

# 非線形ばね基礎上の周辺自由な平板の数値解析

## ON NUMERICAL ANALYSIS OF RECTANGULAR PLATES WITH ALL FREE BOUNDARIES ON NONLINEAR FOUNDATIONS

倉田 宗章\*・高端 宏直\*\*・谷 平 勉\*\*\*  
By Muneaki Kurata, Hironao Takahashi and Tsutomu Tanihira

### 1. ま え が き

従来、地盤上の構造物や軌道等の設計には Winkler の仮定に基づく、線形ばねが連続した弾性基礎上の構造物として解析される場合が多かった<sup>1), 2), 3)</sup>。実際の地盤のような場合は、負の反力が存在しないこと、ばねが非線形性状を示すことなどのため、従来の解法では満足されない面があったので、本文では 図-1 に示すような種々の性質を持つばね基礎の場合について比較検討を行ない、非線形ばねの影響について調べた。

1) Winkler 形ばね：従来から広く用いられているもので、ばね反力とばねの変位量が比例する線形ばねの場合である (図-1(a))。

2) 非引張性 Winkler 形ばね：変位量が負の場合にはばねに引張力が作用しないで、正の場合に限り、1) の Winkler 形と同様の性状を示す場合である (図-1(b))。

3) 指数関数形ばね：2) と同様に負の反力は存在せ

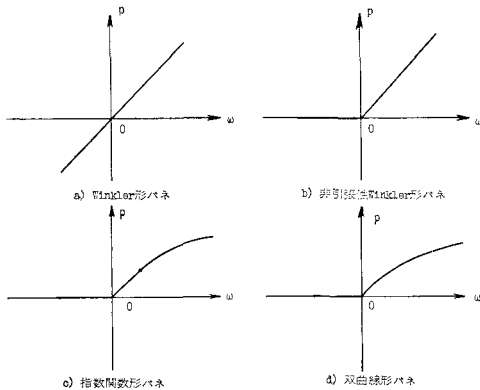


図-1 ばね反力とばねの変位量との関係

ず、変形が正の場合に直線形と指数関数形が連続するような場合である (図-1(c))。

4) 双曲線形ばね：これも負の反力は存在せず、変形が正の部分で双曲線を示す場合である (図-1(d))。

負の反力を考えない場合の解析例としては、はりの場合で、非線形曲げ問題として、領域をばね反力が存在する部分と、しない部分に分割して、境界条件を満足させて解析する方法<sup>4), 5)</sup>や、その実験<sup>6)</sup>がある。また、Heviside の階段関数を用いて連続解をうる方法<sup>7)</sup>もある。板については無限板で、ばね上にある場合と3次元弾性体上にある場合について Weitsmann によって解析されている<sup>8)</sup>。これらのばね性状はいずれも、図-1(b)の非引張性の Winkler 形ばねに属する場合を取扱っている。

本研究では、計算例として種々の性状を持つばね基礎に支持された、全周辺自由の正方形板に鉛直荷重が作用した場合について解析し、従来の Winkler 形ばねの場合と比較検討し、非線形ばねの影響や浮上りの状態について調べた。この種の問題は従来より難問とされ、二、三の先駆的研究が発表されているが、まだまだ検討の余地が残されている。

解析法としては差分法を応用した逐次近似解法を用いた。差分法を用いた理由としては、厳密解を連続解でうることは容易なことではなく、特に、板の場合は難解が予想されるが、差分法で実用上十分な精度が得られるものと考えたからである。なお、線形解を反復することによって、非線形解への変換が、マトリックスの要素を多少変更することによって容易にできる等の利点がある。解法の基本原理は 図-2 (a) のような従来の

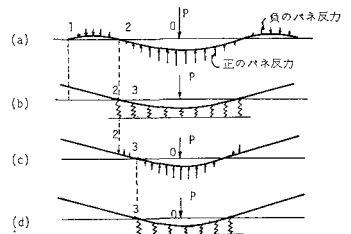


図-2 逐次近似法の考え方

\* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木教室  
\*\* 正会員 明石工業高等専門学校教授 土木教室  
\*\*\* 正会員 大阪市立大学助手 工学部土木教室

Winkler 形の場合をまず解析し、浮上った区間 1~2 の部分のばねを除去し、(b) のような系を解くと、結果は (c) のようになる。ここで、さらに浮上った区間 2~3 の部分のばねを除去し、(d) の系を解析し、収束するまで反復する。また、途中に変形量に応じたばね反力を修正して組込むことも可能である。なお本研究の基本的な仮定として、次の 2 点をあげる。

1) ばね基礎が塑性化するような変形に達しても、板の変形は薄板の微小変形理論による範囲内にあるものとする。

2) 基礎は独立したばねが分布しているものと考え、ばね相互の関係はなく、ばね反力はばね頭部に接触する板の鉛直変位のみに関係し、回転角等には影響されないものとする。

## 2. 周辺自由な板の解析

### (1) 非引張性 Winkler 形ばねに支持された場合

ばねの性状が図-1(b) に示すような場合で、すなわちばねの変形量  $\omega$  と、ばね反力  $p$  (kg/cm<sup>2</sup>) との関係は次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} p &= k\omega & (\omega > 0) \\ p &= 0 & (\omega \leq 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $k$  はばね定数 (kg/cm<sup>3</sup>) とする。

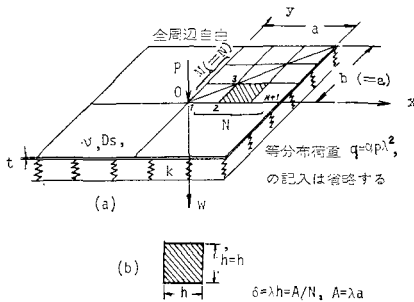


図-3 板の諸元

#### a) 基本式の誘導

連続ばね上の等断面平板の基礎方程式を直交座標系で示せば、式 (1) の  $\omega$  を、板のたわみ  $w$  に等しいと置き、次のように書ける。

$$D_s \Delta^2 w + \lambda^4 w = \frac{\bar{q}}{D_s} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$\lambda^4 = k/D_s, \quad D_s = Et^3/12(1-\nu^2) \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $D_s$  は板剛度、 $E$  は板の弾性係数、 $t$  は板厚、 $\nu$  は板のポアソン比、 $\bar{q}$  は分布荷重強度である。ここで図-3 に示すように、半辺長を  $a, b$ 、分格長を  $h, h'$ 、分割数を  $M, N$  とする。問題を簡単にするために  $a =$

$b, h = h', M = N$  として正方形板で正方格子を取扱う。この場合、半辺長、板剛度、ばね定数等の諸元が問題になるので一般性をもたせるために長さを無次元化し、次の諸量を導入する。

$$A = \lambda a, \quad \delta = \lambda h, \quad r = \delta^4 = (\lambda a/N)^4 = (A/N)^4 \dots\dots\dots (4)$$

ついで、格点荷重強度  $\bar{q}$  を差分表示すると、次のようになる。

$$\bar{q} = q + \frac{P}{h^2} \cdot \beta = P \lambda^2 \left( \alpha + \frac{\beta}{\delta^2} \right) \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $q$  は等分布荷重、 $P$  は集中荷重で、 $\alpha$  は新たに導入された  $P$  と  $q$  との関係を表わす荷重比で、次のように表わす。

$$\alpha = q/P \lambda^2 \dots\dots\dots (6)$$

また  $\beta$  は集中荷重  $P$  の分布を表現する無次元の係数であって、 $P$  が作用しない点では  $\beta = 0$ 、 $P$  が一般点に作用する場合は  $\beta = 1$ 、辺点に作用する場合は  $\beta = 2$ 、隅角点の場合は  $\beta = 4$  である。図-3 の場合は 1 点で  $\beta = 1$  で他の点では 0 となる。次に  $\Delta^2 w$  を差分表示して、式 (3)、(4) および (5) を用いて、式 (2) を連立方程式で表現すると、

$$([K] + [r]) \cdot \{w\} = \{\bar{q}\} \dots\dots\dots (7)$$

となり、ここで、 $[K]$  は差分法による係数マトリックスで、対称変形条件や境界条件を用いて決定されるもので、隅角部および、その近傍では、曲げモーメント、せん断力および隅角部反力が 0 となる条件を用いた。 $[r]$  は主対角マトリックスで、対角要素が  $r$  で、他の要素は 0 であり、地盤反力の影響を表わすマトリックスである。 $\{w\}$  は格点のたわみを表わす列マトリックスで、 $\{\bar{q}\}$  は荷重を表わし、その要素は式 (4) および (5) から

$$\bar{q}_i = \frac{P \lambda^2}{k} (\alpha r + \beta r^{1/2}) \dots\dots\dots (8)$$

で示される。等分布荷重が作用しない点では  $\alpha = 0$ 、集中荷重が作用しない点では  $\beta = 0$  とおけばよい。

演算に際して、与えるべきデータは  $\alpha, \beta, A, N, \nu$  および  $[K]$  である。図-4 に演算過程を示すフローチャートをあげた。はじめに式 (7) より従来の Winkler 形ばねの場合の解を求める。そこでたわみ  $w_m$  が負になる点  $m$  のばねを除去する。すなわち、 $[r]$  のそれに対応する点  $m$  の要素の  $r$  を 0 とおく。ついで修正された  $[r]$  を用いて、再び  $\{w\}$  を求める。これらの操作を繰返すことによって、新たにたわみが負になるような点が生じなければ演算を終了し、収束したものと判定する。

#### b) 数値計算例と種々の検討

本文では非線形ばねによる浮上りの状態や、たわみ、断面力への影響を従来の Winkler ばねの場合と比較検

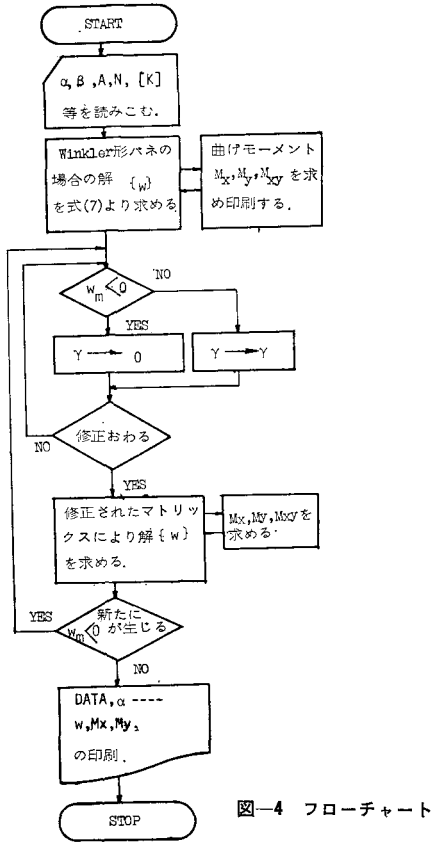


図-4 フローチャート

討することが主眼であるので、荷重状態としては主として中央点の集中荷重載荷の場合を取扱い、正方形板でその傾向がわかるものと考え、数値計算例として、図-3に示すような全周辺自由な正方形板の中央点集中荷重  $P$  あるいは等分布荷重  $q$  が作用した場合について解析することにする。

以後、たわみや断面力等の諸量と  $\alpha$  や  $A$  との関係について検討していくが、 $\alpha$  を変化させることは、式 (6) より  $q = \alpha P \lambda^2$  で定義されているので、 $\alpha = 0$  の場合は等分布荷重  $q = 0$  で、集中荷重  $P$  のみが作用することを意味する。 $\alpha$  が大きくなれば  $P$  を一定とすると、等分布荷重  $q$  の値が大きくなることを意味する。 $A$  は半辺長  $a$  を無次元化したもので、式 (3) および (4) から  $A = \lambda a = a \cdot \sqrt{k/D_s}$  で表わされている。先にも述べたように、このような問題は板剛度、ばね定数、板寸法等の諸元が要因としてあるので、一般性をもたせるために無次元化した  $A$  を用いた。すなわち、 $A$  を変化させるということは、 $k, D_s$  が一定と考えるならば、実半辺長  $a$  を変化させることを意味する。 $a, D_s$  が一定で  $A$  を大きくすることは  $k$  を大きくすることを意味し、 $a, k$  を一定として、 $A$  を大きくすることは  $D_s$  を小さくすることを意味する。

図-5 は収束の状況を示したものである。図-5(a) は板中央部と自由辺の中点を結ぶ線上のたわみについての収束性を示した。 $\alpha = 0, A = 3.5, \nu = 0.3$  の場合で、分割数  $N$  をそれぞれ 4 (15 元), 6 (28 元), 8 (45 元), 10 (66 元) のたわみを記したものである。中央点ではやや差異がある。図-5(b) は分割数  $N$  と中央点のたわみ  $w_c$ 、および隅角部のたわみ (この場合は浮上り量)  $w_o$  との関係を示した Winkler 形ばねの場合とともに併記したものである。浮上り量  $w_o$  は両者の場合で大きな差異を示す。図-5(c) は演算途中の収束状況を示したもので、この種のもので 4~5 回

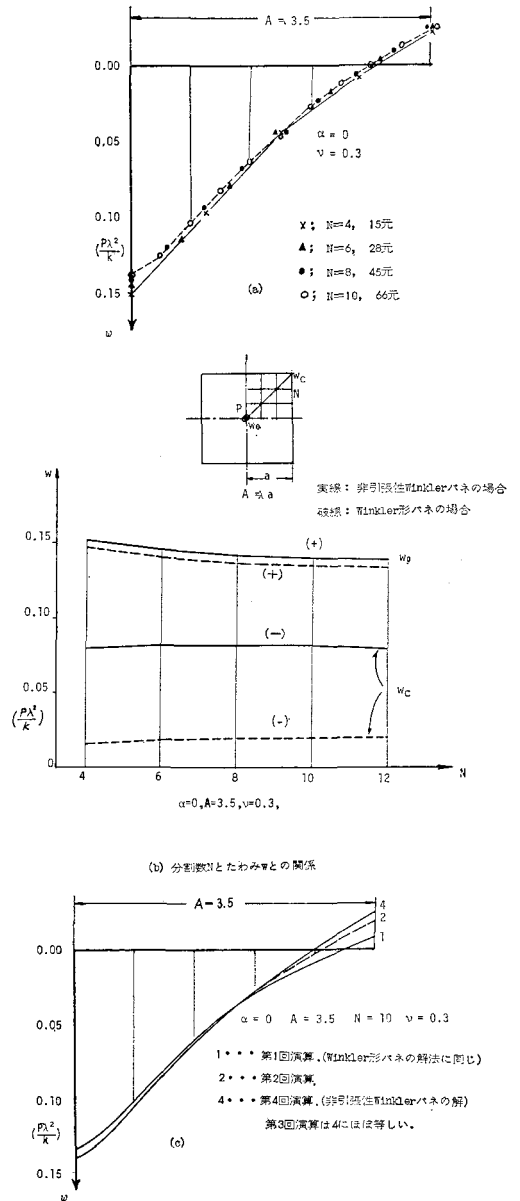


図-5 収束の状況

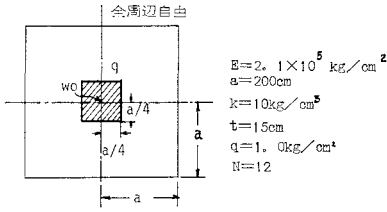


図-6 部分分布等分布荷重載荷の場合

表一 連続解との比較ならびにポアソン比の影響  
( $W_0$  の値, 単位: cm)

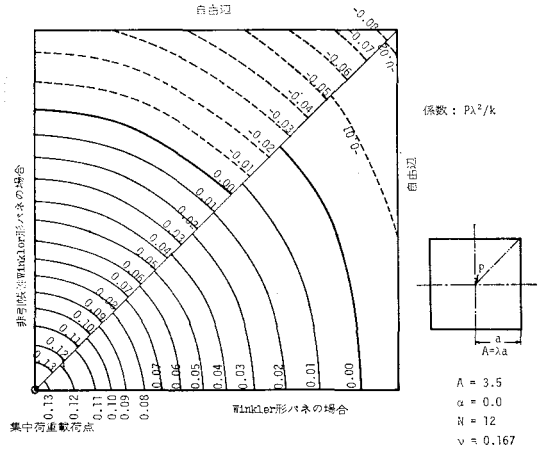
ポアソン比	0.0	0.167	0.3
Winkler 形ばね	0.03827	0.03785 (0.0378)	0.03699
非引張性 Winkler 形ばね	0.04097	0.04009	0.03893

( ) 内は能町解.

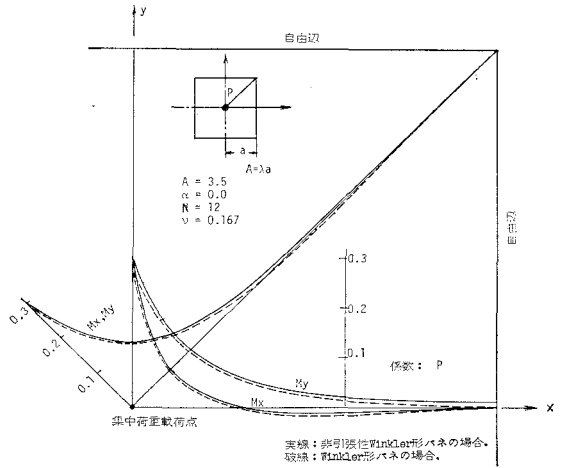
の演算で収束している。

表一は図-6 に示される周辺自由の正方形板の中央部に部分等分布荷重  $q$  が作用した場合の中央点のたわみ  $w_0$  を示した。諸元は図示のとおりである。 $\nu=0.167$  の場合の能町による厳密解<sup>9)</sup>と比較するとよく一致している。本文のような例の解析解はみあたらないので、比較的近いと考えられる、全周辺自由な中央部に部分等分布荷重載荷で Winkler ばね上の正方形板の解を選んだ。なお負の反力を考えない場合も併記した。 $\nu$  が 0 から 0.3 に変化すると  $w_0$  は 3~5% 小さくなる。分布荷重は集中荷重に比較して精度がよいと考えられるので、本文で扱っている集中荷重の場合はやや精度が落ちることが予想される。

図-7(a) は、中央点に集中荷重載荷の場合として  $\alpha=0$ ,  $N=12$ ,  $A=3.5$ ,  $\nu=0.167$  について、板の 1/8 の部分の等たわみ曲線図を Winkler 形の場合と比較したものである。双方、自由辺近傍の値や、 $w=0$  の曲線位置に大きな差異がみられる。図-7(b) は曲げモーメント  $M_x, M_y$  について、対角線および中央点と自由辺中点を結ぶ線についての値を Winkler 形の場合と併記した。連続解では集中荷重載荷点で、曲げモーメントの値は発散するが、差分法では荷重が個々の格子に分布すると考えるので有限の値を与える。集中荷重載荷点下の曲げモーメントについては問題点はあるが、厳密な意味での集中荷重は存在しえず、それは小面積に分布する荷重を力学的に理想化したもので、数学的な集中荷重の取扱い上出てくる特異性は物理的には意味がなく、実際には微小面積に分布する荷重が取扱われている。しかも上記微小面積内の荷重強度分布のいかんによって、載荷中心における曲げ応力もかなり変動することも知られている<sup>10)</sup>。したがって本文における値は当該差分分布で表現できるような集中度の荷重下においてばねの影響を調



(a) 等たわみ曲線図



(b) 曲げモーメント  $M_x, M_y$   
図-7

べたものであるという考えのもとに示した。これらの断面力はたわみのように負の反力の影響は大きくせず、中央部近傍から急速に減すいて、 $w=0$  の点付近から自由辺にかけて小さな値を示す。

図-8 は中央点のたわみ  $w_0$ 、隅角部のたわみ  $w_c$ 、中央点の曲げモーメント  $M_{x0}(=M_{y0})$  と  $A$  および  $\alpha$  との関係である。図 (a) は無次元化した半辺長  $A$  を変化させた場合で、 $w_0, M_{x0}$  は負の反力の影響は小さいが、 $w_c$  には大きな影響がでている。 $A$  が約 1.74 で全面沈下する。さきに述べたように、 $A$  を変化させることは、半辺長  $a$  を一定としたとき、ばね定数  $k$  や板剛度  $D_s$  を変化させることを意味し、 $k, D_s$  のわずかな変化に対して、曲げモーメントには大きな変化がみられない。また  $k, D_s$  を一定として、半辺長  $a$  を変化させると、 $w_0$  や  $M_{x0}$  には大きな差はみられないが、非引張性 Winkler 形ばねの浮上り量すなわち  $w_c$  は大きく変化する。図 (b) は荷重比  $\alpha$  を変化させた場合で  $\alpha$  が小さいとき、すな

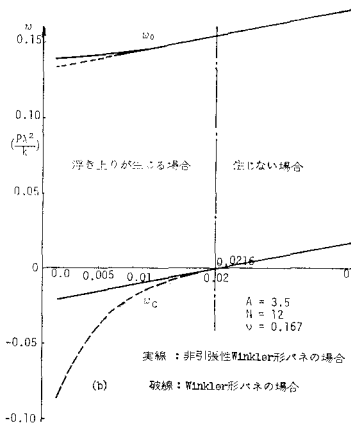
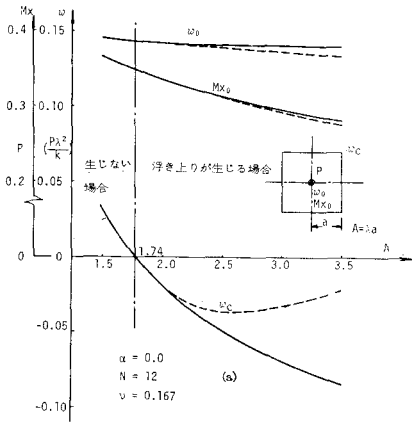


図-8 たわみおよび曲げモーメントと  $A$  または  $\alpha$  との関係

点に集中荷重かつ全面等分布荷重を載荷させた場合である。中央部分で浮上り、集中荷重載荷辺とそれに相対する辺は沈下し、他の相対する2辺は浮上っている。図(b)は隅角点に集中荷重かつ全面等分布荷重が載荷した場合で、中央部で浮上り、集中荷重載荷隅角点とその相対する隅角点はその相対する2つの隅角点は浮上っている。

わち  $P$  が卓越するとき  $w_c$  にかなりの影響がでている。 $\alpha$  が約 0.021 で全面沈下する。 $M_{x0}$  はほぼ一定の値を示すので記入を省略した。

図-9 は図(a)に定義する無次元の接地長  $R_1, R_2$  を推算したものである。図(b)は  $A$  との関係で、負の反力の影響はみられるが、非引張性 Winkler 形の場合の  $R_1, R_2$  はほぼ一定値を示している。Weitsman<sup>8)</sup>

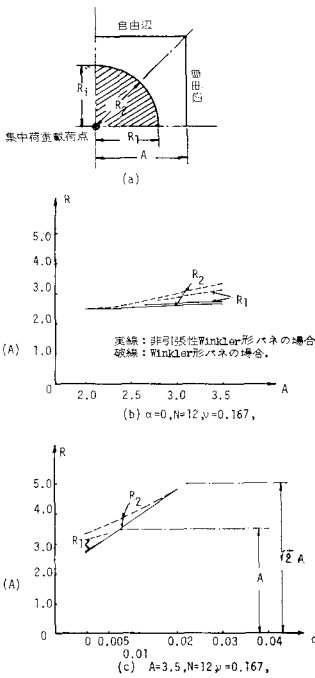


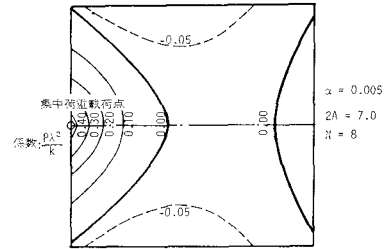
図-9 接地長と  $A$  または  $\alpha$  との関係

は無有限板で  $R=2.85$  と算定している。本図では  $A=3.5$  で  $R_1=2.74$  となっている。図(c)は  $A=3.5$  で  $\alpha$  を変化させた場合である。 $R_1$  は  $\alpha=0.007$  付近で、 $R_2$  は  $\alpha=0.022$  付近で自由辺または隅角部に達する。従来の Winkler 形ばねの場合は常に全面接地しているわけであるが、本文での接地長は載荷点から、たわみが 0 となる点までの距離をいう。

図-10 は集中荷重の載荷位置を変えた場合である。ばねは非引張性 Winkler 形ばねである。等分布荷重の係数を  $\alpha=0.005, 2A=7.0, N=8$  とした。前節であげた計算例より分割数の点でやや精度はおちるが、それぞれの変形の傾向を知ることができる。図(a)は自由辺中

(2) 指数関数形ばねに支持された場合

ばねの性状が  $\omega$  が正の領域で非線形性状を示す場合



(a) たわみ (自由辺中点集中荷重, 等分布荷重載荷)

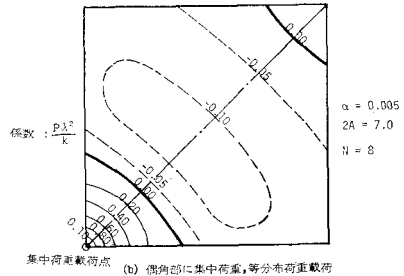


図-10 等たわみ曲線図

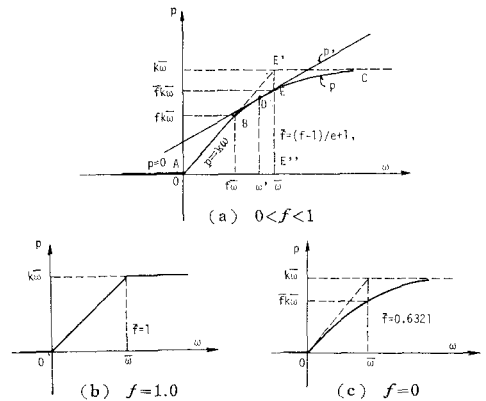


図-11 指数関数形ばねのばね反力-変位曲線

$$B = k \cdot \exp \left\{ \frac{f - \omega' / \bar{\omega}}{1 - f} \right\} \{ (f - 1) \bar{\omega} - \omega' \} + k \bar{\omega} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とかける。図 (b) および図 (c) は上式において  $f=1, f=0$  なる両極限の場合であって、前者はばねが完全弾塑性性状を示し、 $\bar{\omega}$  が最大弾性変形量であることを意味する。後者は線形部分がなく指数関数のみで表わされる場合である。

α) 基本式の誘導

前節における式 (2)~(4) はそのまま用いられるが、ここでは、荷重と変位の関係は非線形となるので、集中荷重  $P$  には、上限が存在するから  $nP$  とかく方が都合がよい。つり合い条件より  $nP$  の限界は  $nP \leq A^2 k \bar{\omega} / \lambda^2$  となる。

データとして、 $n, \alpha, \beta, A, N, \bar{\omega}, f, \nu, [K]$  を与える。第1回目の演算は式 (7), (8) より、従来の Winkler 形ばねの場合に対する解を求める。第2回目以後は  $[K]$

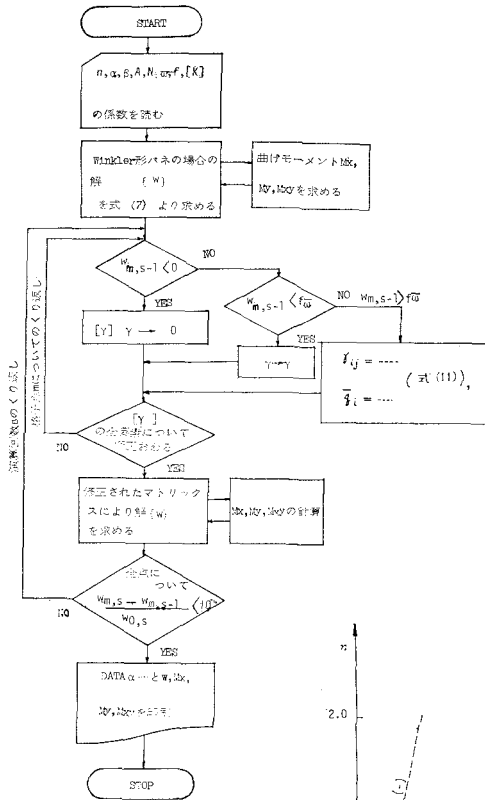


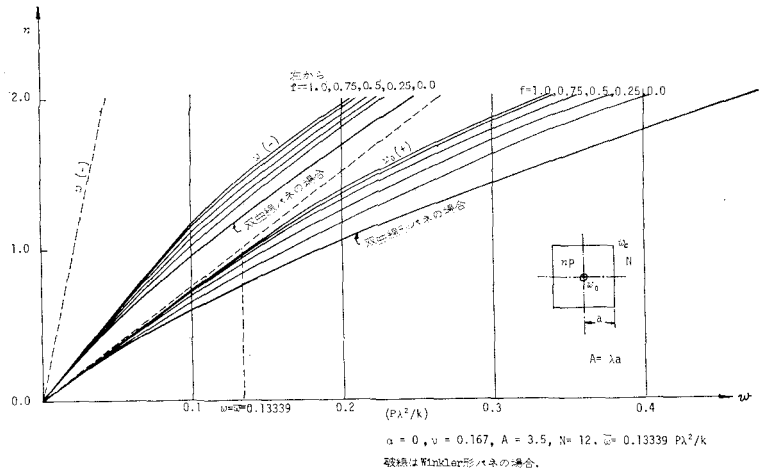
図-12

の例として、図-11(a) のように  $A \sim B$  の部分は  $p = k\omega$ ,  $B \sim C$  の部分は、 $B$  点の接線が  $\overline{AB}$  に一致し、 $\omega \rightarrow \infty$  で  $p = k\bar{\omega}$  に漸近する指数関数で表現されるようなばね性状をもつ場合について解くことにする。ばね反力  $p$  とばねの変形量  $\omega$  との関係は、

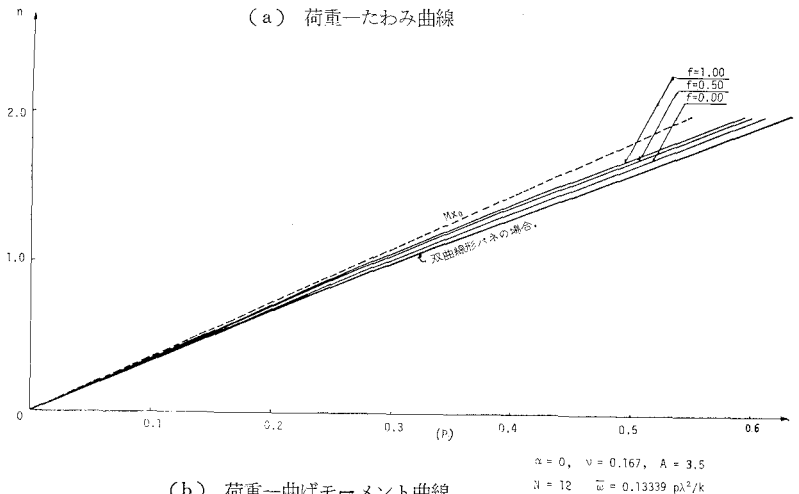
$$p = k\bar{\omega} \left\{ (f-1) \exp \left( \frac{f - \omega / \bar{\omega}}{1 - f} \right) + 1 \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表わされ、ここに  $f$  は  $f = \overline{AB} / \overline{AE'}$  で線形部分の比率を表わす係数である。 $\bar{\omega}$  は  $\overline{OE'}$  の長さを示し、また  $\omega = \omega'$  なる任意点  $D$  の接線で表わされる修正されたばね反力  $p'$  は

$$p' = B + k \cdot \exp \left( \frac{f - \omega' / \bar{\omega}}{1 - f} \right) \cdot \omega,$$



(a) 荷重-たわみ曲線



(b) 荷重-曲げモーメント曲線

図-13

はそのままで、 $[\tau]$  と  $[\bar{q}]$  の要素を次のように変形する。いま  $s-1$  回目の  $m$  点の解を  $w_{m,s-1}$  とすると、 $s$  回目の計算に際して次の操作を行なう。

i)  $f\bar{\omega} > w_{m,s-1} > 0$  のとき：点  $m$  の要素はそのままよい。

ii)  $w_{m,s-1} < 0$  のとき： $[\tau]$  の  $m$  点の対角要素を  $r=0$  とおく。

iii)  $w_{m,s-1} > f\bar{\omega}$  のとき：ばね反力は非線形となるから、差分的に線形化の手法を用いなければならない。修正されたばね反力の式 (10) を使い、 $\omega = w$ 、 $\omega' = w_{m,s-1}$  とおきかえ、式 (2) の  $\lambda^4 w$  は  $kw/D_s$  でおきかえられるから、式 (7) における  $[\tau]$  と  $\{\bar{q}\}$  の  $m$  点の要素はそれぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= r \cdot \exp\left(\frac{f - w_{m,s-1}/\bar{\omega}}{1-f}\right) \cdot w_{m,s} \quad (i=j) \\ \bar{q}_i &= \frac{nP\lambda^2}{k} (a\tau + \beta\tau^{1/2}) - r \left\{ \bar{\omega} + ((f-1)\bar{\omega} - w_{m,s-1}) \cdot \exp\left(\frac{f - w_{m,s-1}/\bar{\omega}}{1-f}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

逐次演算を行なって収束の条件として、計算例では全点で誤差評価が

$$(w_{m,s} - w_{m,s-1})/w_{0,s} \leq 10^{-4} \dots\dots\dots (12)$$

になれば演算を打切ることとした。 $w_{0,s}$  は  $s$  回目の中央点のたわみである。 $f=0$  の場合に振動しつつ収束する現象がみられた。また一般に演算回数は 10 回以内で収束した。図-12 のフローチャートを参照されたい。

**b) 数値計算例と種々の検討**

全周辺自由の正方形板につき、中央点に集中荷重が作用した場合における種々の数値的結果をあげて、その性質を検討した。図-13 は荷重と中央点のたわみ  $w_0$ 、隅角部のたわみ  $w_c$ 、中央点の曲げモーメント  $M_{x0}$  との関係を描いたものである。いずれも  $\nu=0.167$ 、 $\alpha=0$ 、 $A=3.5$ 、 $N=12$ 、 $\bar{\omega}=0.1334 P \lambda^2/k$  (この値は任意にきめることができるが、ここでは Winkler 形ばねの解で  $n=1$  のときの  $w_0$  の値を用いた)。図 (a) は線形領域の比  $f = \overline{AB}/\overline{AE'}$  の値を変化させた場合の  $n$  と  $w$  の関係を図示したものである。図 (b) は  $M_{x0}$  について描いたもので、たわみほど非線形性は現われず、 $f$  の変化による大きな差異はみられない。

図-14 は  $w_0$ 、 $w_c$  および  $M_{x0}$  と各諸量との関係を示す。いずれも、 $N=12$ 、 $\nu=0.167$  で  $n=1$  の場合である。図 (a) は  $A=3.5$ 、 $\bar{\omega}=0.1334 P \lambda^2/k$  の場合で  $\alpha$  を変化させた。 $n=1$  では  $w_0$ 、 $M_{x0}$  は Winkler 形の場合と比較して大きな差異はないが、 $w_c$  は  $\alpha$  が 0 の近傍、すなわち、集中荷重が卓越した場合には大きな変化がみられる。図 (b) は  $A$  を変化させた場合で、 $w_0$  と  $M_{x0}$  は  $A$  の変化に対して大きな変化はみられないが、 $w_c$

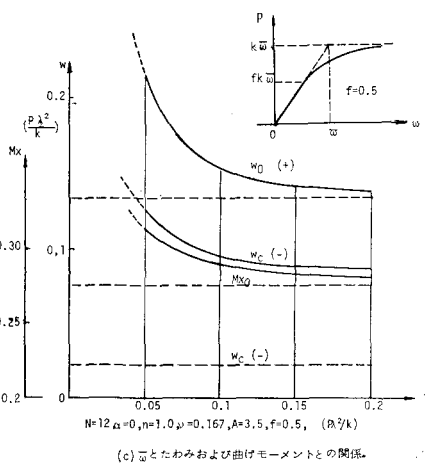
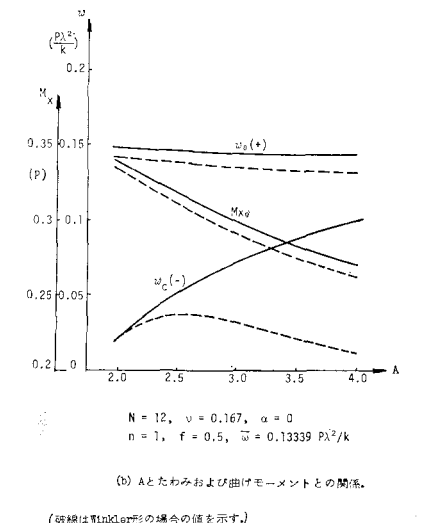
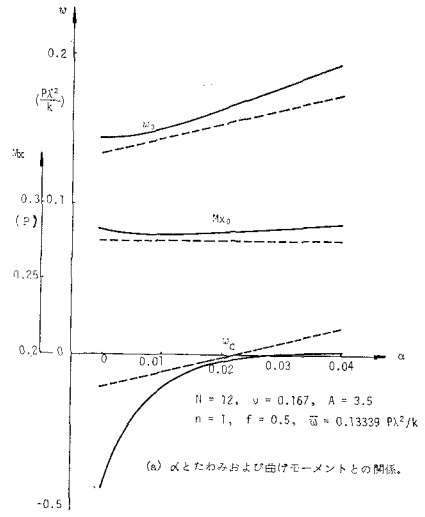


図-14

は  $A$  の増加とともに増大する。図 (c) は  $n=1, f=0.5, \alpha=0$  として、 $\bar{\omega}$  (ばねを完全弾塑性体とした場合の弾性最大たわみ) を変化させた場合である。上記諸量は  $\bar{\omega}$  が大きいときには Winkler 形の場合に近づき、小さいときは  $w_0, w_c$  にはかなりの差異がみられる。

(3) 双曲線形ばねに支持された場合

ばね性状が双曲線形を示す場合について考える。もし地盤をばね基礎と仮定した場合、そのばね定数の決定には、土の種類やその状態、載荷幅やその形状等種々の問題点がある。ばね定数すなわち地盤反力係数の決定方法にもさまざまな方法がある<sup>11)</sup>。これを非線形ばねとして取扱う場合、土の応力-ひずみ曲線のある種の土では傾向として、前節で述べた指数関数形にもおきかえられることも考えられるが<sup>12)</sup>、ここでは Kondner<sup>13)</sup> によって提案された双曲線形についても検討した。これは 3 軸試験の結果による軸圧と側圧との差 ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) と、ひずみ量  $\epsilon$  との関係が、直交座標系で表わすと、原点を通り、ひずみ  $\epsilon$  が大きくなると

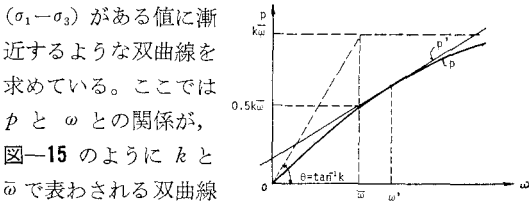


図-15 双曲線形ばねの反力と変形量との関係

$$p = \frac{k \bar{\omega} \omega}{\bar{\omega} + \omega} \dots \dots \dots (13)$$

$\omega = \omega'$  の位置での修正された反力  $p'$  は次式のようになる。

$$p' = \frac{k \bar{\omega} \omega^2}{(\bar{\omega} + \omega')^2} - \frac{k \bar{\omega}^2 \omega}{(\bar{\omega} + \omega')^2} \dots \dots \dots (14)$$

また式 (11) に対応する式は、式 (14) の  $\omega$  を  $w$  に、 $\omega'$  を  $w_{m,s-1}$  にそれぞれ等置すると、

$$\left. \begin{aligned} r_{ij} &= \frac{\bar{\omega}^2}{(\bar{\omega} + w_{m,s-1})^2} \cdot w_{m,s} \\ q_i &= \frac{nP \lambda^2}{k} (\alpha \gamma + \beta \gamma^{1/2}) - \frac{\gamma \cdot \bar{\omega} \cdot w_{m,s-1}^2}{(\bar{\omega} + w_{m,s-1})^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

となり、データは  $n, A, N, \alpha, \beta, \bar{\omega}$  を与え、演算は前節の場合と同様である。ここでは線形部分はないから  $f=0$  である。

図-13 中の一部に本節の場合を示した。たわみは  $\bar{\omega}$  をこえると、指数関数形の場合より、さらに非線形的傾向を示している。曲げモーメントには大きな差異はみられない。図-16 は図-13 と同じ条件のもとでのばねの変形が  $\bar{\omega}$  をこえて、塑性化したと考えられる領域と  $w=0$  の線を  $n=0.5, 1.0, 1.5, 20$  と漸次増荷させた場合について図示したものである。

3. 考 察

いままで、負の反力が存在しない非線形ばね上の全周辺自由な板の計算例として正方形板を解析してきた。以上のことよりあらまし次のことが結論できる。

1) 負の反力を考えない場合は、Winkler ばねに対する場合に比較して、曲げモーメントや正のたわみには、さほど大きな差異は認められないが、負のたわみ、すなわち浮上り量については大きな差異が認められる。実際の設計における断面決定等においては、最大曲げモーメントが要求されるので、従来の Winkler 形ばねによる解法で実用上さしかええない場合もあるが、変位を論じる場合には、負の反力の影響を考えなければならない。

2) 接地長または接地半径については負の反力による影響は大きい。分布荷重によっても、その値は変化する。集中荷重のみの場合には辺長の変化によるその影響は少ない。

3) ばね性状が指数関数形や双曲線形を示す場合、変形量が、ばねの弾塑性変形の限界値  $\bar{\omega}$  に達するまでは、やや線形的であるが、それ以上に増荷すると、ばねの塑性化的な現象が進行して非線形性が顕著になる。曲げモーメントはやや非線形性を示す程度である。それゆえに変形量が  $\bar{\omega}$  ぐらいまでの場合で、 $f=1$  の近傍の場合には非引張性 Winkler 形ばねによる解法でよい。また  $f$  のわずかな変化による変位や断面力の影響は少ないと考えられる。もし地盤を非線形ばねと考える場合、ばね定数や、 $p-\omega$  曲線の決定には、土の一般的傾向として、土

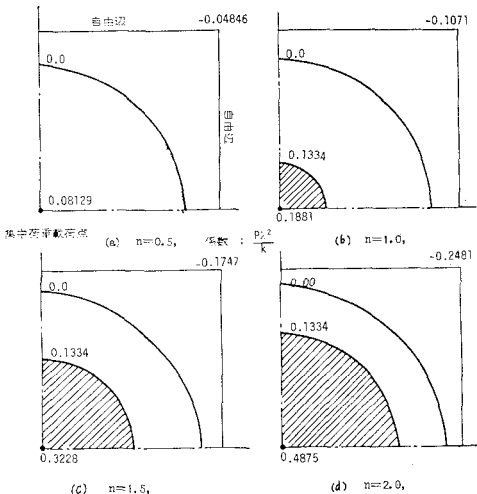


図-16 ばねの変形が  $\bar{\omega}$  を越える領域



の種類や、その他の条件によって異なるが、 $f, \bar{w}, k$  を適当に選ぶことによって、指数関数形か双曲線のいずれかで近似できるものと考えられる。

4) 板の半辺長  $a$  を一定とするとき、ばね定数  $k$  や板剛度  $D_s$  のわずかな変化では、曲げモーメントには大きな変化はみられず、その影響は少ない。当然ながらたわみに対する  $k$  の影響は大きい。また、 $k, D_s$  を一定にして、 $a$  を変化させても、正のたわみや曲げモーメントには大きな変化はみられない。

5) 本文にあげた例による限りでは、板で  $N=12$  ぐらいで、実用上さしつかえない程度の精度が期待でき、逐次近似解法は有効な方法であると認められる。

#### 4. む す び

以上、連続した独立ばね上の周辺自由な板の解析を行った。さらに半無限弾性体上に支持された場合について考察いたしたいと考えている。

本研究の数値計算の演算に際しては、大阪市立大学計算機センターの FACOM-270-30 を使用した。

また本研究の一部は土木学会第 24 回年次学術講演会<sup>14)</sup>で報告したことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) Hetényi, M.: Beams on Elastic Foundation, The Univ. of Michigan Press, 1964.
- 2) 原口忠次郎: 弾性基礎上の矩形板, 山海堂, 1964.
- 3) Hayashi, K.: Theorie des Trägers auf Elastischer Unterlage, Verlag Julius Springer, 1921.
- 4) Flügge, W.: Hand-book of Mechanics, McGraw-Hill Book Co, 1962, 45-1.
- 5) 倉田・高端・谷平: 弾性基礎上の はりの 一非線形問題, 土木学会年次学術講演会概要, I-28, 1966.
- 6) 倉田・高端・谷平: 弾性基礎上の はりの 実験的一考察, 土木学会関西支部年次学術講演会概要, I-2, 1966.
- 7) Tsai and Westmann: Beams on Tensionless Foundation, Journal of EM. Div., A.S.C.E., EM. 5, Oct., 1967.
- 8) Weitsman, Y.: On the Unbonded Contact Between Plates and Elastic Half Space, Journal of Applied Mechanics, Transaction of the A.S.M.E., June, 1969.
- 9) 能町純雄: 弾性基礎にある 四辺四隅自由な 矩形板の曲げについて, 土木学会論文集, 第 32 号, 1956.
- 10) Nádai, A.: Die elastischen Platten, Verlag von Julius Springer, 1925, S. 65.
- 11) 日本道路協会: 道路橋下部構造設計指針, 直接基礎の設計編, 昭和 43 年

- 12) Takenaka, J. and Nishigaki, Y. and Yanagi, D.: On the Load Test in Clay Soils, 4th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, July, 1971, Bangkok, Thailand.
- 13) 最上武雄編著: 土質工学, 第 5 章, 技報堂, 1969.
- 14) 倉田・高端・谷平: 弾性基礎上の板の非線形問題, 土木学会第 24 回年次学術講演会概要, I-53, 1969.

#### 付 録

##### 使用記号

$E$ : 弾性係数

$k$ : ばね定数 ( $\text{kg/cm}^3$ )

$\omega$ : ばねの変形量

$\bar{w}$ : ばねが完全弾塑性体とした場合弾性最大たわみ

$p$ : ばね反力, 地盤反力

$p'$ : 任意点の修正されたばね反力

$w$ : 板のたわみ

$D_s$ : 板剛度

$t$ : 板厚

$\nu$ : ポアソン比

$\lambda$ : 長さを無次元化するための量 ( $=\sqrt[4]{k/D_s}$ )

$h, h'$ : 分格長

$\delta$ : 無次元化した分格長 ( $=\lambda h$ )

$a, b$ : 半辺長

$A$ : 無次元化した半辺長 ( $=\lambda a$ )

$M, N$ : 分割数

$\bar{q}$ : 格点荷重強度

$q$ : 等分布荷重

$P$ : 集中荷重

$\alpha$ : 荷重比 ( $=q/P\lambda^2$ )

$\beta$ : 集中荷重の位置による分布を表わす係数

$[K]$ : 差分表示のための係数マトリックス

$[r]$ : ばね反力を表わす, 主対角マトリックス

$\{w\}$ : たわみの列マトリックス

$\{\bar{q}\}$ : 荷重を表わす列マトリックス

$r$ : ( $=\delta^4=(A/N)^4$ )

$n$ : 集中荷重の係数

$f$ : ばねの線形部分の比率を表わす係数

(1972.4.17・受付)