

トラス構造物の実用的最適設計に関する研究

PRACTICAL OPTIMIZATION OF TRUSS

杉 本 博 之*
By Hiroyuki Sugimoto

1. ま え が き

構造物の最適設計について、最近多くの論文が発表されており、従来経験的になされていた構造物の設計を、より合理的に行なうことが可能になってきた。

同時に、最適設計手法全般にわたって、多くの問題点が指摘されており、その中の一つに、最適設計の実用化の問題というのがあった。

最適設計手法の、より複雑で大規模な土木構造物への応用をむずかしくしている理由に、次の2点があると思われる。

第1は、設計変数を減少させるために、トラス構造物においては、部材寸法と部材断面積、許容圧縮応力と部材断面積の関係式など、設計変数間の従属な関係にあるものどうしの関係式を導く（以下に、これをサブオプティミゼーションとする）必要があるわけなのだが、従来発表されている論文では、サブオプティミゼーションを無視するか、断面形状を理想化した上での関係式を誘導したものであり、鋼種もSS41のみであったということもあって、実際の設計に採用するのは困難であった。

第2は、非線形計画法の問題である。多くの構造物の最適設計は、種々の非線形計画法の解法（たとえば、SLP法、MG法、SUMT法等）を用いて研究がなされているが、それらの方法は、それぞれ一長一短があり、橋梁のように複雑で、多くの部材を有する構造物の設計には、適用がむずかしかったり、計算時間の点で、経済上成り立たなくなる場合もあるようである。

そこで、筆者は、第1の点については、新しく制定された道路橋示方書に従い、ボックス断面とH型断面のサブオプティミゼーションを行ない、実際のトラス構造物で使用されているように、前者については、断面の幅 B を拘束したもとの、後者については、高さを拘束したもとの、任意鋼種における断面寸法—断面積、許容圧縮

力—断面積の関係式を誘導し、設計変数を減少すると同時に、実際的な応用を可能にした。

次に、第2の点については、全応力設計法を基本にした最適設計法（かりにこれを修正全応力最適設計法とする）により、非常に簡単な考え方で、最適解を得ることができ、第2の問題点を解決した。

なお、この方法によって得られる結果は、局所的最適解であり、それが全域的な最適解であるかという検討は行っていない。

また、前述のサブオプティミゼーションの成果と、この設計手法を応用して、鋼種を設計変数に含み、鋼材費を目的関数とする設計法に関して一提案を行ない、若干の計算例とともに報告するものである。

サブオプティミゼーション、およびボックス断面のサブオプティミゼーションについては、文献1)、2)、H型鋼については、文献4)、また、全応力設計と最適設計の関係を述べたものに、文献5)、6)がある。

2. 記号の定義

A : 部材断面積 (cm^2)

B : トラス構造物で、すべての部材について等しい断面の幅 (cm)

x_1, x_2, x_3 : 箱型断面の断面寸法 (cm)

t_1, t_2, x_f : H型断面の断面寸法 (cm)

r : 弱軸に関する断面2次半径 (cm)

l : 部材長 (cm)

E : ヤング率 (kg/cm^2)

N : 部材数

k_i : 道路橋示方書に規定してある、鋼種により変わる各定数 ($i=1\sim7$)

a_1, b_1, a_2, b_2 : 箱型断面の r - A 曲線の係数

a, b, c : H型断面の r - A 曲線の係数

F_0 : 作用軸力

F_{ca} : 許容圧縮力

* 学生会員 北海道大学大学院博士課程 土木工学専攻

- σ_{ca}, σ_a : 許容圧縮応力, 許容応力
- M : 目的関数
- α_{ij} : 価格係数 (鋼種 j の鋼種 i に対する価格の比)
- d : d 値
- $\underline{A}_i, \bar{A}_i$: 鋼種 i の使用に適する区間の下限および上限断面積
- I : 単位マトリクス
- 本文の構造解析には, 変位法を用いているので, 以下に, 簡単にその記号の定義をする。
- N : 構造物の部材数
- NP : 構造物の自由度数
- NLC : 作用する荷重条件の数
- D : 外力と内力を結びつけるマトリクス ($NP \times N$)
- S : 内力と変形を結びつけるマトリクス ($N \times N$)
- P : 外力のマトリクス ($NP \times NLC$)
- F : 内力のマトリクス ($N \times NLC$)
- X : 変位のマトリクス ($NP \times NLC$)
- 内力および変位は, 次式で計算できる。

$$F = SD^T X$$

$$X = K^{-1} P$$

ここで

$$K = DSD^T$$

である。

3. 軸力を受ける部材のサブオプティミゼーション

新しく制定された道路橋示方書によると, 許容軸方向圧縮応力度は, 次のように表現できる。

$$\sigma_{ca} = j_1 \times \left[k_1 - j_2 k_4 \left(\frac{l}{r} - k_2 \right) \right] + (1 - j_1) \frac{1.2 \times 10^7}{k_3 + (l/r)^2} \dots \dots \dots (1)$$

ここで,

$$l/r \leq k_2; j_1 = 1, j_2 = 0$$

$$k_2 < l/r < k_3; j_1 = 1, j_2 = 1$$

$$k_3 \leq l/r; j_1 = 0, j_2 = 1$$

また, 定数 k_i は, 各鋼種により表-1 のように定まる。

トラス構造物の最適設計におけるサブオプティミゼー

表-1 鋼種による定数 k_i

	SS 41, SM 41, SMA 41	SS 50	SM 50	SM 53, SM 50 Y, SMA 50	SM 58, SMA 50
k_1	1400	1700	1900	2100	2600
k_2	20	17	15	14	14
k_3	93	86	80	76	67
k_4	8.4	11.3	13	15	21
k_5	6700	5700	5000	4500	3600
k_6	40	36	34	32	28
k_7	13	12	12	11	10

ションとは, まえがきにも述べたように, 部材寸法—断面面積, 許容圧縮応力—断面面積の関係を誘導することである。それは, 式 (1) の形から, 作用外力に関係なく, ある部材断面面積に対して, 最大の断面 2 次半径を期待できる断面寸法の決定という問題に帰す。

このような考え方で, ボックス断面, H 型断面について, サブオプティミゼーションを行なった結果を以下に示す。

なお, ボックス断面の場合の許容応力—断面面積の理論解の誘導の過程については, 文献 9) にくわしいので, ここでは, 結果のみを述べることにする。

(1) ボックス断面

ボックス断面について考慮している拘束条件は, 道路橋示方書 3-1-6, 3-2-1 の板厚に関する規程および 10-2-1 の (3) である。

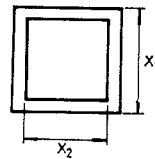


図-1 正方形断面の断面寸法

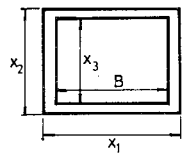


図-2 内幅 B を固定した断面の断面寸法

a) 軸力を受ける部材断面を正方形と仮定した場合

① $2.56 \leq A \leq 2.56(k_6 + 1)$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0.3125 A + 0.8 \\ x_2 &= 0.3125 A - 0.8 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1)$$

$$r = \sqrt{\frac{(0.3125 A)^2 + 0.64}{6}} \dots \dots \dots (2.2)$$

② $2.56(k_6 + 1) < A$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{k_6 + 2}{2\sqrt{k_6 + 1}} \sqrt{A} \\ x_2 &= \frac{k_6}{2\sqrt{k_6 + 1}} \sqrt{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.1)$$

$$r = \sqrt{\frac{k_6^2 + 2k_6 + 2}{24(k_6 + 1)}} \sqrt{A} \dots \dots \dots (3.2)$$

b) 軸力を受ける部材断面の内幅 B を固定した場合

内幅 B を固定した断面は, トラス構造物において, 弦材および端柱を対象としている。

この場合も, 正方形断面の場合と同様に, $r-A$ 曲線の厳密式は誘導されるが, 非常に複雑になるので, $r-A$ 曲線については近似式を用いることにする。

i) $B \leq 0.8 k_6$

① $1.6(B + 1.6) \leq A \leq 1.6(2B + 1.6)$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= B + 1.6 \\ x_2 &= 0.625 A - B \\ x_3 &= 0.625 A - (B + 1.6) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.1)$$

$$r = a_1 A + b_1 \dots \dots \dots (4.2)$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{aligned} 1.6(2B+1.6) < A \\ x_1 = x_2 = \sqrt{B^2 + A} \\ x_3 = B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.1)$$

$$r = \sqrt{\frac{2B^2 + A}{12}} \dots\dots\dots(5.2)$$

ii) $B > 0.8 k_6$

$$\textcircled{1} \quad \frac{2B}{k_6}(B+1.6) \leq A \leq \frac{2B^2}{k_6} + \frac{3.2B}{k_6} + 1.28 k_6$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 = B + 1.6 \\ x_2 = 0.625 A - 1.25 B^2/k_6 \\ x_3 = 0.625 A - 2B(0.625 B + 1)/k_6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.1)$$

$$r = a_1 A + b_1 \dots\dots\dots(6.2)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2B^2}{k_6} + \frac{3.2B}{k_6} + 1.28 k_6 < A \leq \left(\frac{2B}{k_6}\right)^2 (1 + k_6)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 = B - \frac{2}{k_6} \left(\frac{B}{k_6} - \sqrt{\left(\frac{B}{k_6}\right)^2 - \left(B^2 - \frac{k_6}{2} A\right)} \right) \\ x_2 = \frac{B}{k_6} + \sqrt{\left(\frac{B}{k_6}\right)^2 - \left(B^2 - \frac{k_6}{2} A\right)} \\ x_3 = -\frac{B}{k_6} + \sqrt{\left(\frac{B}{k_6}\right)^2 - \left(B^2 - \frac{k_6}{2} A\right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7.1)$$

$$r = \sqrt{a_2 A + b_2} \dots\dots\dots(7.2)$$

$$\textcircled{3} \quad \left(\frac{2B}{k_6}\right)^2 (1 + k_6) < A$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_2 = \sqrt{B^2 + A} \\ x_3 = B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8.1)$$

$$r = \sqrt{\frac{2B^2 + A}{12}} \dots\dots\dots(8.2)$$

上式中の各係数 a_1, a_2, b_1, b_2 は、それぞれの区間の断面寸法の式を用い、区間の両端の値を用いて求めることにする。

許容圧縮応力一断面積の関係式は、式 (2.2)~(8.2) を式(1) に代入することにより得ることができる。

腹材等にボックス断面を使用することもあり、その場合、外幅を拘束したボックス断面のサブ最適化を行なわなければならないが、内幅を拘束した場合とほとんど同じであるので略する。

(2) H型断面

軸力を受けるH型断面のサブ最適化において、主にトラス構造物の腹材を対象としているので図-3の高さBを拘束するものとする。

H型断面の設計に必要な拘束条件は、道路橋示方書 3-2-1, 3-2-2 より次の2式である。

$$t_1 \geq \max\left(\frac{x_f - t_2}{2k_7}, 0.8\right) \dots\dots\dots(9)$$

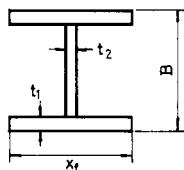


図-3 H型断面の断面寸法

$$t_2 \geq \max\left(\frac{B - 2t_1}{k_6}, 0.8\right) \dots\dots\dots(10)$$

k_6, k_7 は表-1を参照。

この問題は、ボックス断面の場合と同様に、ある断面積Aに対して、最大の断面2次半径rを期待できる断面寸法の決定という問題に帰す。そうすると、H型断面の幾何学的形状から、板厚は t_1, t_2 とも薄ければよいことになり、式 (9), (10) を等号にした式が板厚を決定する式となり、未知量は、フランジ幅 x_f のみになる。

これらのことより、板厚の組み合わせは4通り考えられ、それぞれの組み合わせにおいて x_f を求めると以下のようになる。

① $t_1 = 0.8, t_2 = 0.8$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \text{この組み合わせになるのは,} \\ B \leq 0.8 k_6 + 1.6 \text{ かつ} \\ A \leq 0.8 B + 2.56 k_7 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

のときで、このとき、

$$x_f = \frac{A - 0.8 B}{1.6} + 0.8 \dots\dots\dots(12)$$

② $t_1 = 0.8, t_2 = (B - 1.6)/k_6$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \text{この組み合わせになるのは,} \\ B \geq 0.8 k_6 + 1.6 \text{ かつ} \\ A \leq B(B - 1.6)/k_6 + 2.56 k_7 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

のときで、このとき、

$$x_f = \frac{1}{1.6} \left\{ A - \frac{(B - 1.6)^2}{k_6} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

③ $t_1 = 0.5(x_f - 0.8)/k_7, t_2 = 0.8$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \text{この組み合わせになるのは,} \\ B < 0.8 k_6 \text{ かつ } A \geq 0.8 B + 2.56 k_7 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

あるいは、

$$\left. \begin{aligned} B \geq 0.8 k_6 \text{ かつ} \\ A \geq \max[0.8 B + 2.56 k_7, 0.8 B \\ + (B - 0.8 k_6)^2 k_7] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

の場合で、このとき、

$$x_f = 0.8 + \sqrt{k_7(A - 0.8 B)} \dots\dots\dots(17)$$

④ $t_1 = 0.5(k_6 x_f - B)/(k_6 k_7 - 1), t_2 = (B k_7 - x_f)/(k_6 k_7 - 1)$ の場合

この組み合わせになるのは、①, ②, ③に当てはまらない場合で、このとき、

$$x_f = \frac{B(3k_6 k_7 - 1) + \sqrt{B^2(3k_6 k_7 - 1)^2 - 4k_6^2 k_7 \{B^2 k_6 k_7^2 - (k_6 k_7 - 1)^2 A\}}}{2k_6^2 k_7} \dots\dots\dots(18)$$

これらの式を使って、r-A 曲線を求めると、一般的に、図-4 のようになり、I, II, III の3種類の曲線よりなっていることがわかる。

図の A_* は次式により計算できる。

$$B \leq 0.8 k_6 + 1.6 \quad \left. \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_* &= 2.56 k_7 + 0.813 \\ B > 0.8 k_6 + 1.6 \\ A_* &= B(B-1.6)/k_6 + 2.56 k_7 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

曲線のⅢの部分は

$$r = r_u \dots\dots\dots(20)$$

と仮定し、 r_u は、鋼種を変数とする係数 a_u, b_u より次式で計算できる。

$$r_u = a_u B - b_u \dots\dots\dots(21)$$

Ⅱの部分は、

$$r = \sqrt{aA^2 + bA + c} \dots\dots\dots(22)$$

と仮定し、各係数は、 A_* および $A_* < A \leq A_u$ の他の2点の値を用いて計算する。

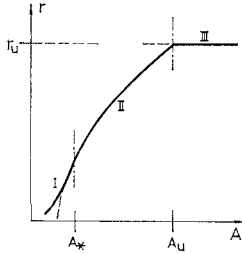


図-4 H型鋼の r-A 曲線

Ⅰの部分は、Ⅱの曲線を延長して用いる。これは、図-4の点線で示され、誤差が大きいと思われるが、細長比の制限で、Ⅰの曲線のうち使われるのは、 A_* に近い

表-2 r-A 曲線の各係数

鋼種	B	箱型断面				H型断面			
		a_1	b_1	a_2	b_2	$a(\times 10^4)$	$b(\times 10^2)$	c	r_u (cm)
SS 41	30	0.252	-12.3	0	0	3.16	99.0	-34.3	13.6
	40	0.266	-21.5	2.677	-158.7	4.37	91.8	-48.9	18.2
	50	0.277	-35.0	2.838	-289.2	7.49	73.1	-59.9	22.9
	60	0.285	-51.7	2.950	-457.9	10.21	51.1	-64.5	27.5
	70	0.290	-71.6	3.030	-663.3	12.24	27.9	-61.1	32.2
	80	0.293	-94.6	3.088	-904.3	13.55	4.6	-49.2	36.8
SM 50	30	0.258	-13.9	2.192	-79.8	1.65	95.4	-34.5	13.5
	40	0.274	-26.1	2.376	-177.5	5.16	79.7	-48.6	18.1
	50	0.283	-42.1	2.496	-313.9	8.29	59.2	-57.4	22.6
	60	0.289	-61.9	2.577	-487.1	10.77	36.1	-58.3	27.2
	70	0.293	-85.3	2.632	-695.8	12.44	12.5	-50.3	31.7
	80	0.296	-112.3	2.671	-939.2	13.35	-10.6	-32.4	36.2
SM 53	30	0.261	-14.9	2.100	-84.1	2.57	85.4	-32.1	13.5
	40	0.276	-28.0	2.268	-184.0	5.33	70.6	-45.2	18.0
	50	0.285	-45.1	2.376	-322.1	8.31	50.5	-52.2	22.5
	60	0.291	-66.1	2.446	-496.5	10.57	28.2	-51.5	27.0
	70	0.294	-90.9	2.494	-706.0	11.99	5.7	-41.9	31.5
	80	0.297	-119.6	2.528	-950.0	12.70	-16.1	-22.6	36.0

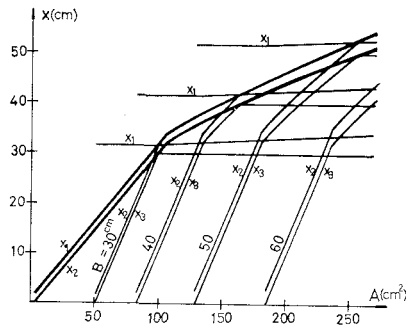


図-5 箱型断面の断面寸法

(太線：正方形断面，細線：内幅Bを拘束した箱型断面)

部分であるので影響は小さい。

許容圧縮応力-断面積の関係式は、式 (20)、(22) を式 (1) に代入することにより得ることができる。

表-2 は、以上のようにして求めた、ボックス断面および H 型断面の r-A 曲線の近似式の係数を示したものである。図-5 は、正方形および内幅Bを拘束した断面の断面寸法と断面積の関係、図-6 は同じく、断面2次半径と断面積との関係を示したものである。図-7

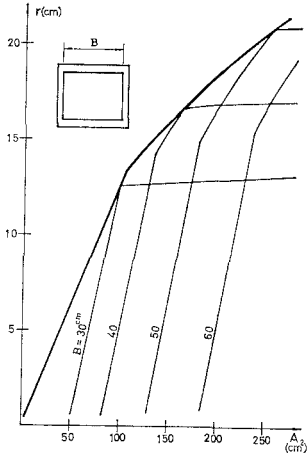


図-6 箱型断面の断面二次半径

(太線：正方形断面，細線：内幅Bを拘束した箱型断面)

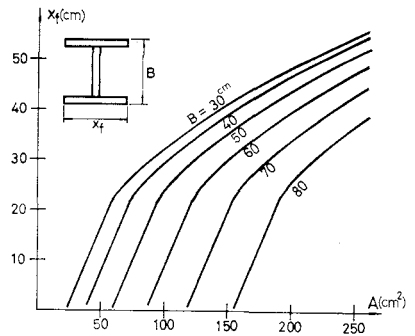


図-7 H型断面の断面寸法

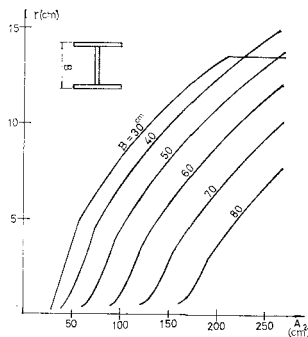


図-8 H型断面の断面2次半径

は、H 型断面の断面寸法と断面積の関係を、図-8 は同じく断面 2 次半径と断面積の関係を示したものである。鋼種はいずれも SS 41 の場合である。

4. 最適設計の手法に関する一提案

—修正全応力最適設計法—

まえがきにも述べたように、従来研究されている種々の非線形計画法は、それぞれ有効な方法であるが、実際の複雑な構造物の設計に応用するには、計算機の記憶容量、計算時間の点に問題があった。

以下に提案する設計法は、非線形計画法に属するものであるが、全応力設計法を基本とし、上の問題点を解決して、実際の橋梁の最適設計に応用しようとするものである。

(1) 修正全応力設計法

従来のトラス構造物の全応力設計は、まず部材断面積に任意の初期値を与え、それを用いて構造物を解き、内力を前回の設計変数に対する許容応力で除して 2 回目の部材断面積の値を得て、前回と今回の部材断面積の差がある限度以内になると収束したと見なしていた。

しかし、この方法は、許容応力が部材断面積の関数になる場合には、結果が振幅して計算上の技巧が必要であった。

そこで、内力の部材断面積による変化が、部材数が多いほど少ないということより、

$$F_0 = F_{ca}(A) \dots\dots\dots(23)$$

という高次（ボックス断面で 1~3 次、H 型断面で 1~4 次）の方程式を直接解く方法を採用し、収束を速めた。ここで、 F_0 は作用軸力であり、 F_{ca} は、

$$F_{ca} = A \times \sigma_{ca}(A) \dots\dots\dots(24)$$

なる許容軸方向圧縮力である。

また、細長比の制限

$$\left. \begin{aligned} l/r &\leq 120 \text{ (圧縮部材)} \\ l/r &\leq 200 \text{ (引張部材)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

により、部材断面積に下限があるわけだが、その値、式 (2.2)~(8.2)、(22) を式 (25) に代入して高次方程式 (1~2 次) を解くことにより得ることができ、応力の条件より求めた部材断面積が、その下限を犯す場合は下限に固定して計算を進めていった。

(2) 最適性の検討

4.(1) は全応力設計であって、その結果が、定めた目的関数に対して最適とは限らない。そこで、全応力設計の結果の最適性の検討を行ない、もし最適でないならばさらに最適化の過程が必要となる。

目的関数 M は、次式で計算される。

$$M = \sum_{i=1}^N c_i l_i A_i \dots\dots\dots(26)$$

ここで、 c_i は価格係数であり、目的関数が重量の場合は単位体積重量、目的関数が鋼材費の場合は単位体積当りの価格となる。

全応力設計で収束した結果が最適かどうかは、目的関数を $A_j (j=1 \sim N)$ で 1 回偏微分し（かりに、その値を d 値とする）その結果がすべて正ならば、全応力設計の結果は最適であり、もし負のものがあると、その部材の断面積を増加させることにより、目的関数を減少させるのであるから、最適ではないと判断する。

d 値の計算は以下のようにする。

$$d_j = \frac{\partial M}{\partial A_j} = \sum_{i=1}^N c_i l_i \frac{\partial A_i}{\partial A_j} \dots\dots\dots(27)$$

k を i 部材の断面を決定した荷重条件とすると、

$$A_i = \frac{F_{i,k}}{\sigma_{a,i}}$$

であるから、 $\partial A_i / \partial A_j$ の第 $(m+1)$ 近似は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_i^{(m+1)}}{\partial A_j} &= \frac{1}{\sigma_{a,i}} \sum_{v=1}^N G_{i,v} \times e_{v,j}^{(m)} \times C_{v,k} \\ &\quad - \frac{F_{i,k}}{\sigma_{a,i}^2} \times \frac{\partial \sigma_{a,i}}{\partial A_i} \times \frac{\partial A_i^{(m)}}{\partial A_j} \dots\dots(i \neq j) \\ &= 1 \dots\dots\dots(i=j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} G &= I - SD^T K^{-1} D \\ C &= D^T X \\ e_{i,j}^{(m)} &= \frac{E}{l_i} \frac{\partial A_i^{(m)}}{\partial A_j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

である。

式 (28) のように、 d 値は繰り返し計算になるが、実用上は第 5 近似で十分である。

また、式 (28) の計算において、 m 部材の断面積が、その下限で決定される場合は、その 1 回偏微分した値は次のように定めた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_m}{\partial A_j} &= 0 \quad (m \neq j) \\ &= 1 \quad (m = j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

さらに、構造系が対称で、 i 部材と j 部材が対称の位置にあるとすると、 A_j の A_i による偏微分も 1 と定めた。つまり、

$$\frac{\partial A_j}{\partial A_i} = 1 \quad (i \text{ と } j \text{ が対称}) \dots\dots\dots(31)$$

(3) 最適化

最適性の検討の結果、全応力設計が最適でないと判明すると、部材断面積を修正して、最適な値を求める必要

がある。

このとき、部材は、 d 値の負のもの(自由部材)と、正のもの(全応力部材)の2つに分けることができる。

このように、最適化の問題は非常に縮小され、問題は自由部材の断面積の決定と、それに対応した全応力部材の断面積の決定という2つの問題になる。

それは、以下のアルゴリズムで解くことができる。

d 値を計算した結果、自由部材は p 個 ($p < N$) あり、その中で、 d 値の最小の部材が k 部材であるとす。式 (28) より、 $g_{ij} = \partial A_i / \partial A_j$ を計算すると、 g_{ij} は、 j 部材の断面積の単位量変化による i 部材の断面積の変化を示している。

自由部材ということは、その部材の断面積を増加したほうが、目的関数をより減少し得る構造物を得ることができ、全応力部材とは、自由部材の変化に対応して、全応力設計をされる部材であるから、 A_k を ΔA_k だけ増加すると、ほかの部材の断面積は、近似的に次のように表わすことができる。

$$A_i^{(2)} = A_i^{(1)} + g_{ik} \times \Delta A_k \quad (i \neq k) \dots \dots \dots (32)$$

$$A_k^{(2)} = A_k^{(1)} + \Delta A_k$$

次に、これらの $A^{(2)}$ を用いて、再び d 値を計算し、すべて正ならば、最適解が得られたことになり、負のものがあれば、以上のアルゴリズムを繰り返すのである。

(4) 拘束条件に変位拘束を含む場合

4.(1)~4.(3)により、断面積に下限のある場合も含めて、応力の拘束条件による、トラス構造物の最適設計はできるが、その結果が、変位の上限(あるいは下限)を犯す場合がある。その場合の部材断面積の修正は、次のように行なうことができる。

一般に、変位のマトリクス X の断面積 A_i に関する1回偏微分は、次のように表わすことができる。

$$\frac{\partial X}{\partial A_i} = -K^{-1} D \frac{\partial S}{\partial A_i} D^T X \dots \dots \dots (33)$$

いま、自由度 j 、荷重条件 k の変位が拘束されているとすると、変位 X_{jk} の i 部材の断面積 A_i による1回偏微分は、次式で計算できる。

$$\frac{\partial X_{jk}}{\partial A_i} = -K_{j,i}^{-1} \times D_{,i} \times \frac{\partial S}{\partial A_i} \times D_i^T \times X_{,k} \dots \dots \dots (34)$$

ここで、 $\partial S / \partial A_i$ は i 行 i 列が E/l_i で他の要素はすべて0であるから、式 (34) は、次のようになる。

$$\frac{\partial X_{jk}}{\partial A_i} = -\frac{E}{l_i} K_{j,i}^{-1} \times D_{,i} \times D_i^T \times X_{,k} \dots \dots (35)$$

なお、式 (34)、(35) における $M_{,i}$ は、行列 M の i 列よりなる列マトリクス、 $M_{,j}$ は、 j 行よりなる行マトリクスの意味である。

たわみ制限などから、かりに、 x_{jk} が変位の許容限界 X_0 を犯したとする。式 (34) により、 $l_i / (\partial X_{jk} / \partial A_i)$ ($i=1 \sim N$) を計算し、その中で、負(上限がある場合は正)の絶対値が最小の部材を選び、それを m 部材とすると、

$$\Delta A_m = (X_0 - X_{jk}) / \frac{\partial X_{jk}}{\partial A_m}$$

を計算し、

$$A_m^{(2)} = A_m^{(1)} + \Delta A_m \dots \dots \dots (36)$$

のように、 m 部材だけ修正を行ない、変位の拘束条件を満足するまで、この過程を繰り返すのである。

なお、このとき、静定構造物の場合は問題ないが、不静定の場合は、 m 部材の断面積の増加により、内力の再配分が若干生じ、他の部材の断面積も計算する必要がある。その再配分の大きさを、ある程度に押えるために、不静定構造物では、式 (36) の ΔA_m に、上限をつけた方が精度がよく、その大きさは、 $10 \sim 30 \text{ cm}^2$ が適当であろう。

5. 鋼材費を目的関数とし、鋼種を設計変数に含む最適設計

設計変数に鋼種を含むということは、構造物の最適設計における、多くの問題点の一つであった。

しかし、いままで述べた、任意鋼種のサブオプティミゼーションおよび修正全応力最適設計法により、設計変数に鋼種を比較的容易に含めるので、以下に、説明する。

なお、鋼種は、問題を簡単にするために、(a) SM 41、(b) SM 50、(c) SM 50 Y の3種を考え、それぞれの鋼種の単価は、SM 41 に対する比で表わし、表-3 に示した。

表-3 価格係数

鋼 種	価格係数 α_{ij}
(a) SM 41	1
(b) SM 50	1.17
(c) SM 50 Y	1.25

このように、鋼材を3種類考えると、それぞれの部材において、 F_{ca} -A 曲線は、図-9 のように3本考慮しなければならない。し

たがって、鋼種を設計変数に含む最適設計においては、この3本の F_{ca} -A 曲線のすべての範囲を考えて鋼種を決定しなければならないが、そのような問題に対する有効な解法は、現在ないと思われる。

そこで、図-9 において、ある外力 F_0 に対して、最も鋼材費の安くなる鋼種を選択しプロットすると3本の曲線は、太線で示す非連続な1本の曲線となり、これをかりに、ある部材における F_{ca} -A 曲線と考えるのである。

この考え方は、一種のサブオプティミゼーションであり、また、厳密解ではないであろう。しかしながら、トラス構造物において、部材断面積の変動による内力の変

化は、少量であると思われるので、上述の考え方は、比較的良好的な近似解を与え得ると思われる。

以上のように、それぞれの部材に対して、非連続ではあるが、1本の F_{ca} - A 曲線が仮定され、この曲線に対して、前述の修正全応力最適設計法を応用するのである。

なお、最適性の検討に用いる d 値の計算式 (27) において、鋼種を設計変数に含む場合は、目的関数は、鋼材費となり、 c_i は表-3 の α_{ij} を採用する。

鋼種を決定するアルゴリズムにおいて、断面を正方形と仮定する場合は、外力 F_0 より、すぐ最適な鋼種を決定できるので、それを以下に説明する。

断面を正方形と仮定するのは、実際の設計においては意味がないと思われるが、最適設計の定性的な特性を理解するうえでは、有効である。

鋼種を前記の3種類だけ考えるとき、各鋼種間の許容圧縮力-断面積曲線の相対的關係は、ある部材長 l に対して、図-9 のようになる。

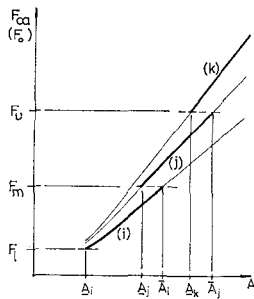


図-9 許容圧縮力-断面積曲線

それぞれ下限と上限を示す。

この限界断面積 A_i , A_i -bar ($i=a\sim c$) は、次の2式より計算される。

$$F_{ca,i}(A_i) = F_{ca,j}(A_j) \dots\dots\dots(37)$$

$$A_i = \alpha_{ij} A_j \dots\dots\dots(38)$$

ここで、式 (24) を考慮にいれて、式 (38) を、式 (37) に代入すると、

$$\alpha_{ij} \sigma_{ca,i}(A_i) = \sigma_{ca,j} \left(\frac{A_i}{\alpha_{ij}} \right) \dots\dots\dots(39)$$

となり、式 (39)、(38) により、限界断面積は、以下のように計算される。

(a) SM 41 と (b) SM 50 の間では、

$$\left. \begin{aligned} ① \quad l \leq 648 \text{ cm} \\ \bar{A}_a = 0.1619 l \\ \bar{A}_b = 0.1384 l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40.1)$$

$$\left. \begin{aligned} ② \quad l > 648 \text{ cm} \\ \bar{A}_a = 2.501(l/100)^2 \\ \bar{A}_b = 2.137(l/100)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40.2)$$

(b) SM 50 と (c) SM 50 Y の間では、

$$\left. \begin{aligned} ① \quad l \leq 377 \text{ cm} \\ \bar{A}_b = 0.2378 l \\ \bar{A}_c = 0.2222 l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40.3)$$

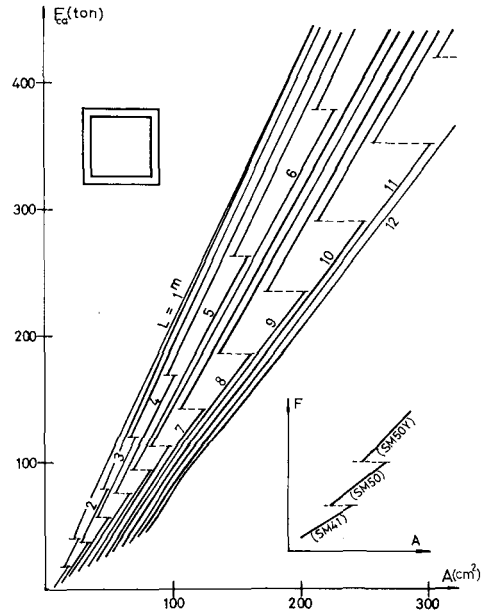


図-10 正方形断面の F_{ca} - A 曲線と各鋼種の適用限界

② $l > 377 \text{ cm}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_b = 6.313(l/100)^2 \\ \bar{A}_c = 5.900(l/100)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40.4)$$

図-9 の F_l , F_m , F_u がわかれば、外力 F_0 により、最適な鋼材は決まるが、それらの値は、式 (40) を用いて、次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} F_l = 569 \sqrt{\frac{(l/120)^2 - 0.107}{0.0163}} \\ F_m = \begin{cases} 188.1 l & (l \leq 648 \text{ cm}) \\ 2904(l/100)^2 & (l > 648 \text{ cm}) \end{cases} \\ F_u = \begin{cases} 395.7 l & (l \leq 377 \text{ cm}) \\ 10526(l/100)^2 & (l > 377 \text{ cm}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

これらの式より、許容圧縮力-断面積曲線、および3種の鋼材の、使用に適する範囲を太線で図示すると、図-10 のようになる。

この図より、部材長が大きくなるほど、許容応力の低い鋼材を使用した方が、より経済的であることがわかる。

6. 計算例

以上の考え方をを用いて、トラス構造物の最適設計の例題を説明する。

なお、全応力設計における、収束の判定条件は、構成しているすべての部材について、前回と今回の断面積の差が、前回の断面積の 1/100 よりも小さいとき、収束と見なし、次の段階へ進んだ。

また、この方法では、初期値は、任意の値を与え得るが、今回は、その部材の、圧縮材とした場合、および、

引張材とした場合の、細長比の上限より決まる部材面積の下限の和を用いた。

目的関数は、特に断わらない限り重量である。

(例題 1)

図-11 は、全応力設計が、必ずしも最適ではないということの例にあげられる問題である。

荷重は、 $P_1=P_2=200\text{ t}$ をそれぞれ、斜材の方向へ載荷した。断面は正方形、鋼材は SS 41 である。

表-4 に示したように、全応力設計の結果は、繰り返し

表-4 3本トラスの最適設計

部材	全応力設計	d 値	最適化 $n=4$	d 値
1, 2	130.38	1410	112.23	1230
3	19.43	-311	59.43	8
総体積	194 106		188 435	

し回数 $n=9$ で、 $A_1=A_3=130.38\text{ cm}^2$ 、 $A_2=19.43\text{ cm}^2$ (この値は、2部材の細長比の上限で決まる値である) に収束した。 d 値を計算して、最適性を検討すると $d_2 = -311$ となり、2部材が、自由部材であることがわかる。以後、2部材に修正を加えてゆく最適化の手法で、4回の繰り返しの後、表-4 の値に収束し、 d 値を計算しても、すべて正であり、最適解が得られたことがわかる。このとき、式 (32) の $4A$ は 10 cm^2 である。

(例題 2)

これは図-12 のようなトラスに対して応力と節点①の水平方向の変位を 0.4 cm に制限した場合の最適化の問題である。断面は正方形、鋼材は SS 41 である。

このトラスは、静定であるので、応力だけの拘束の場合には、全応力設計が最適となり、表-5 のように、 $A_1=101.02\text{ cm}^2$ 、 $A_2=122.22\text{ cm}^2$ となるが、このとき、①点の水平方向の変位は、 0.61 cm となり、変位の制限を

表-5 変位を拘束条件に含む 2本トラスの最適設計の結果

部材	全応力設計	部材断面積の修正	
		$n=2$	$n=5$
1	101.02	164.30	165.45
2	122.22	157.10	171.37
変位	0.61	0.42	0.40

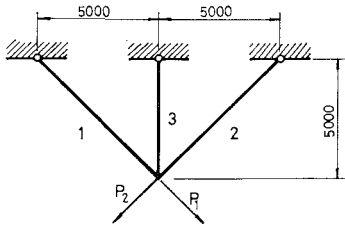


図-11

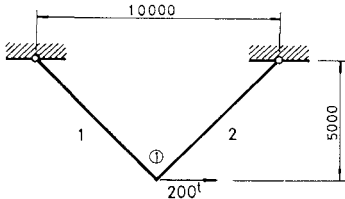


図-12

犯す。それで、4.(4) で述べた方法を用いて、部材断面積を修正してゆくと、5回の繰り返しで、表-5 のような値に収束し、変位制限を満足した。

(例題 3)

この問題は、図-13 に示す、two hinged spandrel arch 橋の最適設計を行ない、同時に、断面の幅 B の、総体積に対する影響を調べたものである。

断面は、上・下弦材、および端柱は、箱型断面、腹材は H 型断面とし、鋼材はすべて SS 41 である。

また、荷重は、死荷重として、下弦材の節点に 1.3 t 、上弦材の端点以外の節点に 27.4 t 、端点には 14.4 t を

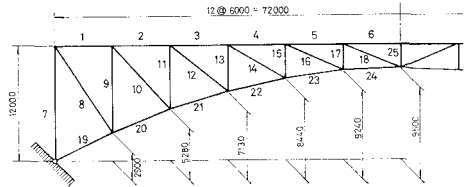


図-13 Two hinged spandrel arch 橋

表-6 Two hinged spandrel arch 橋の最適設計

部材	断面型	断面積		
		$B=30\text{ cm}$	$B=40\text{ cm}$	$B=50\text{ cm}$
1	B	68.54*	99.85*	144.44*
6	B	242.07	228.04	226.11
7	B	104.73	122.79	162.49*
8	H	63.33*	82.33*	110.15*
11	H	104.55	113.08	129.63
19	B	316.58	271.91	277.22
23	B	166.11	153.35	167.38
25	H	58.74	66.61	84.71
総体積		4 221 824	4 341 255	4 914 835
n		7	5	3

(* は、細長比の上限で決定された部材である)

それぞれ載荷し、そのほかに、活荷重として 40 t 1個を上弦材の節点に載荷し、結局、13種類の荷重条件を、同時に考慮していることになる。

断面の幅 B は、 30 cm 、 40 cm 、 50 cm の場合の計算を行ない、任意の 8本の部材の断面積、総体積、繰り返し回数を表-6 に示した。表の断面型の欄の B は箱型、 H は H 型断面を意味する。

この結果は、全応力設計が最適となった。

また、幅 B の大きさにより、総体積が少なからぬ変動を示し、断面の幅 B も、重要な設計変数であることがわかる。 B の値により、繰り返し回数が大きく異なっているのは、図-6、図-8 から説明できるように、 B が大きくなるほど、細長比による下限で決定される部材が多くなり、その結果、収束が早まるからである。

(例題 4)

これは、図-13 に示すトラス橋において、断面をす

べて正方形と仮定したときの、鋼材を設計変数に含む最適設計を行ない、単一鋼材で設計した場合と比較したものである。

目的関数は、鋼材費である。

荷重条件は、例題 3 と同じである。

なお、引張力で決定される部材の鋼種は、SM 50 とした。個々の部材の断面積は示さないが、設計の結果、SM 41 となった部材は、1, 2, 7, 9, 11, 13 部材と少なく、部材長が大きいか、作用軸力が小さい部材に限られており、ほとんどの部材は、SM 50 となった。

単一鋼種で設計した場合と結果を比較すると、表一7 に示すように、総体積では、SM 50 で設計したのが、

表一7 鋼種を設計変数に含む Two hinged spandrel arch 橋の最適設計

	SM 41	SM 50	鋼種を設計変数に含む場合
総体積	3 806 935	3 164 826	3 225 842
総鋼材費	3 806 935	3 702 846	3 644 122
n	11	9	6

最小であるが、総鋼材費では、やはり、鋼種を設計変数に含む場合が、最小となった。

なお、この問題も、全応力設計が最適となっている。

7. 結 論

(1) 改正された道路橋示方書に従い、任意鋼種における、箱型および H 型断面のサブオプティミゼーションを行ない、実用的な最適設計が可能となった。

なお、この結果は、従来の非線形計画法にも応用できるものである。

(2) 全応力設計を基本とした、修正全応力最適設計法なるものを提案した。

本方法は、例題 3 に示すごとく、構造物の大きさに比較して、繰返し回数は非常に少なく、計算機の記憶容量も少なく済み、大型構造物を設計する上で、すぐれていると思われる。

(3) 任意鋼種のサブオプティミゼーションができた結果、それぞれの鋼種の F_{ca} -A 曲線の相対的關係より、1 本の F_{ca} -A 曲線を仮定し、鋼種を設計変数に含み、鋼材費を目的関数とする最適設計を提案している。

その結果、部材長が大きくなるほど、また、作用軸力が小さいほど、許容応力の低い鋼種を使用した方が、経済的であることがわかる。

(4) 本文で示した例題のほかに、2 径間連続ワーレントラス (部材数; 31, 47), 3 径間連続ワーレントラス (部材数; 39), ランガートラス (部材数; 36, 60), および数種のカンティレバートラスなどの設計を行なった結果、例題 1 に示した問題以外、目的関数が重量およ

び鋼材費の場合は、すべて全応力設計が最適となった。

本論文で提案している設計法は、局所最適解を与えるにすぎなく、この点は今後解決しなければならない大きな問題点であるが、トラス構造物に限らず、不静定構造物で、最適設計の結果が全応力であったという報告が、文献 3), 4), 5), 7), 8) にあり、格点の変位の拘束条件が critical でない場合、一般的な橋梁に用いられているトラス構造物においては、全応力設計が最適であると思われる。

(5) 例題 3 に示したように、部材断面の幅 B も、最適設計において、重要な設計変数であることがわかる。

B を大きくすると、断面積の下限で決定される部材が多くなり、不経済となる。また、 B を小さくすると、作用軸力に対して必要な断面積が大きくなり、適当な B の値の選択、あるいは B を数種変えて、設計してみる必要があるとなるであろう。

なお、本論文で説明した理論は、軸力部材よりなる構造物に限るものではなく、軸力および曲げモーメントを受ける部材を含む構造物にも拡張ができ、筆者は、現在、ランガー、ローゼ桁などアーチ橋の実用的最適設計法について研究し、その結果について、検討しているところである。

おわりに、本文作成にあたり、北海道大学工学部 渡辺昇教授、穂農知徳助教授のご指導をいただいたことを付記し、謝意を表したい。計算は、北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。

参 考 文 献

- 1) 大久保禎二：トラス構造物の最適設計法に関する研究，土木学会論文集，第 177 号，pp. 9~19, 1970 年 5 月.
- 2) 大久保禎二：骨組構造物の最適設計，構造物設計法の最近の進歩と問題点，土木学会関西支部，pp. 105~120, 1971 年 3 月.
- 3) 大久保禎二：鋼構造物の最適設計法，橋梁，第 7 号，pp. 25~38, 1971 年 6 月.
- 4) 金吉正勝：骨組構造物の最適設計，日立造船技報，第 32 巻，第 3 号，pp. 33~40, 1971 年 9 月.
- 5) Reza Razani: Behavior of fully stressed design of structures and its relationship to minimum-weight design, AIAA Journal, Vol. 3, No. 12, pp. 2262~2268, Dec., 1965.
- 6) Thomas P. Kicher: Optimum design-minimum weight versus fully stressed, ASCE, ST 6, pp. 265~279, Dec., 1966.
- 7) 山田善一・国広昌史：桁の最適設計についての一研究，第 26 回年次学術講演集，1971 年 10 月.
- 8) K.M. Romstad, C-K Wang: Optimum design of framed structures, ASCE, ST 12, pp. 2817~2845, Dec., 1968.
- 9) 杉本博之：骨組構造物の最適設計 (その一) —トラス構造物のサブオプティミゼーション，土木学会北海道支部研究発表論文集，第 28 号，pp. 165~169, 1972 年 2 月.

(1972. 6. 16・受付)