$  あるいは  $y_A = H_A$  において式 (34), (35), (36), (37), (38), (39), (42), (43) を連立させて解くとえられる。

以上の解析によって求められた流入点への流れの各流線上において、暗きょ周壁の位置で、与えられた暗きょ周壁の速度ポテンシャルと一致するように補正したときの流入量を、式 (23) より求め、これを暗きょ取水量  $Q$  と考える。

### (4) 自由地下水面と流線網

自由地下水面は  $\eta=0$  の直線に写像されているから、式 (30), (31), (32) より

$$x = \frac{Q'}{2\pi k} \cdot \left\{ 2G\xi + \tan^{-1} \frac{2n\sqrt{n^2+1} \cdot \tan \xi}{(n^2+1) \cdot \tan^2 \xi - m^2} - \pi \right\} \dots\dots\dots (44)$$

$$y = \frac{Q'}{2\pi k} \cdot \ln \{ (\sin \xi/n)^2 + 1 \} + H_E \dots\dots\dots (45)$$

がえられる。したがって流入量の算定式よりえられる  $Q', H_E, n, m$  の値を両式に代入すれば、 $\xi$  を媒介変数として自由地下水面を描くことができる。また領域内部の  $\Phi$  および  $\psi$  の値も、式 (30), (31), (32), (33) より  $\xi, \eta$  を媒介変数として求めることができるから、これより流線網を描くことができる。図-19 は  $H_A/H_0 = 0.2$ ,  $r/H_0 = 0.1$ ,  $B/H_0 = 1.0$ ,  $I/H_0 = 1.59$  の場合の流

線網を示したものである。

## 7. Hele-Shaw モデル 実験による検証

図-8 の実験装置を用いて実験を行ない、暗きょ取水量と自由地下水面の解析結果を検討してみよう。モデルの浸透領域の大きさは、暗きょ間隔を  $B=30$  cm とし、 $\Phi = kH_0$  の等ポテンシャル線は、図-19 を参考にして、 $x$  軸と平行な直線で近似し、 $I=35$  cm とした。

まず自由地下水面について調べてみよう。 $r/H_0 = 0.4$  の比較的大きな暗きょ径の場合の算定結果と実験結果を図-20 に示している。これを比較すると、 $H_A/H_0 = 0$  の場合に解析結果が実験結果よりやや高い位置を示すが、その相違はわずかであり、全体的にはよく一致しているといえよう。

次に暗きょ取水量について、解析結果と実験結果を比較すると図-21 のようになり、暗きょ内が未満水状態のとき、解析結果が実験結果より大きな値を示す。しかし、その相違はわずかであるから、解析結果と実験結果はほぼ一致しているといえよう。

以上のように、解析結果と実験結果がほぼ一致するこ

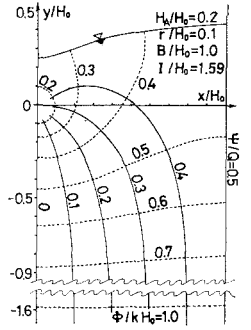


図-19 流線網

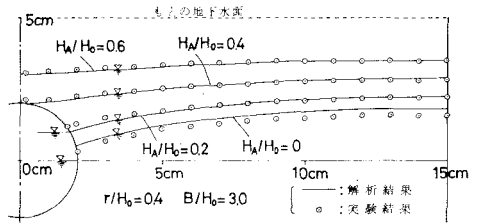


図-20 自由地下水面の実験結果との比較

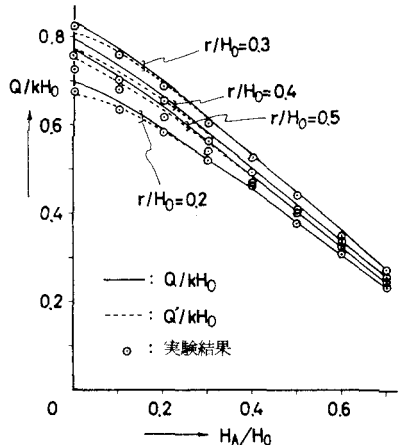


図-21 暗きょ取水量の実験結果との比較



とから、本解析結果はほぼ満足できる解であると考えることができる。

### 8. 計算図表および境界条件と取水量との関係

#### (1) 計算図表

境界条件として  $H_A, r, B$  が与えられていて、 $H_F$  を知って  $Q$  を求める場合、あるいは  $Q$  を知って  $H_F$  を求める場合の計算図表を作成した。これを 図-22 に示

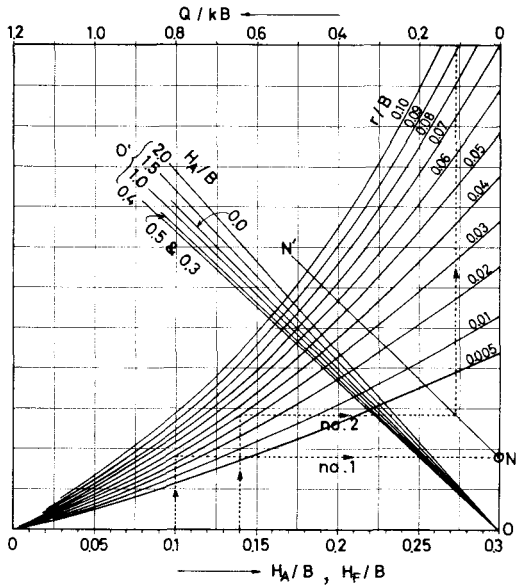


図-22 暗きょ取水量の計算図表

している。いまたとえ、 $B=15\text{m}$ 、 $H_0=2.5\text{m}$ 、 $r=0.6\text{m}$ 、 $H_A=1.5\text{m}$  とし、 $H_F=2.1\text{m}$  であるあるときの暗きょ取水量を求めてみよう。まず  $H_A/B=0.1$ 、 $r/B=0.04$  であるから、No. 1 の点線のように結んで、点  $N$  を決める。この点  $N$  を通り  $OO'$  線群の  $H_A/B=0.1$  の直線と平行な直線  $NN'$  を描き、 $H_F/B=0.14$  から No. 2 のように引いた点線と  $NN'$  線との交点の横軸の値を読み取れば  $Q/kB=0.11$  をうる。また No. 2 の操作を逆に行なえば、 $Q/kB=0.11$  のときの  $H_F/B=0.14$  を求めることができる。

#### (2) 境界条件と取水量との関係

暗きょ径や暗きょ内水圧などが暗きょ取水量および地下水面の最低点の高さなどに与える影響は、傾向的には 図-10~14 と同じ結果がえられる。したがってここでは、暗きょ間隔が暗きょ取水量および暗きょ間中央の地下水面の高さなどに与える影響について調べてみよう。

まず  $Q/kH_0 \sim B/H_0$  を求めると 図-23 のようになる。これより暗きょ間隔を大きくすると取水量は多くな

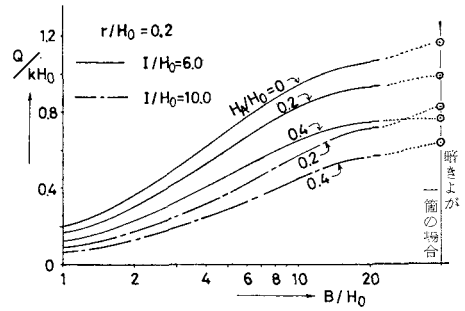


図-23 算定結果

り、その増加率は暗きょ間隔が小さいときに大きいことがわかる。なお参考までに、暗きょが1個埋設された場合の取水量を  $R/H_0=I/H_0$  とおいて求め、図中に丸印で示している。次に  $H_F/H_0 \sim H_A/H_0$  を求めると 図-24 のようになる。これより暗きょ間中央の地下水面の高さは、暗きょ内水圧を低くするほど低くなり、その変化は暗きょ間隔が小さいときに大きいことがわかる。次に、もとの地下水面と暗きょ内水圧との水頭差  $\Delta H$  を変えずに、暗きょの埋設深さを変えた場合の  $H_0/\Delta H \sim Q/k\Delta H$  および  $(H_F - H_A)/\Delta H$  の関係を、 $r/\Delta H=0.25$ 、 $B/\Delta H=7.5$  の場合について求めると、 図-25 のようになる。これより暗きょ間中央の地下水面の高さは  $H_0/\Delta H=1 \sim 2$  の場合には暗きょの位置を深くするほど低くなるが、暗きょの深さが水頭差に比べて

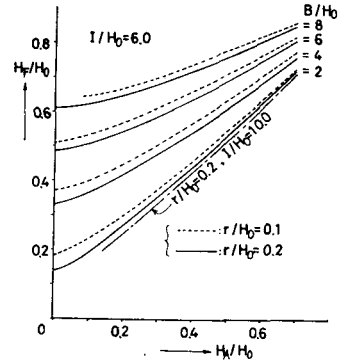


図-24 算定結果

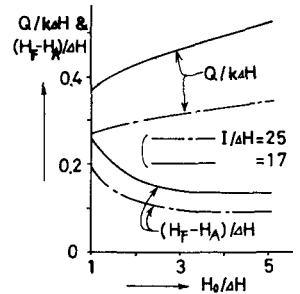


図-25 算定結果

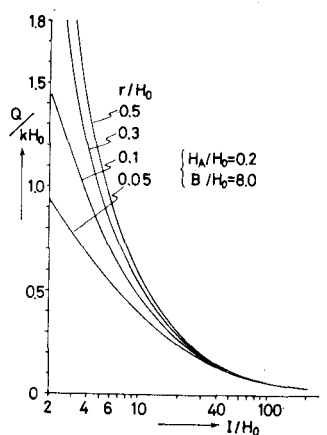


図-26 算定結果

大きくなると、ほとんど変化しなくなること、また暗きょ取水量は暗きょの位置を深くするほど多くなることなどがわかる。なお  $I/H_0$  が取水量に与える影響は、図—26 に示すように、図—11 の  $R/H_0$  が取水量に与える影響に比べて大きい。またこの影響は暗きょ径が大きいほど大きいようである。

## 9. む す び

以上によって、自由地下水面をもつ均一な透水性の半無限浸透領域に、円形の集水暗きょが1個、あるいは同じ深さに並列して多数埋設された場合の暗きょへの浸透流について、暗きょ内が満水状態と未満水状態での解を求め、これより、任意の暗きょ内水圧における円形暗きょの取水量と自由地下水面の形状などを求めることができたものとする。この取水量の算定には数値微分と数値積分が含まれるので、計算図表を用意した。これを用いれば簡単に暗きょ取水量を求めることができるであろう。

以上の解析結果から、暗きょを深く埋設するほど、暗きょ内水圧を下げるほど、および暗きょ径を大きくするほど暗きょ取水量は多くなり、自由地下水面の高さは低くなることがわかった。また暗きょ間隔を大きくすると、暗きょ取水量は多くなるが、暗きょ間中央の地下水面の高さが高くなることなどが明らかになった。

本解析結果は暗きょ排水における、暗きょ排水量や自由地下水面の低下にも利用できるものである。

また本論文では上部境界を自由地下水面として検討したが、本論文の解析を若干修正することにより、淡塩2層地盤において円形暗きょで塩水を排水する場合の、淡塩境界面について検討することができる<sup>11)</sup>。

終わりに、本研究を進めるにあたり、終始貴重など指

導をいただいた九州大学 上田年比古教授に深く感謝いたします。また実験装置の作成および実験にご協力いただいた本学職員木村繁之氏に感謝する。なお上記の計算には本学大型計算機センターのFACOM 230-60を使用した。また本研究は文部省科学研究費の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) 上田・杉尾：被圧水で満たされた円形暗きょの取水量について，土木学会論文報告集，No. 194，p. 91～101，1971.
- 2) 上田・杉尾：水で満たされていない円形暗きょの取水量について，土木学会論文報告集，No. 201，p. 77～86，1972.
- 3) 丸山：地下排水に伴う水田水理機構，農業土木試験場報告，第3号別刷，p. 25～30，1965.
- 4) Schilfgaarde, J.V., Kirkham, D. and Frevert, R.F. : Physical and Mathematical Theoris of Tile and Ditch Drainage and their Usefulness in Design, Research Bulletin, Iowa, Agr. Exp. Stat. AMES, 436, p. 667～706, 1956.
- 5) Polubarinova-Kochina : Theory of Ground Water Movement, Princeton Univ. Press, p. 120, 1962.
- 6) 嶋：浸透流に対する Hele-Shaw の実験の応用，土木学会誌 36 卷5号，p. 21～24，1951.
- 7) Hall, H.P. : An Investigation of Steady Flow toward a Gravity Well, La Hauille Blanche, Vol. 10, p. 8～35, 1955.
- 8) Guitjens, J.C. and Luthin, J.N. : Viscous Model Study of Drain Spacing on Sloping Land and Comparison with Mathematical Solution, Water Resources Research, Vol. 1, No. 4, p. 523～530, 1965.
- 9) Columbus, N. : Viscous Model Study of Sea Water Intrusion in Water Table Aquifers, Water Resources Research, Vol. 1, No. 2, p. 313～323, 1965.
- 10) 川田：粘度，計量管理技術双書(1)，コロナ社，p. 51，1969.
- 11) 上田・杉尾：淡塩2層地盤内の海水取水円形暗きょによる淡塩境界面，第26回年次学術講演会講演集，第2部，p. 469～472，1971.

(1972. 7. 20・受付)