

管内自由振動流の減衰性に関する研究

A STUDY ON THE FREE DAMPING OF OSCILLATORY
FLOW THROUGH A TUBE

安川 浩*・田川 昌宏**

By Hiroshi Yasukawa and Masahiro Tagawa

1. 緒 言

管内自由振動流の減衰率に関しては従来、振動方程式の減衰項を速度の一乗あるいは二乗に比例するとして解いているが、その比例定数がどのような水理量の関数として定まるかは明らかではなかった。

一方海底における波による乱流境界層の特性に関しては測定が非常に困難であり、より単純化された振動する境界層内の乱流構造を把握しようとするならば管内振動流の方がはるかに扱いやすい。

本研究の目的は管内自由振動流の減衰機構を明らかにし、かつ管内振動流における層流解と乱流解、ならびにそれらの適用限界等を明らかにすることにある。この論文は最も単純なU字管内自由振動流に対し筆者らの方法の適用性を検討しようとして試みたもので、まず自由振動における減衰のメカニズムを明らかにするために振動現象が複素量を伴う物理現象であることに着目し、未定複素角速度を有する振動解の仮定の下に円筒座標におけるナビエ・ストークス方程式の層流解を求め、連続条件から未定複素角速度が定まることを実験により確かめた。次に層流解の適用限界を実験により求め、さらに乱流時の実測上の減衰特性を説明し得る乱流モデルを設定した。

2. ポテンシャル流の仮定に基づくU字管内振動流の圧力分布

実際の振動流中の軸方向の圧力分布をポテンシャル流におけるそれで近似させるため、速度ポテンシャル ϕ 、流線方向速度 q を用いれば圧力方程式は次式で表わされる。 g は重力加速度、 h は基準面からの高さを表わす。

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} = C \dots\dots\dots (2.1)$$

運動の軸対称性と半径方向速度成分に対する軸方向速度成分の卓越性を仮定すれば、ラプラスの方程式は $\partial^2 \phi / \partial z^2 = 0$ で与えられる。それゆえ速度ポテンシャル $\phi(z, t)$ は次式で表わされる。

$$\phi(z, t) = C_1(t) \cdot z + C_2(t) \dots\dots\dots (2.2)$$

式(2.2)の積分定数を決めるため2個の独立な条件式が必要である。図-1に示すように z 軸の原点をとり、 z の増加する方向への水面変位を ξ で表わせば、境界条件として $z = \text{Real}(\xi)$ における圧力条件と運動学的条件を用いるか、あるいは後者に替えて $z = l + \text{Real}(\xi)$ における圧力条件を用いてもU字管内自由振動では結果は同一である。それゆえ非粘性振動角速度を n 、虚数単位を j で表わせば境界条件は

$$\left. \begin{aligned} z = \text{Real}(\xi), \quad \frac{p}{\rho} + gh = g \{ h_0 - \text{Real}(\xi) \} \\ \text{および} \\ U_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \text{Real} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = \text{Real}(jn\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3)$$

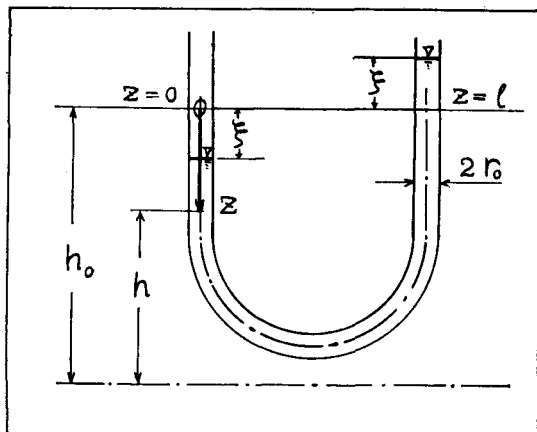


図-1 U字管の略図

* 正会員 工修 東京都立大学講師 工学部土木工学科

** 正会員 工修 日本港湾コンサルタント(株)

$n^2=2gl$ を考慮すれば式 (2.3) より式 (2.2) の積分定数が定まり圧力分布は次式で表わされる。

$$\frac{p}{\rho g} = h_0 - h + \left(\frac{2z}{l} - 1 \right) \text{Real}(\xi) - \frac{2}{l} \{ \text{Real}(\xi) \}^2 \dots\dots\dots(2.4)$$

3. 管内振動流における速度，せん断応力の分布

(1) 層流時の分布

円筒座標における非圧縮性流体に関するナビヤ・ストークス方程式は半径方向，円周方向，軸方向の速度成分をそれぞれ U_r, U_θ, U_z および各方向への質量力成分をそれぞれ R, θ, Z で表わせば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{DU_r}{Dt} - \frac{U_\theta^2}{r} &= R + \frac{1}{\rho} \text{div}_r \Sigma \\ \frac{DU_\theta}{Dt} + \frac{U_r U_\theta}{r} &= \theta + \frac{1}{\rho} \text{div}_\theta \Sigma \\ \frac{DU_z}{Dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \text{div}_z \Sigma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

ここに，

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial r} + U_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + U_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{div}_r \Sigma &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \text{div}_\theta \Sigma &= \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta r} + \sigma_{r\theta}}{r} \\ \text{div}_z \Sigma &= \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{r \partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right), \quad \sigma_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial U_z}{r \partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad \sigma_{zr} = \mu \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

一方連続式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

管路断面の一様性と運動の軸対称性および $l/r_0 \gg 1$ の仮定から $U_z \gg U_r, \partial U_z / \partial z = 0$ の仮定を導くならば，式 (3.1) は簡略化されて式 (3.2) となる。式 (3.2) における τ は $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$ を考慮して書き替えたものである。

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \tau \right) \dots\dots\dots(3.2)$$

われわれの対象は管内振動流であるから自由振動と強制振動をあわせて考えるならば一般に複素角速度 ω を有する周期現象と考えることができる。式 (3.2) における動水勾配には前章で求めたポテンシャル流の仮定に基づく

結果で近似すれば，この動水勾配 I ，流速 U_z ，せん断応力 τ 等はいずれも複素角速度 ω を有する時間 t の周期関数となる。それゆえ虚数単位を j で表わせば $U_z = f(r) e^{j\omega t}$ の形で表わせるから $\partial U_z / \partial t = j\omega U_z$ の関係が得られ，管の半径 r_0 ，管壁のせん断応力 τ_0 により無次元化し，管壁の摩擦速度を v_{*0} で表わせば，式 (3.2) は式 (3.3) と変形される。

$$\frac{j\omega r_0}{v_{*0}^2} U_z = \frac{r_0 g}{v_{*0}^2} I + \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} (r_* \tau_*) \dots\dots(3.3)$$

式 (3.3) は一様断面を有する円管内流れの基本式と考えられ，定常流に対しては $\omega \equiv 0$ と置き，層流および乱流に対しそれぞれ $\tau/\rho = \nu(\partial U_z / \partial r)$ および $\tau/\rho = \epsilon(\partial U_z / \partial r)$ ， $\epsilon = l^2 |dU_z / dr|$ と置けば，それぞれポワジユエウ，およびプラントルの速度分布を与える。自由振動の場合は $\omega U_z = 0 (\omega^2 \xi)$ ， $gI = 0 (n^2 \xi)$ であり，左辺を省略することはできない。

動水勾配 I は t のみの関数であるから r_* で微分して消去し，層流に対しては $\tau/\rho = \nu(\partial U_z / \partial r)$ の関係を用いて U_z を消去し，さらに $\eta = \chi_0 r_*$ ， $\chi_0 = r_0 \sqrt{-j\omega/\nu}$ の変換を行なえば，式 (3.3) は式 (3.4) に変形される。

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\eta \tau_*) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \tau_*) + \eta \tau_* = 0 \dots\dots\dots(3.4)$$

式 (3.4) の一般解は第1種および第2種のベッセル関数 $J_1(\eta)$ ， $Y_1(\eta)$ を用いて $\eta \tau_* = A_1 \{ \eta J_1(\eta) \} + B_1 \{ \eta Y_1(\eta) \}$ により表わされるが，管軸上での τ_* の有限性により $B_1 = 0$ ，それゆえ τ_* は式 (3.5) で表わされる。

$$\tau_* = A_1 J_1(\eta) \dots\dots\dots(3.5)$$

一方，式 (3.3) の右辺第2項に $(1/\eta) \partial(\eta \tau) / \partial \eta = A_1 J_0(\eta)$ の関係を用い，管壁で $U_z = 0$ の条件から A_1 を定めれば，層流時の流速ならびにせん断応力の分布は次式で表わされる。

$$U_z = -\frac{jgI}{\omega} \left\{ 1 - \frac{J_0(\eta)}{J_0(\chi_0)} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = -\frac{r_0 g I}{\chi_0} \cdot \frac{J_1(\eta)}{J_0(\chi_0)} \dots\dots\dots(3.7)$$

断面平均流速 V を求めるのに， $\int_0^{r_0} U_z \cdot 2\pi r dr = \pi r_0^2 V$ の関係を用いれば，式 (3.3) の積分により式 (3.8) が導かれる。

$$V = -\frac{gI}{j\omega} \left\{ \frac{2}{\chi_0} \cdot \frac{J_1(\chi_0)}{J_0(\chi_0)} - 1 \right\} \dots\dots\dots(3.8)$$

これらの関係のうち式 (3.6) は別の方法で導かれた $\text{Sexl}^{11)}$ の結果と一致する。

(2) 乱流時の分布

乱流時に式 (3.2) を解くためには応力とひずみ速度の関係が必要である。層流時には $\tau/\rho = \nu(\partial U_z / \partial r)$ の関係があり ν が定数であった。乱流においても $\tau/\rho = \epsilon(\partial U_z / \partial r)$ により渦動粘性係数 ϵ を定義すれば ϵ の関数形が

定まらねばならないが、振動流におけるεの分布に関する定説はまだ確立されていない。それゆえ梶浦^{2),3)}による波動境界層に関する二相モデルを参考にする。

梶浦の二相モデルに基づく波動境界層内速度の振幅および位相の分布は、壁面のごく近傍を除いてJonsson⁴⁾による矩形断面の管内振動流中での測定結果と比較的良好一致し、橋本⁵⁾による矩形断面U字管における自由振動の減衰率も、レイノルズ数が小さい範囲で梶浦による滑面での抵抗係数の値から計算される減衰率とよく合うと述べられている。

梶浦の理論に基づく速度分布や抵抗係数が実測結果とよく合うという事実は、梶浦のモデルにおける渦動粘性係数εの仮定の妥当性を示すものと考えられる。

梶浦のモデルは乱流状態にある波動境界層を、層流底層に相当する“inner layer”と、壁面から遠くかつεが一定となる“outer layer”に大別し、その中間にεの値が連続的かつ直線的に変化する“overlap layer”を置いているが、Jonssonの実験結果とよく合う部分は上述のouter layerの領域内に限られる。他方各領域の広さに着目すればoverlap layerとinner layerの両者が全領域の広さに対して占める割合はきわめて小さい。それゆえJonssonの矩形管内振動流について考えれば管断面内の大部分がouter layerに相当し、換言すれば管内のほとんどの領域において渦動粘性係数εは一定であり、そこでのεの値は梶浦のモデルによれば壁面摩擦速度 $v_{*0} = \sqrt{\tau_0/\rho}$ の振幅 \hat{v}_{*0} に比例することになる。

一方、Hinze⁶⁾に引用されているように、Lauferの実測に基づく円管内定常流におけるεの分布は、管中央部のかなり広い部分にわたってほぼ一定であり、その値は管壁の摩擦速度と管径の積に比例する。

以上の考察に基づき、円管内振動流における渦動粘性係数εの分布を次のように仮定する。

$$\epsilon = \alpha r_0 \hat{v}_{*0} \dots \dots \dots (3.9)$$

式(3.9)において無次元比例定数αは空間座標ならびに時間とは無関係なあるパラメーターの関数であると予想される。この仮定に従えばεは管軸からの距離rと無関係な定数となるからτに関して式(3.2)を解くにあたり、層流時の動粘性係数νの替りにεを用いればよい。それゆえ、速度、せん断応力の分布は形式的には前節と同一である。ただしεは摩擦速度の振幅 \hat{v}_{*0} の関数であるから $\eta' = x_0' r_*$ 、 $x_0' = r_0 \sqrt{-j\omega/\epsilon}$ と表わせば、乱流時の速度、せん断応力、断面平均流速は次式で表わされる。

$$U_z' = -\frac{jgI}{\omega} \left\{ 1 - \frac{J_0(\eta')}{J_0(x_0')} \right\} \dots \dots \dots (3.10)$$

$$\frac{\tau'}{\rho} = -\frac{r_0 g I}{x_0'} \cdot \frac{J_1(\eta')}{J_0(x_0')} \dots \dots \dots (3.11)$$

$$V' = -\frac{gI}{j\omega} \left\{ \frac{2J_1(x_0')}{x_0' J_0(x_0')} - 1 \right\} \dots \dots \dots (3.12)$$

上式においてεに含まれる摩擦速度の振幅 \hat{v}_{*0} は壁面における式(3.11)の値と式(3.12)から x_0' を消去して得られる。すなわち

$$\frac{\tau_0'}{\rho} = -\frac{r_0 g I}{2} \left(1 - \frac{j\omega}{gI} V' \right) \dots \dots \dots (3.13)$$

4. U字管内自由振動における減衰率と周期

(1) 層流時自由振動における複素角速度

管路の一端でピストン等を往復させて生ずる強制振動流では振動角速度は既知の実定数で、速度、応力等は3.の式(3.6)、(3.7)、(3.8)あるいは式(3.10)、(3.11)、(3.12)で定められる複素量である。

一方、自由振動では角速度は自明ではなく他の条件式により定められねばならない。

2. の非粘性振動の角速度nはU字管の場合 $n^2 = 2g/l$ で表わされるから動水勾配Iは次式で表わされる。

$$I = -\frac{n^2}{g} \xi \dots \dots \dots (4.1)$$

また管内平均流速と水面の移動速度の関係から

$$V = j\omega \xi \dots \dots \dots (4.2)$$

それゆえ式(3.8)を式(4.2)に代入し未定複素角速度ωをnにより無次元化し、 $\Omega = \omega/n$ で表わせば次式が得られる。

$$\Omega^2 = 1 - \frac{2}{x_0} \cdot \frac{J_1(x_0)}{J_0(x_0)}$$

無次元複素パラメーター x_0 を $r_0 \sqrt{n/\nu} \sqrt{-j\Omega}$ と変形し、無次元パラメーターrを $r = r_0 \sqrt{n/\nu}$ により定義すれば、ベッセル関数の変換公式 $(2/x_0) J_1(x_0)/J_0(x_0) - 1 = J_2(x_0)/J_0(x_0)$ を用いて、 Ω すなわち x_0 の満たすべき方程式は式(4.3)と変形される。

$$\frac{x_0^4 \cdot J_0(x_0)}{J_2(x_0)} = r^4 \dots \dots \dots (4.3)$$

式(4.3)の根である x_0 はパラメーターrに対応して定まり、 x_0 は複素角速度 Ω に対応するから、自由振動における無次元複素角速度 Ω はrの関数として定まることが予想される。

式(4.3)を数値的に解くにあたり、根の存在範囲を定めねばならない。われわれの対象は減衰振動であるから複素角速度の虚数部は正でなければならない。それゆえ

$$0 < \text{Arg}(\Omega) < \pi \dots \dots \dots (4.4)$$

Ω に対応する x_0 の偏角は、 $x_0 = r \sqrt{-j\Omega}$ の関係より

$$-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(x_0) < \frac{\pi}{4} \dots \dots \dots (4.5a)$$

式(4.3)および不等式(4.5a)を同時に満足する x_0

に対し、共役な複素数 \bar{x}_0 を考えると \bar{x}_0 も式 (4.3) を満足する。そこで \bar{x}_0 に対応する無次元複素角速度を Ω_* で表わせば $\bar{x}_0 = r\sqrt{-j\Omega_*}$ であり、 x_0, \bar{x}_0 は互いに共役であるから Ω, Ω_* は次の関係を有する。ここで $\hat{\Omega}$ は Ω の振幅を表わすものとする。

$$\hat{\Omega} = \Omega_*$$

$$\text{Arg}(\Omega) + \text{Arg}(\Omega_*) = \pi$$

それゆえ Ω, Ω_* は Ω 平面の正の虚軸に関して対称に位置し、互いに実部の符号のみ異なる。減衰振動における複素角速度の実部の正負は、位相速度の正負を表わすから、 Ω, Ω_* の実部の符号の違いは、時間原点のとり方だけに関係し、物理的意味は同一である。それゆえ、 Ω, Ω_* のうちのいずれか一方を求めれば十分である。すなわち

$$-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(x_0) \leq 0 \dots\dots\dots(4.5b)$$

他方非粘性振動に対応する x_0 は不等式 (4.5 b) で示される領域のどの点に相当するであろうか。層流時自由振動の複素角速度は前述のように無次元パラメーター $r = r_0\sqrt{n/\nu}$ に対応して定まるから、非粘性自由振動では ν を 0 に近づける極限を考えれば $r = \infty$ に対応し、 Ω が有限値に留まるならば $x_0 = r\sqrt{-j\Omega}$ より $x_0 = \infty$ が非粘性解に対応することになる。

位相角に着目すれば、非粘性振動では複素角速度の虚部は 0 であるから

$$\text{Arg}(\Omega) = 0, \text{Arg}(x_0) = -\pi/4$$

したがって非粘性もしくは粘性無限小に対応する式 (4.3)、不等式 (4.5 b) の根である x_0 は次の条件を満足せねばならない。

$$\text{Arg}(x_0) = -\pi/4, \hat{x}_0 = \infty$$

一方、減衰振動における他方の極限として振動しないて単調に減衰する現象を非振動解と考えれば、その場合の複素角速度は実部が 0 でなければならない。それゆえ、

$$\text{Arg}(\Omega) = \pi/2, \text{Arg}(x_0) = 0$$

以上の考察に基づき、扇形領域 (4.5 b) の内部に存在する式 (4.3) の根の軌跡はパラメーター r が無限大から 0 に向かって変化するのに応じて、 $\text{Arg}(x_0) = -\pi/4, \hat{x}_0 = \infty$ に始まり \hat{x}_0 の値を減じながら x_0 平面の正の実軸上に収れんする曲線を描くと予想される。図-2、図-3 はパラメーター r の変化に伴う x_0 および Ω の変化を式 (4.3) の数値計算により求めたもので、上記の非振動解は $r = 1.85$ に対応する。それゆえ $r \leq 1.85$ ではもはや非振動解は存在することはないであろう。方程式 (4.3) を解くのに用いた方法は \hat{x}_0 を一定に保ち、 $F(x_0) = x_0^4 \cdot J_0(x_0)/J_2(x_0)$ と置くときの $\text{Imag}\{F(x_0)\} = 0$ を満たす $\text{Arg}(x_0)$ を求め、次に $\text{Real}\{F(x_0)\} = r^4$ から

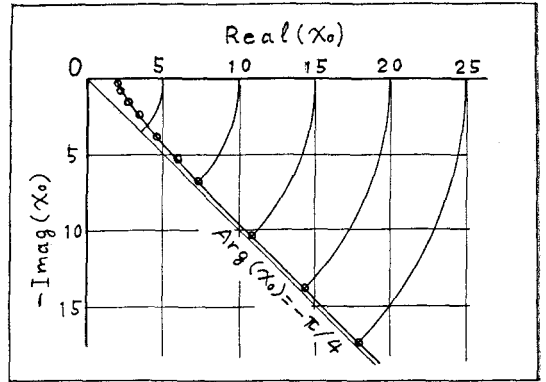


図-2 $\text{Imag}\{F(x_0)\} = 0$ の根の軌跡

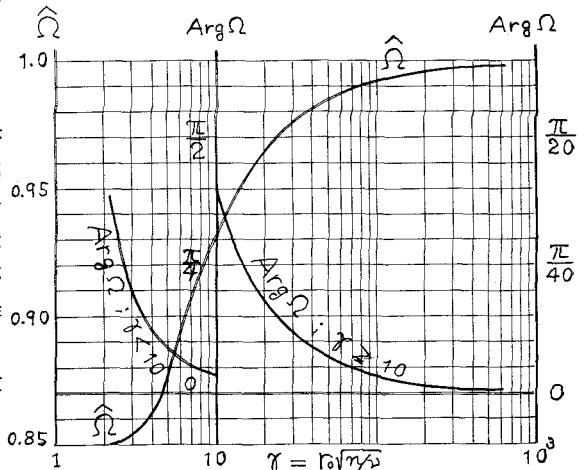


図-3 層流時複素角速度 Ω

x_0 に対応する r を計算した。 x_0 と r が定まれば $x_0 = r\sqrt{-j\Omega}$ から無次元複素角速度 Ω が決定される。 r に対応する Ω が定まれば、層流時自由振動における速度、せん断応力等の分布は、式 (3.6)、(3.7) により計算される。それらの振幅ならびに位相の分布を図-4、図-5 に示す。

(2) 乱流時自由振動における複素角速度

すでに 3. の速度およびせん断応力の分布の項で述べたように、渦動粘性係数 ϵ が空間座標および時間とは無関係に $\epsilon = \alpha \hat{v}_{*0} r_0$ で表わされるとき、層流時の動粘性係数 ν に替えて渦動粘性係数 ϵ を用いる点を除いては、速度およびせん断応力の表現は同じであるが、 ϵ の計算に必要な \hat{v}_{*0} は次式を満足せねばならない。

$$\hat{v}_{*0}^2 = -\frac{r_0 g I'}{x_0'} \cdot \frac{J_1(x_0')}{J_0(x_0')} \dots\dots\dots(4.6)$$

一方、 $V' = j\omega \epsilon$ より前節同様式 (4.7) が得られ、式 (4.6)、(4.7) より x_0' を消去することにより式 (4.8) が得られる。

$$\Omega^2 = 1 - \frac{2 J_1(x_0')}{x_0' \cdot J_0(x_0')} \dots\dots\dots(4.7)$$

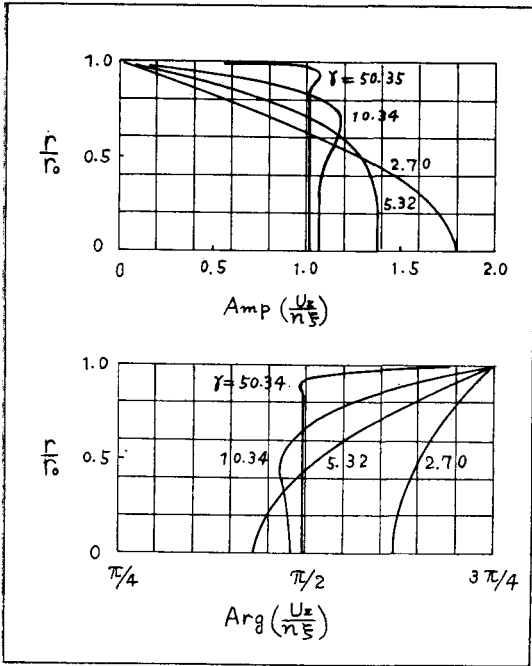


図-4 層流時速度分布 (振幅, 位相)

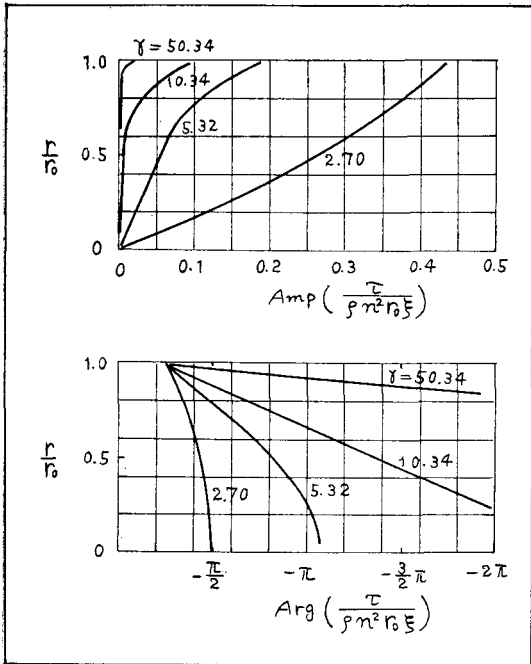


図-5 層流時せん断応力の分布 (振幅, 位相)

$$v_{*0}^2 = \frac{r_0}{2} n^2 \xi (1 - \Omega^2) \dots\dots\dots (4.8)$$

摩擦速度に関するレイノルズ数 $R_* = v_{*0} r_0 / \nu$, $\hat{R}_* = \hat{v}_{*0} r_0 / \nu$ を導入し, 層流時の動粘性係数 ν の替りに渦動粘性係数 ϵ が使われていることを考慮しつつ式 (4.7) の Ω を x_0' で置き替えれば, $F(x_0) = x_0^4 \cdot J_0(x_0) / J_2(x_0)$ で定

義される $F(x_0)$ により式 (4.9) が得られる。

$$F(x_0') = \frac{r^4}{\alpha^2 \hat{R}_*^2} \dots\dots\dots (4.9)$$

式 (4.9) において $\text{Imag}\{F(x_0')\} = 0$ の根である x_0' が求まると式 (4.7) により Ω が計算され, 式 (4.8) より v_{*0} が水粒子平均変位 ξ の関数として定まる。

また式 (4.8) を用いて式 (4.9) における \hat{R}_* を消去すれば次式が得られる。

$$\frac{1}{\text{Real}\{F(x_0')\}} = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{\xi}{r_0} \cdot \text{Amp}(1 - \Omega^2) \dots\dots\dots (4.10)$$

式 (4.10) より明らかなように, 乱流時の自由振動を表わす x_0' , Ω には新しいパラメーター ξ/r_0 が対応し, 層流時を支配したパラメーター r とは無関係になる。それゆえ, もしも式 (4.10) における α があるパラメーター, おそらくは ξ/r_0 の関数として実験的に定められるならば, 乱流時における複素角速度が ξ/r_0 の関数として定まるであろう。

5. 実験の手順と方法, ならびに結果

(1) 実験の概要

本論文における実験の目的は次の4項目である。

- (a) ポテンシャル流の仮定に基づく圧力分布の近似度
- (b) 層流解の近似度
- (c) 層流解の適用限界
- (d) 乱流時の減衰率と α , ξ/r_0 との関係

具体的測定対象としては (a) は圧力測定, (b)~(d) は水位測定となる。層流解によればある限度内のレイノルズ数に対しては, 自由振動の減衰率と周期は無次元パラメーター r だけの関数となるから, もし層流解が実測の結果とよい一致を示すならば, レイノルズ数を徐々に増加させることにより層流解からずれ始める条件が定まるであろう。またさらにレイノルズ数を増すならば, 乱流解から予想されるように減衰率と周期は ξ/r_0 で表わされる無次元振幅だけに依存するであろう。

上述の観点から項目 (b) では微小振幅用 U 字管を, 項目 (c), (d) では長大 U 字管を用いた。測定に用いた U 字管類の種類と形状を表-1 に示す。

(2) 大振幅水位計の製作

筆者らは従来国司⁷⁾ による方法を用いて実験室における水位測定を行なってきたが, 長大 U 字管の水面振動では最大振幅 4 m の測定を要するので演算増幅器を用いて以下に述べる水位計を製作した。水位の検出は U 字管直立部の内壁に 2 本の錫めっき銅線を貼り, 水没長 l' の

表-1 U字管類形状寸法

	管径 $2r_0$ (cm)	管長 l (cm)	パラメーター r $r = r_0 \sqrt{n/\nu}$	備考
小 振 幅 U 字 管	1.0	488	6.17	層流 $\xi < 20$ cm
	1.0	196	7.32	
	2.0	500	11.9	
	2.0	200	14.1	
	3.0	496	18.8	
	3.0	188	21.8	
	4.1	381	31.8	
	5.0	543	35.5	
	10.0	657	67.2	
	10.0	1059	59.6	
大 振 幅 U 字 管	3.0	1572	16.1	$\xi < 200$ cm
	5.0	1620	26.3	"
	10.0	1740	51.5	"
	3.0	1372	16.4	$\xi < 400$ cm
	5.0	1420	27.3	"
	10.0	1540	53.0	"

変化に伴う交流回路の電流変化として検出した。円管断面内の任意の直径の両端を通る円筒母線と合致するように2本の細い電線を管壁に貼布するとき、水没長 l' と電極間抵抗の関係を図-6 に示す。同図は平行線型ならびに同軸円筒型電極間で測定された片野⁸⁾の結果と同様に、電極間抵抗が水没長に逆比例すること、および管径 10~50 cm では管径による差異が非常に小さいことが示されている。検出部から記録器に至る間の測定回路を図-7 に示す。この回路では、定電圧電源は商用 50 Hz, 100 V をトランスで 3 V に下げて用いている。それゆえ、最初のアンプで増幅された振幅変調の交流波を半波整流した後にカットオフ周波数 1 Hz のローパスフィルターにかけ、第2のアンプにつないでいる。この水位計は小振幅における感度の点ではブリッジを用いる方法に

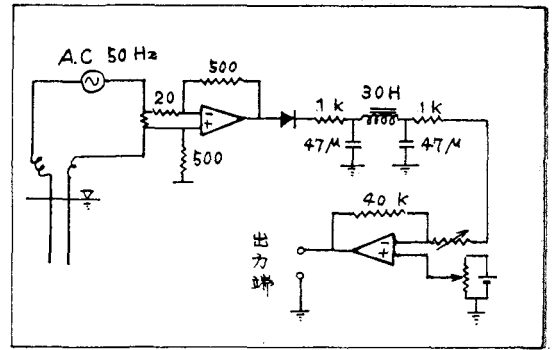


図-7 大振幅水位計回路図

劣るが、振幅変動範囲の非常に広い測定には便利であり、直線性は非常によい。電源に費用をかけ得るならば、電源周波数をより高く選ぶことにより、周波数の高い水面振動をも測定できる。

(3) U字管内の圧力分布

U字管の管壁における圧力の実測値をポテンシャル流の仮定に基づき計算された式(2.4)と比較したのが図-8 である。圧力測定は管壁に外径 6 mm, 内径 3 mm の真鍮管を先端がU字管内面に達するよう取付け、そこからビニールチューブにより圧力計受感部まで導き電気的に測定した。圧力計は共和電業製 MPC-1 SA で、動的ひずみ計と接続し、直記式電磁オシログラフに記録させた。圧力の測定箇所および測定条件は図-8 に示すとおりである。測定結果は若干のずれを除けば式(2.4)による計算値と比較的よく合っていると判断される。

(4) U字管における層流時の減衰率と周期

管径 1, 3, 5, 10 cm の U 字管における振幅 20 cm 未満の水面振動の減衰率と周期について理論値と実測値を比較したものが図-9 である。同図における実測の減

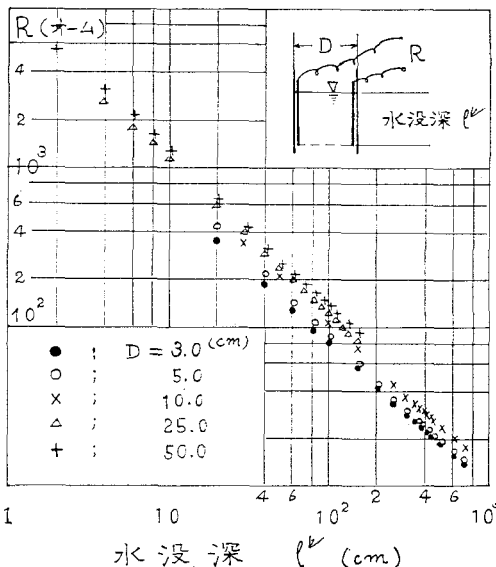


図-6 交流 50 Hz における水没深と電極間抵抗 (円形水槽)

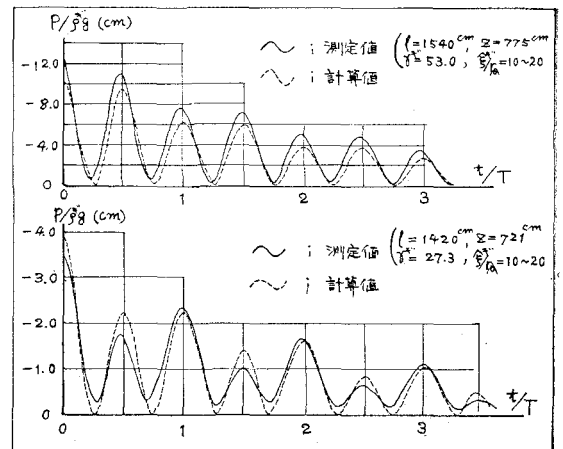


図-8 U字管中央部における圧力

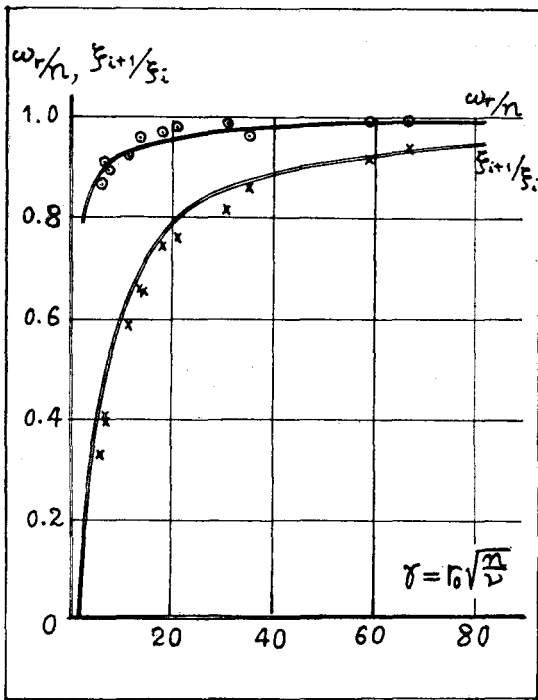


図-9 層流時における減衰率と周期

衰率は隣り合うピークの比を平均したもので図中に×印で記入してある。図中で減衰率を ξ_{i+1}/ξ_i と記したのは最初から i 番目のピークから次のピークに至るまでの振幅の減衰を表わすためである。また計算上のそれは複素角速度 $\omega = n \Omega = \omega_r + j\omega_i$ に基づき減衰率 $= \exp(-2\pi \cdot \omega_i/\omega_r)$ から求められる。

実測の周期は隣り合うピークの時間間隔をオシロの記録から読みとり $\omega_r = 2\pi/T$ から実測の ω_r を計算し n により無次元化し○印で記入した。図中の実線は理論値を表わす。同図における実測値は減衰率、周期とも理論値とほぼ完全に一致し、これにより次の結論が導かれる。

i) 層流時のU字管内自由振動における減衰率、周期は層流解における複素角速度から計算される結果と完全に一致する。

ii) 層流解に基づく理論的予想値から実測の減衰率がずれ始めるとすれば、それは層流からの遷移の開始を示すものと判断される。

(5) 層流解の適用限界

振動板の境界層遷移に関する Huon Li⁹⁾ および Manohar¹⁰⁾ の研究によれば振動板角速度 n 、振幅 a_b' において特性速度に na_b' 、特性長に $\delta = \sqrt{\nu/n}$ を選べば遷移を表わす限界レイノルズ数は滑らかな場合、 $a_b' \sqrt{n/\nu} = 400$ である。一方波動境界層に関しては Brebner¹¹⁾、

Collins による $\bar{U}_b \delta/\nu = 113$ が報告されている。ここで \bar{U}_b は水底面での波動による流速の振幅を表わす。円管内振動流においては特性速度に $n\xi$ を、また特性長に $\delta = \sqrt{\nu/n}$ を選ぶならばレイノルズ数は $\xi \sqrt{n/\nu}$ で表わされる。無次元パラメーター r を用いれば $R_e = r(\xi/r_0)$ である。内径がそれぞれ 3, 5, 10 cm, 直立部の高さ約 7 m の長大U字管を用いて R_e 数と減衰率の関係を実験により求めたのが 図-10 である。この実験で用いられた3種類の管径に対応するパラメーター r の値は 53.0, 27.5, 16.4 で、同図左上隅に記入されている 0.917, 0.843, 0.750 の数値とそこから始まる水平に引かれた点線はそれら3種類の r に対応する層流解から計算された減衰率を表わしている。同図における3種類の測点群は隣り合うピーク間の減衰率をそのままプロットしたもので平均値ではない。それら3種類の測点群は多少のばらつきにもかかわらず、 $R_e = 300$ の付近で層流解に収れんしており、これにより円管内振動流における限界レイノルズ数は約 300 であると判断される。それゆえ 3.(1) の層流時の速度、せん断応力の分布、ならびに 4.(1) の層流時自由振動の複素角速度に関する理論解の適用範囲は $\xi \sqrt{n/\nu} \leq 300$ と結論される。

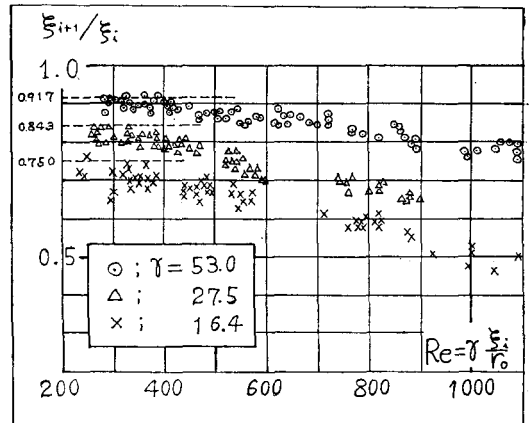


図-10 R_e 数の増加に伴う層流解からのずれ

(6) U字管の自由振動における乱流時減衰率

4.(2) の考察に従えば十分に発達した乱流状態におけるU字管内自由振動の減衰率は層流時を支配するパラメーター r とは無関係に無次元振幅 ξ/r_0 のみに支配されると予想される。U字管の自由水面のうちいずれか一方の水面変位に着目すれば水面変位のある極大値 $(\xi_{max})_i$ から始まって次の極小値 $(\xi_{min})_i$ までの間は $(\xi_{max})_i/r_0$ に支配され、極小値 $(\xi_{min})_i$ から次の極大値 $(\xi_{max})_{i+1}$ までの間は $(\xi_{min})_i/r_0$ に支配されるであろう。しかしながらU字管の水面振動における下降時の水面変位は、水面が平面形でなくなるために正確な測定ができない。

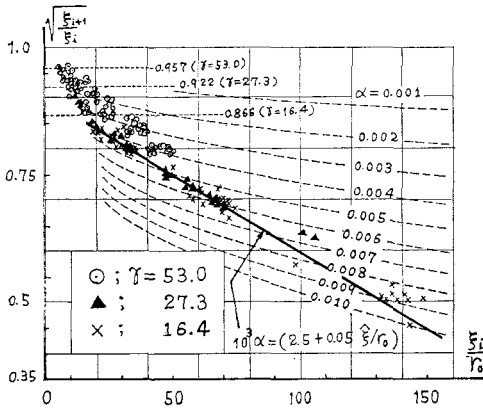


図-11 乱流時における無次元振幅と半周期減衰率

そのためにわれわれの水位測定法によっては極小値 $(\hat{\xi}_{\min})_i$ は測定不能である。それゆえ、便宜的に $(\hat{\xi}_{\max})_i / r_0$ に対応する半周期減衰率 $(\hat{\xi}_{\min})_i / (\hat{\xi}_{\max})_i$ の替りに $\sqrt{(\hat{\xi}_{\max})_{i+1} / (\hat{\xi}_{\max})_i}$ で代用し、無次元振幅 $\hat{\xi}/r_0$ と半周期減衰率の関係を図示したのが 図-11 である。同図の座標軸に沿う記号 $\hat{\xi}_i$ は i 番目の極大値 $(\hat{\xi}_{\max})_i$ を略記したもので図中の α の数値とそれに沿う破線は式 (4.10) において α が一定としたときの $\hat{\xi}/r_0$ と半周期減衰率との関係を示している。また同図の左上隅から水平に引かれた点線とそこにおける数値は層流解に基づく半周期減衰率を示したもので、これら 3 本の水平な点線とそれに対応する測点群との交点の横座標はほぼ $300/r$ を表わしている。同図において $r=53.0$ の測点群は設備上の制約のため $\hat{\xi}/r_0 < 50$ の範囲に限られており、 $r=27.3$ および 16.4 の測点群と完全に重なる領域の存在を断定することはできない。しかしながら $r=27.3$ および 16.4 に関しては若干のばらつきを無視するならば管内振動流中の乱流構造は $\hat{\xi}/r_0$ の値が 20 ないし 30 に達するとほぼ r と無関係に $\hat{\xi}/r_0$ だけに依存すること、および渦動粘性係数 $\epsilon = \alpha \hat{v}_* r_0$ で定義される無次元比例定数 α はユニバーサルな定数ではなくて $\hat{\xi}/r_0$ の関数であることが結論される。図-11 における太い実線と $\alpha =$ 一定の曲線群との交点は $\hat{\xi}/r_0$ と α の関係を表わすものと考えられ、 $20 \leq \hat{\xi}/r_0 \leq 150$ の範囲内で

$$\alpha = (2.5 + 0.05 \hat{\xi}/r_0) \times 10^{-3} \dots\dots\dots (5.1)$$

の関係が得られる。これらの結果は Hinze⁶⁾ に引用されている Laufer および Nunner による管内定常流中での実測に基づく ϵ の分布が両者の実験で用いられたレイノルズ数の相違に応じて管中央部において異なっていることからもうなづけることである。上記の実験式 (5.1) に基づき計算された乱流時複素角速度 $\hat{\Omega}$ を図-12 に、また $\hat{\xi}/r_0$ をパラメーターとした乱流時の速度およびせん断応力の分布を図-13、図-14 に示す。

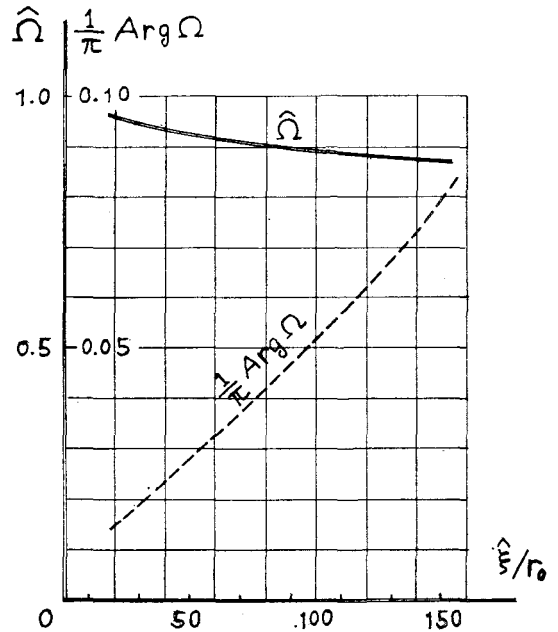


図-12 乱流時複素角速度 (振幅, 位相)

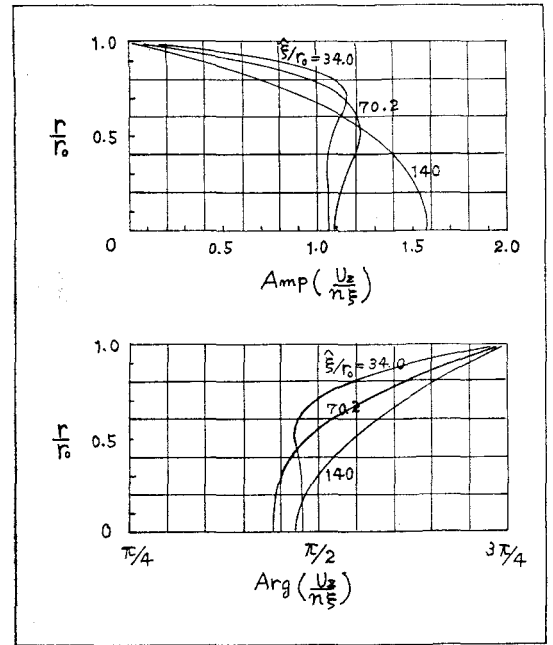
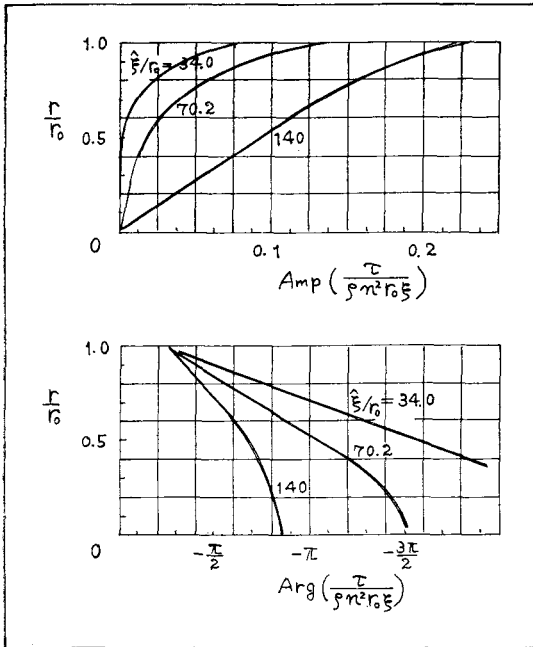


図-13 乱流時速度分布 (振幅, 位相)

6. 結 言

これまでの議論において管内振動流中の速度、せん断応力の分布を、任意の複素角速度を有する周期運動の仮定の下に解くことにより、自由振動が連続条件より定まる複素角速度によって表わされることを導いた。層流時



図—14 乱流時剪断応力分布 (振幅, 位相)

の減衰率と周期は振幅とは無関係に $r = r_0 \sqrt{n/\nu}$ で定義される無次元パラメーターにより決定され、層流解の適用範囲は $\xi \sqrt{n/\nu} \leq 300$ である。また乱流時の管内振動流はあたかも粘性の増した流体のそれであるかのようにみなすことができ、自由振動を表わす複素角速度はレイノルズ数 $\xi \sqrt{n/\nu}$ が十分大きいときには無次元振幅 ξ/r_0 に主として依存すること、また渦動粘性係数 $\varepsilon = \alpha v_* r_0$ で定義される無次元比例定数 α は ξ/r_0 により変化すること等が明らかにされた。

しかしながら本論文において用いられた乱流構造に対する推測方法は間接的、かつ不十分であり、壁面の粗滑に伴う乱流構造の差異等は考慮されていない。それというのは振動する乱流中での渦動粘性係数 ε がなぜ摩擦速度の振幅 v_* により時間とは無関係に記述できるかについて確かな論拠を持っていないからで、このような基本的疑問を残したままですのような補足的仮定も具体性を持ち得ないと判断されたからである。壁面の粗滑、 ε の空間的、時間的変動などはいずれ実測等に基づき補

れねばならないし、管路の曲がりの具体的影響等も考慮されねばならないと考える。

一方管内自由振動の減衰性の問題と最も密接な関係にあると思われるサージタンク系への適用にあたっては、最も単純な場合に対しても断面急変部の影響をとり入れることができないのであるが、それらサージタンク系の制御ならびに減衰計算等に関して懇切なご指導を賜った電力中央研究所 千秋信一、是枝 忍の両氏に厚くお礼申し上げます。なお、大振幅U字管の実験にあたり東京都立大学工学部 山本稔教授、同衛生工学研究室 生方悠の両氏には実験上の便宜を、また大振幅水位計の製作に際しては同電気工学科 小島健治氏より貴重な助言をいただいたことを付記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Sexl : Über der von E.G. Richardson entdeckten Annulareffekt, Z. Phys., 61, 1930.
- 2) Kajiura, K. : On the bottom friction in an oscillatory current, Bull. Earthquake Res. Inst., 42, 1964.
- 3) Kajiura, K. : A model of bottom boundary layer in water waves, Bull. Earthquake Res. Inst., 46, 1968.
- 4) Jonsson : Measurements in the turbulent wave boundary layer, 10th Congr. I.A.H.R. London, Vol. 1, 1963.
- 5) 橋本 宏 : 振動流による底面摩擦係数の測定, 第26回土木学会年次学術講演会講演集, 1971.
- 6) Hinze : Turbulence, McGraw Hill, 1959.
- 7) 国司秀明 : 電気抵抗式波高計の設計について, 京都大学防災研究所報告, Vol. 3, 1959.
- 8) 片野尚明 : 水理実験用電気的水位計の改良, 電力中央研究所報告, 土木 No. 65002, 1959.
- 9) Huon Li : Stability of oscillatory laminar flow along a wall, Beach Erosion Board Tech. Memo., No. 47, 1954.
- 10) Manohar, M. : Mech. of bottom sediment due to wave action, Beach Erosion Board Tech. Memo., No. 75, 1955.
- 11) Brebner, A. : The effect of roughness of the mass transport of progressive gravity waves, 10th Conf. on Coastal Eng. in Tokyo, 1966.
- 12) Horikawa, K. and Watanabe, A. : Laboratory study on oscillatory boundary layer flow, 11th Conf. on Coastal Eng. in London, 1968.
- 13) 安川 宏・田川昌宏 : 粘性振動の減衰性に関する研究, 第26回土木学会年次学術講演会講演集, 1971.

(1972. 5.12・受付)