

拘束をうけるはりの弾性および非弾性横倒れ座屈解析

AN ANALYSIS OF ELASTIC AND INELASTIC LATERAL
BUCKLING OF RESTRAINED BEAMS

吉田 博*・井本 芳宏**

By Hiroshi Yoshida and Yoshihiro Imoto

1. 緒 言

はりの横倒れ座屈に関する研究は非常に古くから多くの研究者によって、理論的、実験的になされてきた。これに関する研究は弾性域のみならず、非弾性域にまで拡張され、多くの研究成果が発表され、構造物の設計規準にとり入れられている。

しかし、これまでの研究は、比較的単純な荷重条件および支持条件に対するもので、実際の構造物に作用するような複雑な荷重条件や境界条件あるいは各種の拘束条件を有するはり構造に適用するには、かなりの困難さが認められた。

このような観点から、福本・久保^{1),2)}は等曲げを受ける横構および対傾構で結ばれた2本の桁の横倒れ座屈に関する理論的・実験的研究を行なっている。理論的計算においてはエネルギー法を用いているが、作用荷重が等曲げに対するもので、外力が単純化されて取り扱われている。また、吉田・西田³⁾はスパンの中間でねじりが拘束されている単純ばりに2点集中荷重を作用させたときの横倒れ座屈強度の計算をエネルギー法を用いて計算している。Schmidt, L.C.⁴⁾は単純ばりに集中荷重が作用し、はりの両支点と荷重点にねじりおよび横たわみに対して拘束ばねのあるはりの横倒れ座屈強度を、また、Taylor, A.C. and Ojalvo, M.O.⁵⁾は、はりにそって連続的に分布するねじり拘束ばねおよび集中拘束ばねを有するはりの横倒れ座屈強度の検討を行なっている。Hartman, A.J.⁶⁾はねじり拘束ばねおよび横変位の拘束ばねを有する単純ばり、2径間および3径間連続ばりに1個の集中荷重が作用する場合について階差法を用いて横倒れ座屈強度を計算し、Trahair, N.S.⁷⁾はHartman, A.J. が用いたモデルを用いて実験的検討を行なってい

る。また、Powell, G. and Klinger, R.⁸⁾はマトリックス剛性法を用いて各種の拘束があるはりの横倒れ座屈強度の計算を行ない、Trahair, N.S. の実験結果との比較を行なっている。

一方、通常の構造物のはり、断面の1部が塑性域に入った非弾性域で座屈がおこり、構造物の塑性設計の立場からは、はりの非弾性横倒れ座屈に対する検討が要求されてきた。

非弾性横倒れ座屈に関する研究は比較的少なく、これに関する初期の研究は、文献9)に解説されている。Galambos, T.V.¹⁰⁾はH形鋼ばりの非弾性横倒れ座屈強度は、形鋼の製作の過程で断面に導入される残留応力に大きく影響されることを指適し、等曲げを受けるH形鋼ばりの非弾性横倒れ座屈の設計公式を提案している。この研究はさらに、曲げのみならず軸方向力を受けるはり一柱の曲げねじれ座屈へと展開している^{11),12)}。はりの非弾性横倒れ座屈の最近の研究としては、スパン中間でねじりおよび横変位に対する拘束ばねを有する長方形断面ばりの研究があり¹³⁾、等曲げおよび集中荷重が作用する場合について論ぜられ、また、横構および対傾構で結ばれた並列桁に関する前述の文献1)がある。

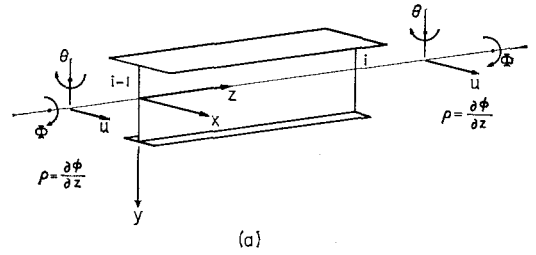
本研究においては、実際の構造物に見られるような、単純ばりおよび連続ばりの支承およびスパン中間において任意の拘束を受ける1軸対称断面ばりに、任意の荷重が作用する場合の弾塑性横倒れ座屈強度を計算するため、比較的簡単な計算であらゆる場合に応用が容易である伝達マトリックス法を用いた。横倒れ座屈解析への伝達マトリックス法の応用は、文献14)によってなされており、曲げモーメントおよび軸方向力を考慮した一般性のある微分方程式を用い、その方程式を直接解くことはせず、Runge-Kutter 法により近似的に伝達マトリックスを導いている。この論文においては、変断面ばりおよび斜めハンガーを有するはりを解析の対象としている。また、曲げねじりの影響を無視してアーチの面外座屈を

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 千葉県水道局技師

解析した文献 15) がある。

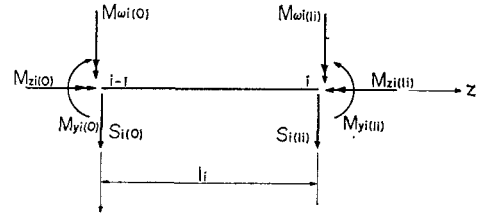
本研究においては、1 軸対称断面に曲げのみが作用する場合についての格間伝達マトリックスを陽な形で導き、任意の拘束条件に対する格点伝達マトリックスを用いて、任意の境界条件に対する弾塑性横倒れ座屈強度の計算法を示し、各種の拘束をうける 2 径間連続ばりの弾性横倒れ座屈強度の計算例および各種荷重条件および境界条件のもとでの単純ばりの非弾性横倒れ座屈強度について検討を加えた。



(a)

2. 解析に用いた仮定

- 1) はりは少なくとも 1 軸対称断面で、横倒れ座屈に対しては初期変形はないものとする。
- 2) 横断面形は座屈後も元の断面形状を保つものとする。
- 3) 鉛直変位は小さいものとする。
- 4) 応力-ひずみ関係は完全弾塑性体のものを用いる。
- 5) はり断面の残留応力分布は、圧延成形断面および溶接組立断面の残留応力分布を理想化した図-1(a) および (b) のものを用いる。
- 6) はりの非弾性域における曲げ剛性および曲げねじれ剛性は弾性域のみを有効とする Tangent Modulus Theory によるものとし、ねじり剛性は全断面を有効とする塑性流れ理論によるものとする。
- 7) はりの分割要素間では曲げモーメントは一定であり、荷重および各種の拘束ばねは、はりの分割節点に作用するものとする。



(b)

図-2 部材要素 i の座標軸、断面力および変形量

おける断面力（せん断力、曲げモーメント、ねじりモーメント、パイモーメント）と変形量（たわみ、たわみ角、ねじり角、ねじり率）の図-2(a) および (b) に示す方向をそれぞれ正の方向とする。部材要素 i の曲げ剛性 EI_y 、ねじり剛性 GK_T および曲げねじれ剛性 EI_w はそれぞれ一定であるとすれば、 $y-z$ 面内で等しい曲げを受ける y 軸が対称軸である 1 軸対称断面部材に対するはりの横倒れ座屈の微分方程式は^{17), 18)},

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + M_0 \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$EI_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (GK_T + \bar{K}) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + M_0 \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

によって表わされる。ここに、 u および ϕ は横変位およびねじれ角で、

$$\bar{K} = \int_A \sigma a^2 dA \dots\dots\dots (3)$$

であり、 σ は断面内の要素の応力、 a はせん断中心からこの要素までの距離を示す。

式 (1) および (2) の連立微分方程式の一般解は、

$$u = -\frac{M_0}{EI_y} \left(\frac{K_1}{\alpha_1^2} \sinh \alpha_1 z + \frac{K_2}{\alpha_1^2} \cosh \alpha_1 z - \frac{K_3}{\alpha_2^2} \sin \alpha_2 z - \frac{K_4}{\alpha_2^2} \cos \alpha_2 z \right) + \frac{1}{EI_y} (K_5 z + K_6) \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi = K_1 \sinh \alpha_1 z + K_2 \cosh \alpha_1 z + K_3 \sin \alpha_2 z + K_4 \cos \alpha_2 z - \frac{K_7}{M_0} z - \frac{K_8}{M_0} \dots\dots\dots (5)$$

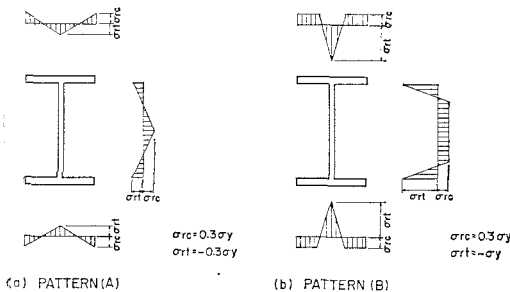


図-1 理想化した残留応力分布

3. 伝達マトリックスの誘導

(1) 基礎方程式

図-2 に示すはり要素 i において、断面の重心を通り部材軸方向に z 軸を、部材面内で z 軸に直角な主軸方向を x および y 軸とする。部材要素 i の材端 $i-1, i$ に

にて与えられる。ここに、

$$\lambda_1 = \frac{GK_T + \bar{K}}{EI_\omega}, \quad \lambda_2 = \frac{M_0^2}{E^2 I_y I_\omega},$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{-\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{2}}$$

であり、 $K_1 \dots K_8$ は積分定数である。これより残りの変形量および部材の断面力は、

$$\theta = u'$$

$$= -\frac{M_0}{EI_y} \left(\frac{K_1}{\alpha_1} \cosh \alpha_1 z + \frac{K_2}{\alpha_1} \sinh \alpha_1 z - \frac{K_3}{\alpha_2} \cos \alpha_2 z + \frac{K_4}{\alpha_2} \sin \alpha_2 z \right) + \frac{K_5}{EI_y} \dots (6)$$

$$\rho = \phi'$$

$$= \alpha_1 K_1 \cosh \alpha_1 z + \alpha_1 K_2 \sinh \alpha_1 z + \alpha_2 K_3 \cos \alpha_2 z - \alpha_2 K_4 \sin \alpha_2 z - \frac{K_7}{M_0} \dots (7)$$

$$S = -EI_y u'''$$

$$= M_0 (\alpha_1 K_1 \cosh \alpha_1 z + \alpha_1 K_2 \sinh \alpha_1 z + \alpha_2 K_3 \cos \alpha_2 z - \alpha_2 K_4 \sin \alpha_2 z) \dots (8)$$

$$M_\eta = -EI_y u''$$

$$= M_0 (K_1 \sinh \alpha_1 z + K_2 \cosh \alpha_1 z + K_3 \sin \alpha_2 z + K_4 \cos \alpha_2 z) \dots (9)$$

$$M_z = GK_T \phi' - EI_\omega \phi'''$$

$$= (GK_T - EI_\omega \alpha_1^2) \alpha_1 K_1 \cosh \alpha_1 z + (GK_T - EI_\omega \alpha_1^2) \alpha_1 K_2 \sinh \alpha_1 z + (GK_T + EI_\omega \alpha_2^2) \alpha_2 K_3 \cos \alpha_2 z - (GK_T + EI_\omega \alpha_2^2) \alpha_2 K_4 \sin \alpha_2 z - GK_T K_7 / M_0 \dots (10)$$

$$M_\omega = -EI_\omega \phi''$$

$$= -EI_\omega (\alpha_1^2 K_1 \sinh \alpha_1 z + \alpha_1^2 K_2 \cosh \alpha_1 z - \alpha_2^2 K_3 \sin \alpha_2 z - \alpha_2^2 K_4 \cos \alpha_2 z) \dots (11)$$

によって表わされる。

(2) 格間伝達マトリックス

式(4)より式(11)までをマトリックス形式で書き表わすと、

$$Z(z) = B(z) \cdot a$$

となる。ここに、 $Z(z)$ および a は、

$$Z^T(z) = \{u \theta \phi \rho S M_\eta M_z M_\omega\}$$

で表わされる $z=z$ での状態量ベクトルおよび

$$a = \{K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7 K_8\}$$

で表わされる定数ベクトルであり、 $B(z)$ は8行8列のマトリックスである。

これより、はり要素 i の左端と右端の状態量を関係づける格間伝達マトリックスは、

$$F_i = B(l) \cdot B(0)^{-1} \dots (12)$$

にて表わされる²¹⁾ 8行8列のマトリックスである(付録参照)。

(3) 格点伝達マトリックス

a) 弾性拘束のある場合の格点伝達マトリックス

図-3に示すように横変位に対する拘束ばね定数を K_{ui} 、はりの横変位のたわみ角に対する拘束ばね定数を $K_{\theta i}$ 、はりのねじれに対する拘束ばね定数を K_{bi} 、はりの断面のそりに対する拘束ばね定数を $K_{\omega i}$ とする。これら4種の拘束ばねは点 i に取り付けられており、特に、たわみ角および横変位に対する拘束ばねはせん断中心に取り付けられているものとする。格点 i の左端と右端の状態量を結びつける格点伝達マトリックスは、

$$P_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{ui} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{\theta i} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{bi} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{\omega i} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (13)$$

と表わすことができる。

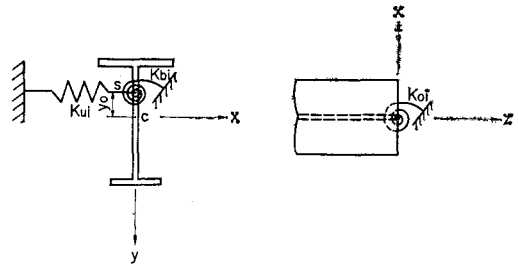


図-3 格点 i の弾性拘束

b) 剛支持されている点での格点伝達マトリックス

ばねを介することなく、直接に支持されている支点においては、弾性支承の伝達マトリックスのばね定数を無限大とすることは、数値計算上好ましくはないので、剛支持の条件から線形関係式を修正する必要がある²⁰⁾。

たとえば、格点 n が横変位およびねじれに対して剛支持されている場合の条件式は、

$$u_n = \phi_n = 0$$

である。連続ばりの左端の自由度から成る初期ベクトル A_1^L を格点 n の右端まで伝達すると次の式を得る。

$$V_n^R = F_n P_{n-1} \dots P_1 F_1 R A_1^L \dots (14)$$

ここに、 F_1, \dots, F_n は格間 $1, \dots, n$ の格間伝達マトリックスであり、 P_1, \dots, P_{n-1} は格点 $1, \dots, n-1$ の格点伝達マトリックスであり、 V_n^R は格点 n の左端の状態量ベクトル、 R は連続ばりの左端の境界マトリックスである。いま、左端が横曲げおよびねじれに対して単純支持である場合、式(14)は次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} u \\ \theta \\ \phi \\ \rho \\ S \\ M_y \\ M_z \\ M_{\omega} \end{bmatrix}_{n+1}^R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \rho \\ S \\ M_z \end{bmatrix}_n^L \dots (15)$$

横変位およびねじれに対して剛支持されている格点 n では、せん断力 S とねじりモーメント M_z が支点反力によって不連続となる。この剛支点での支点反力（飛躍量） S' および M_z' を新しい未知量とし、格点 n が横変位およびねじれに対して剛支持されているという条件を用いて、格点 n の右端の状態量ベクトル V_{n+1}^L は、

$$\begin{bmatrix} u \\ \theta \\ \phi \\ \rho \\ S \\ M_y \\ M_z \\ M_{\omega} \end{bmatrix}_{n+1}^L = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{13}b_{11}+a_{14}b_{21} & a_{12}+a_{13}b_{12}+a_{14}b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{81}+a_{83}b_{11}+a_{84}b_{21} & a_{82}+a_{83}b_{12}+a_{84}b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_n^L \\ \rho_n^L \\ S' \\ M_z' \end{bmatrix} \dots (16)$$

と表わすことができる。ただし、

$$b_{11} = -\frac{a_{11}a_{34}-a_{31}a_{14}}{a_{13}a_{34}-a_{33}a_{14}}, \quad b_{12} = -\frac{a_{12}a_{34}-a_{32}a_{14}}{a_{13}a_{34}-a_{33}a_{14}}$$

$$b_{21} = \frac{a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}}{a_{13}a_{34}-a_{33}a_{14}}, \quad b_{22} = \frac{a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}}{a_{13}a_{34}-a_{33}a_{14}}$$

c) 種々の拘束状態に対する格点伝達マトリックス

表-1 は実際の構造物において考えられる種々の拘束状態に対する格点伝達マトリックスの求め方を例示したものである。

d) 荷重作用位置の影響

一般に荷重ははりのせん断中心に作用することなく、せん断中心より h_0 だけ隔てた対称軸上に作用する。この場合、はりの回転に伴うねじれモーメントが付加される。図-4 はこの状態を示したもので、ねじり角 $d\phi$ に

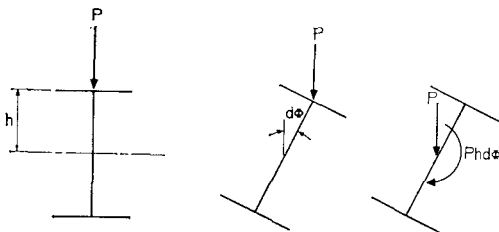


図-4 荷重作用点による付加ねじりモーメント

表-1 種々の拘束状態に対する格点伝達マトリックスの例

拘束状態	格点マトリックスの求め方
	中心軸上の横変位が剛に拘束されている。 $u=0$ の条件より S を消去して新しい未知量 S' を導入する。
	中心軸の横変位がばね定数 K で弾性的に拘束されている。 $S_{n+1}^L = S_n^R - Ku$
	中心軸のねじりが剛に拘束されている。 $\phi=0$ の条件より M_z を消去して新しい未知量 M_z' を導入する。
	任意の1点で横変位がばね (K) によって弾性的に拘束されている。 $S_{n+1}^L = S_n^R - Ku - Kh\phi$ $M_{z_{n+1}}^L = M_{z_n}^R + Khu + Kh^2\phi$
	任意の2点で横変位がばね (K_1, K_2) によって弾性的に拘束されている。 $S_{n+1}^L = S_n^R - (K_1 + K_2)u - (K_1h_1 - K_2h_2)\phi$ $M_{z_{n+1}}^L = M_{z_n}^R + (K_1h_1 - K_2h_2) \times u + (K_1h_1^2 + K_2h_2^2)\phi$

対して付加されるねじりモーメント dM_z は、

$$dM_z = -Ph_0d\phi$$

となる。ここに、 P は格点に作用する荷重である。これより、 Ph_0 の大きさのねじりに対する拘束ばねが格点にあると考えて、式 (13) において、 $K_{bi} = Ph_0$ とおけばよい。ただし、 h_0 はせん断中心より下方を正とする。

4. はりの境界条件式

(1) 弾性ばねのない支点の境界条件式

表-2 に種々の境界条件とそれに対応する左端の自由度が示されている。境界条件を考慮した左端の状態量 V_1^L は、

$$V_1^L = RA_1^L \dots (17)$$

にて表わされる²⁰⁾。ここに、 R は左端の境界マトリックスであり、 A_1^L は左端の自由度から成る初期ベクトルである。

また、右端の境界条件式は、右端の状態量ベクトル V_n^R に右端の境界マトリックス R' を前掛けして、

表-2 はり端における境界条件の例

	(a)	(b)	(c)	(d)
ねじりに対する拘束状態				
横変位に対する拘束状態				
そりに対する拘束状態				
左端の自由度	θ, ϕ, ρ, S	θ, ρ, S, M_z	S, M_y, M_z, M_ω	u, θ, ϕ, ρ
右端の境界条件	$u=M_y=M_z=M_\omega=0$	$u=\phi=M_y=M_\omega=0$	$u=\theta=\phi=\rho=0$	$S=M_y=M_z=M_\omega=0$

$$R'V_n^R=0 \dots\dots\dots(18)$$

によって表わされる²⁰⁾。

(2) 弾性支点の境界条件式

左端の支点において、変形量 $u_1^L, \theta_1^L, \phi_1^L$ および ρ_1^L に対応して、次のような支点反力が生ずる。

$$S_1^L = -K_u u_1^L, \quad M_{y1}^L = -K_\theta \theta_1^L$$

$$M_{z1}^L = -K_\phi \phi_1^L, \quad M_{\omega 1}^L = -K_\rho \rho_1^L$$

ここに、 K_u, K_θ, K_ϕ および K_ρ はそれぞれの変形量に対するばね定数である。

これより、左端の自由度は、 $u_1^L, \theta_1^L, \phi_1^L$ および ρ_1^L となり、左端の境界マトリックス R と初期ベクトル A_1^L は、

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_\rho \end{bmatrix}, \quad A_1^L = \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ \phi \\ \rho \end{bmatrix}^L \dots\dots\dots(19)$$

となる。

右端においては、実際にはりは存在しないが、弾性支点 n の格点伝達マトリックス P_n を用いて、状態量ベクトル V_n^R を弾性支点 n の右側まで伝達する。

$$V_{n+1}^L = P_n V_n^R$$

しかるのち、右端の境界条件 $S_{n+1}^L=0, M_{y n+1}^L=0, M_{z n+1}^L=0$ および $M_{\omega n+1}^L=0$ を与える境界マトリックス R' を前掛けして、境界条件式、

$$R'V_{n+1}^L=0$$

を得る。

(3) 一部弾性支持の場合の境界条件式

この場合は (1) と (2) の場合の混合の左端での境界マトリックスおよび初期ベクトルを得ることができる。右端の境界条件は (2) の場合と同様に取り扱うことができる。

5. 計算方法

左端における状態量ベクトル V_1^L は、格間伝達マトリックス $F_i (i=1, 2, \dots, n)$ と格点伝達マトリックス $P_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ によって右端まで伝達され、

$$V_n^R = F_n P_{n-1} F_{n-1} P_{n-2} \dots P_2 F_2 P_1 F_1 V_1^L \dots\dots(20)$$

のように表わされ、連続ばりの両端の状態量を関係づける線形方程式が得られる。

式 (17) および (18) を式 (20) に代入すると、

$$R'F_n P_{n-1} F_{n-1} \dots P_2 F_2 P_1 F_1 R A_1^L = 0 \dots\dots(21)$$

となり、式 (21) の係数マトリックスの値を 0 と置いた

$$|R'F_n P_{n-1} F_{n-1} \dots P_2 F_2 P_1 F_1 R| = 0 \dots\dots(22)$$

は、はりの横倒れ座屈条件式を与える。

式 (22) の数値計算に当たっては、試行錯誤法等によればよい。

6. 数値計算例

(1) 計算精度と分割数

一様曲げを受ける単純ばりの座屈モーメントを計算することにより、電子計算機の精度を調べてみた。スパン中間には荷重および拘束ばねがないので、座屈条件式は、

$$|R'FR| = 0 \dots\dots\dots(23)$$

となる。同じ問題をスパンを n 等分し、各分割要素に対する格間伝達マトリックス F_1, F_2, \dots, F_n を用いて、

$$|R'F_n F_{n-1} \dots F_2 F_1 R| = |R'FR| = 0 \dots\dots(24)$$

のように座屈条件式を表わすことができる。

$n=100$ として式 (23) と式 (24) の F の値を比較した結果、有効桁数 4 桁まで一致した。

また、図-5 に示す単純ばりに等分布荷重が作用する場合、スパン長に対する弱軸まわりの断面 2 次半径の比、 L/r_y (以後、弱軸まわりの細長比という) が 300 と 100 について、分割数を 4, 8, 20 および 50 の 4 通りの計算結果を図-6 に示す。境界条件は両端で曲げおよ

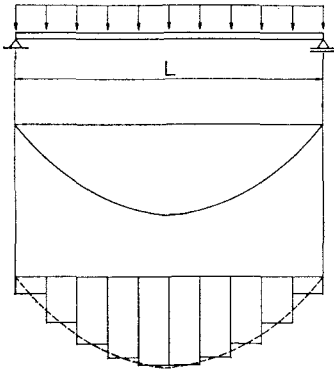


図-5 計算に用いる曲げモーメント分布

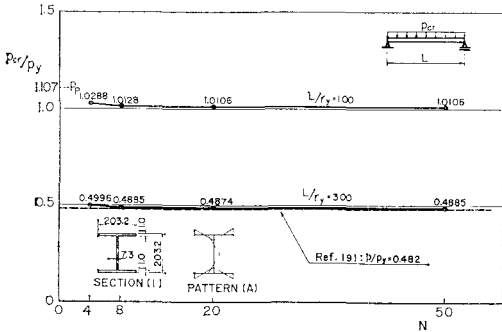


図-6 分割数と精度

びねじれに対して単純支持で、各分割要素の曲げモーメントはその中点におけるものを使用した。弱軸まわりの細長比が 300 の場合は弾性域で座屈するが、100 の場合は非弾性域で座屈する。いずれの場合も分割数が 8 以上で十分な精度の解が得られる。なお、図中の点線は、弱軸まわりの細長比が 300 の場合の文献 19) から得られた理論値である。

(2) 2 径間連続ばりの弾性座屈

文献 7) において、アルミニウムを用いて 2 径間連続ばりの座屈実験を行なっている。境界条件は両端および中間支店で曲げおよびねじれに対して単純支持である。

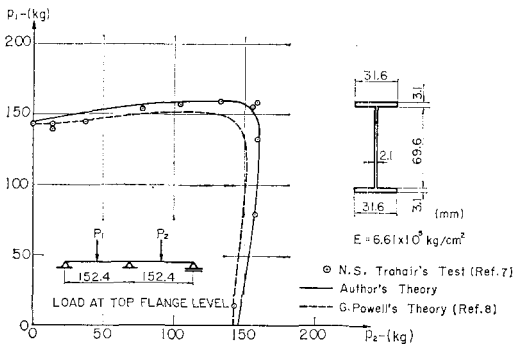


図-7 2 径間連続ばりの座屈相関関係

荷重は左右スパンの中央に集中荷重を各 1 個作用させ、これらの荷重の相関関係を実験的に調べている。図-7 の実線は同じ境界条件と材料の定数を用いて計算した値を、黒丸は文献 7) の実験値を、図中点線は文献 8) の計算値を示している。

(3) 種々の拘束条件のあるばりの弾性座屈

文献 8) において剛性法を用いて計算している図-8 (a) に示すはりの横倒れ座屈解析を行なう。断面は図-8(c) に示す 3 種類のもが用いられており、荷重の作用位置は ①~② の間が上フランジに、④ および ⑤ の荷重は下フランジにそれぞれ作用しているものとする。拘束条件としては、① と ⑥ で横変位とねじりが剛支持されており、② では上フランジの横変位が剛支持され、④ および ⑤ で下フランジの横変位に対して、ばね定数が 1786 kg/cm のばねで弾性支持され、⑦ でねじりが剛支持されている。② では上フランジの横変位 a が 0 となるから、

$$\bar{a} = u - \phi h_u = 0$$

を用いて初めの未知量 S を消去して、新しい未知量 S' を導入する。④ および ⑤ では弾性ばね K_u と荷重の高さ h_0 に対して次の飛躍量が生ずる。

$$S = -K_u u + K_u h_1 \phi$$

$$M_z = -K_u h_1 u + (P h_0 + K_u h_1^2) \phi$$

ここに h_u および h_1 はせん断中心から上フランジおよび下フランジまでの距離である。⑥ においては横変位 u とねじり角 ϕ が 0 という条件を用いて未知量 S'

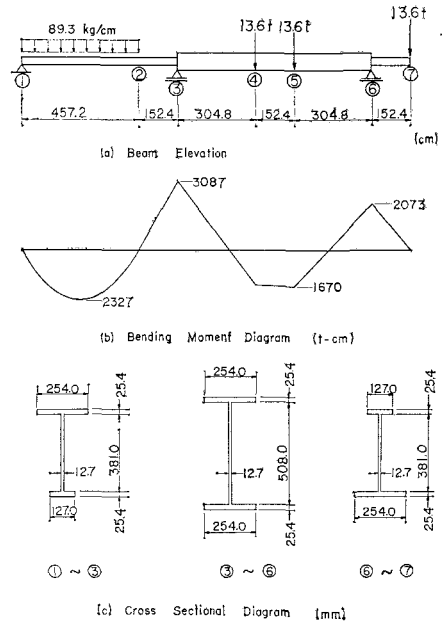


図-8 種々の拘束条件を有する連続ばり

および M_z を消去して、新しい未知量 S'' と M_z' を導入する。

数値計算にあたっては、第1スパンを80等分、第2スパンを100等分、張出し部を20等分に分割し、②、④、⑤ および ⑥ の点で上述の格点伝達マトリックスを用いて計算を行なった。

文献8) による座屈安全率は2.13であるが、本理論による計算値は1.85である。この相違は本計算においては、分割数を十分多くとっていることが考えられる。

7. 非弾性域での横倒れ座屈の計算例および考察

(1) 非弾性域での断面の曲げおよびねじりに関する係数

H形断面のフランジおよびウェブを微小長方形要素に分割することによって、任意の残留応力分布の影響を考慮した曲げおよびねじりに関する断面の諸係数の数値計算法が文献16) に示されている。

図9~12 は代表的な4つのH形断面(表3)の弱軸まわりの曲げ剛性、曲げねじり剛性、曲げによる垂直応力および残留応力によって生ずるせん断中心まわりの付加トルクおよびせん断中心の位置の変化を示したものである。実線は図1(a) に示す残留応力 Pattern (A) に対するものであり、点線は Pattern (B) に対するものである。

表3 計算に用いる H 形断面

Section No.	Depth (d)	Flange Width (B)	Flange Thickness (T)	Web Thickness (wt)	Remarks
1	203.2	203.2	11.0	7.3	SWF31
2	683.5	253.7	19.0	12.4	27WF94
3	374.7	393.7	27.0	17.3	14WF142
4	412.8	405.0	46.1	28.6	14WF246

(Unit in mm)

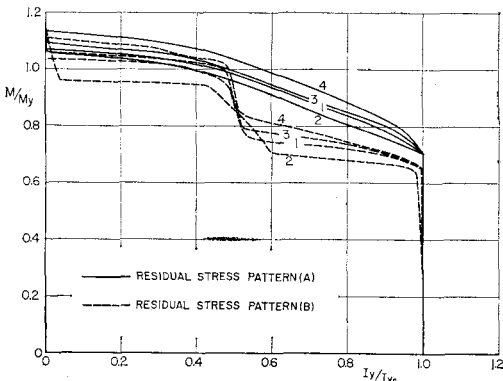
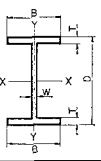


図9 非弾性域での弱軸まわりの曲げ剛性

数値計算においては、仮定した荷重による各分割要素の中点の曲げモーメントを計算し、その曲げモーメントに対する断面の係数を用いて座屈条件式(22)の値を計算し、試行錯誤により座屈荷重を決定することができる。以下に単純ばりの非弾性座屈について、境界条件および荷重条件を変化させた場合の計算結果を示す。

(2) 荷重条件の影響

以下、表3の断面1の単純ばりを用いて、荷重条件

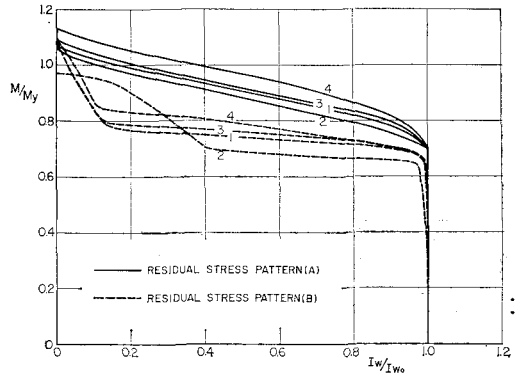


図10 非弾性域での曲げねじり剛性

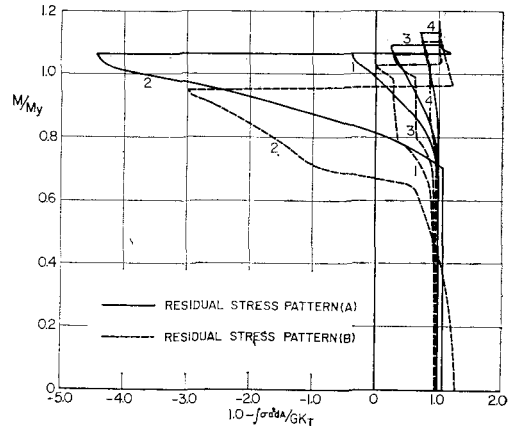


図11 非弾性域での付加ねじりモーメントに関する係数

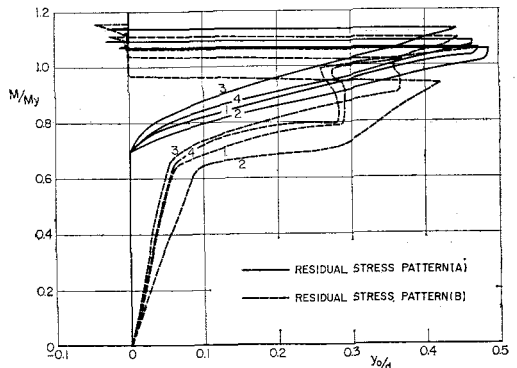


図12 非弾性域でのせん断中心

がはりの横倒れ座屈におよぼす影響について、2~3の考察を行なう。境界条件は両端で曲げおよびねじれに關して単純支持である。

a) 荷重の種類

図-13 は、単純ばりの中央に1個の集中荷重が作用する場合、等分布荷重が作用する場合および一様曲げが作用する場合の座屈曲線を示している。実線は残留応力分布の Pattern (A) を、点線は Pattern (B) のものを示している。弱軸まわりの細長比が100以上では、一様曲げが作用する場合の座屈モーメントは、集中荷重が1個作用する場合のスパン中央の曲げモーメントの約80%であり、この割合は弾性域および非弾性域を通じて、ほぼ一定である。一般の構造物に作用する荷重による曲げモーメント分布は、1点集中荷重によるものと、一様曲げを受ける場合の中間にある。

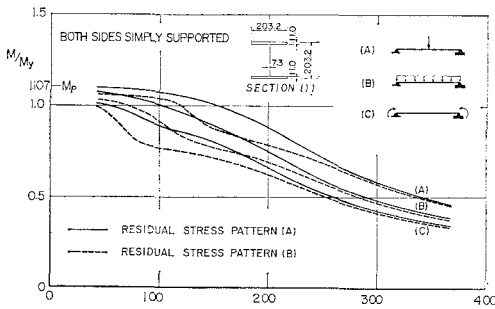


図-13 各種荷重による単純ばりの非弾性横倒れ座屈

弱軸まわりの細長比が大きい範囲では、残留応力分布の Pattern (B) の座屈モーメントは、Pattern (A) のものより数%小さい程度であるが、1点集中荷重の場合は、細長比が150~200の範囲で、一様曲げの場合は70~150の範囲で最大15%低下する。これは残留応力分布の Pattern (B) の場合は、残留応力がない場合の降伏曲げモーメントの0.7倍付近で、上フランジが、両端から急激に降伏することによっている。

b) 荷重の作用点

図-14 および 15 は、1個の集中荷重がスパン中央に

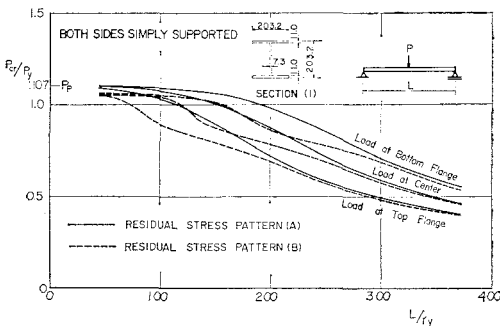


図-14 集中荷重による単純ばりの非弾性横倒れ座屈 (荷重作用点の影響)

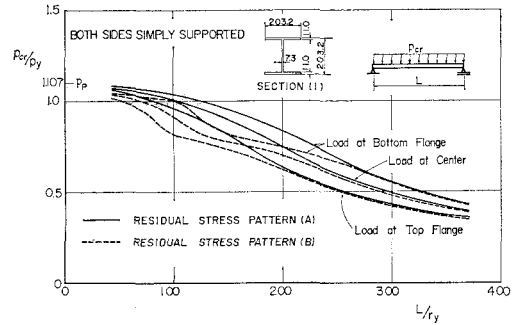


図-15 等分布荷重による単純ばりの非弾性横倒れ座屈 (荷重作用点の影響)

作用する場合と等分布荷重が作用する場合の荷重作用点の相違による影響を示している。それぞれ、荷重が上フランジに作用する場合、断面の中央に作用する場合および下フランジに作用する場合について示してある。残留応力分布を無視したこれらの値は、弾性域で文献19)の値と一致する。荷重作用点の相違による影響は非弾性域においても弾性域とほぼ同じであるが、細長比の減少とともに、その影響は減少している。

c) モーメント勾配

図-16 には、両端で不等曲げを受ける単純ばりの横倒れ座屈の座屈曲線を示している。残留応力分布は、Pattern (A) のものである。右端に作用する曲げモーメントが左端に作用する曲げモーメントの q 倍の場合について、 q を1.0から0.2間隔で-1.0まで変化させており、モーメント勾配と座屈長さの関係を、弾性域のみならず非弾性域においても知ることができる。

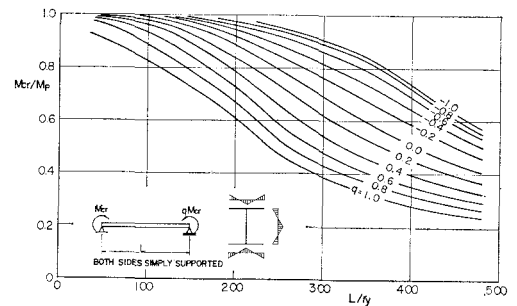


図-16 不等曲げを受ける単純ばりの非弾性横倒れ座屈

図-17 は $q=1.0, 0, -1.0$ の3つの場合に、等分布荷重のみの座屈荷重の $\alpha=0.2$ および 0.4 倍の等分布荷重が作用する場合の座屈曲線を示している。実線は残留応力分布の Pattern (A) を、点線は Pattern (B) を示している。 $q=-1.0$ の場合、残留応力分布の Pattern (A) の場合では細長比の比較的大きいところで座屈モーメントの低下が著しいが、Pattern (B) では細長比の200付近で低下する。また、 $q=1.0$ では残留応力分布の Pattern (A) および (B) とも、細長比の100付近

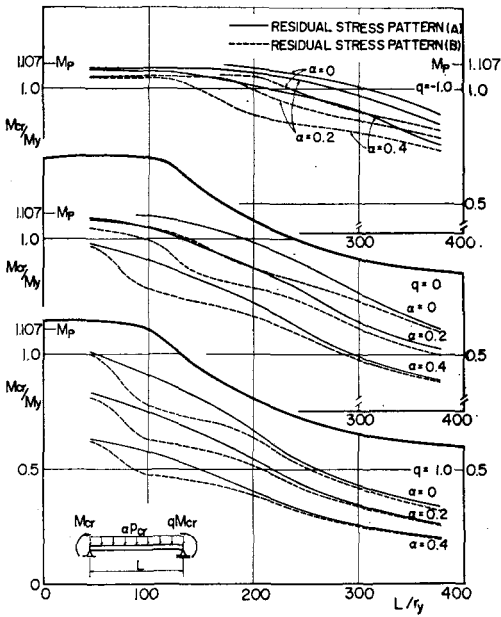


図-17 不等曲げと等分布荷重を受ける非弾性横倒れ座屈

で、座屈モーメントが著しく低下し、その低下の割合は $q = -1.0$ の場合の2倍に達する。

(3) 境界条件の影響

表-3 の断面1の単純ばりに一様曲げを受ける場合の横倒れ座屈強度を、表-4 に示す各種の境界条件について計算を行なったのが図-18 および 19 である。図-18 は残留応力分布の Pattern (A) の場合を、図-19 は Pattern (B) の場合を示している。

当然のことであるが、曲げおよびねじりに対して単純支持の場合が最も座屈モーメントが小さく、両端が固定の場合が最も大きい。また、計算に用いた断面では、曲げを固定した場合が、ねじりを固定した場合より大きい座屈モーメントを与えることがわかる。

表-4 境界条件

	左端の境界条件	右端の境界条件
①	$u = u' = \phi = \phi' = 0$	$u = u' = \phi = \phi' = 0$
②	$u = u' = \phi = \phi' = 0$	$u = u' = \phi = \phi' = 0$
③	$u = u' = \phi = \phi' = 0$	$u = u' = \phi = \phi' = 0$
④	$u = u' = \phi = \phi' = 0$	$u = u' = \phi = \phi' = 0$
⑤	$u = u' = \phi = \phi' = 0$	$u = u' = \phi = \phi' = 0$
⑥	$u = u' = \phi = \phi' = 0$	$u = u' = \phi = \phi' = 0$
⑦	$u = u' = \phi = \phi' = 0$	$u = u' = \phi' = \phi'' = 0$
⑧	$u = u' = \phi = \phi' = 0$	$u = u' = \phi = \phi' = 0$
⑨	$u = u' = \phi = 0$	$u = u' = \phi = \phi' = 0$

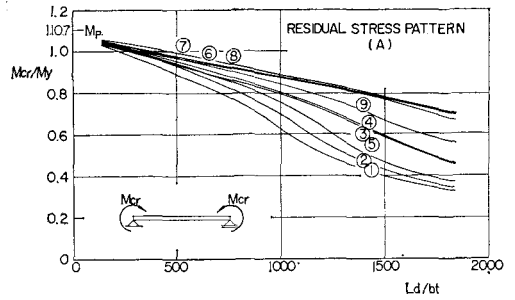


図-18 各種境界条件での等曲げを受ける単純ばりの非弾性横倒れ座屈 (残留応力 Pattern (A))

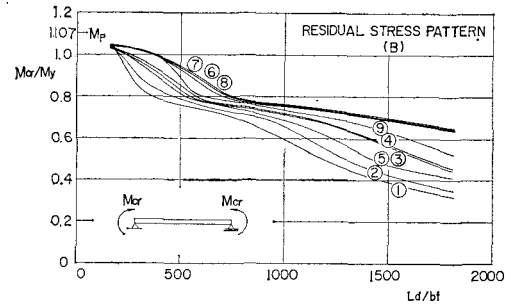


図-19 各種境界条件での等曲げを受ける単純ばりの非弾性横倒れ座屈 (残留応力 Pattern (B))

(4) 断面の影響

表-3 に示す断面1と断面2を用いて、座屈強度におよぼす断面形状の影響について検討してみた。断面1はフランジ幅が断面の高さに等しく、横倒れ座屈が occur にくい断面であり、断面2はフランジ幅が断面の高さの2.8分の1で、横倒れ座屈しやすい断面である。

文献10)において、曲げおよびねじりに対して単純支持の一様曲げによるはりの座屈モーメントは、横軸に Ld/bt をとることにより、ほぼ断面に関係なく表わされることが示されている。

本研究においては、同様の検討を表-4 の9種類の境界条件について、残留応力分布の Pattern (A) および

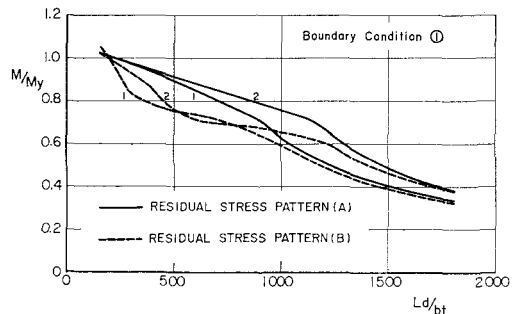
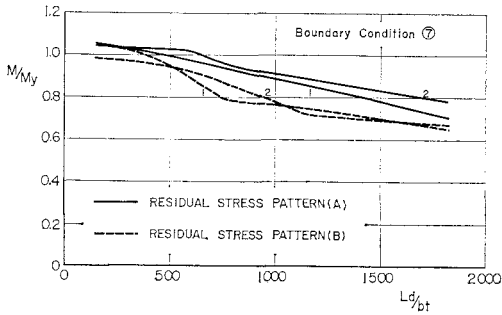
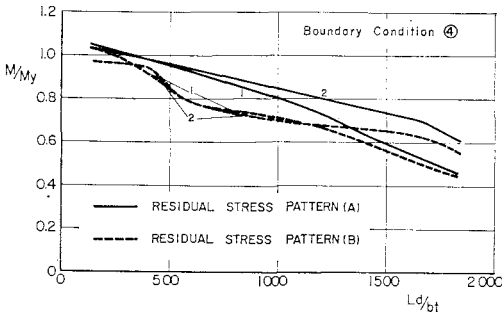


図-20 等曲げを受ける単純ばりの非弾性横倒れ座屈の断面の影響 (両端が曲げおよびねじりに対して単純支持)



図—21 等曲げを受ける単純ばりの非弾性横倒れ座屈の断面の影響（両端が曲げおよびねじりに対して固定支持）



図—22 等曲げを受ける単純ばりの非弾性横倒れ座屈の断面の影響（曲げおよびねじりに対して1端が単純支持，他端が固定支持）

(B) の場合に対して検討してみた。

図—20 は文献 10) に見られる両端が曲げおよびねじりに対して単純支持の場合であり，図—20 は両端固定の場合を，図—22 は1端が単純支持で他端が固定の場合を示している。両端固定の場合は断面による影響は比較的小さいが，1端が単純支持で他端が固定の場合，かなり大きい差が見られる。その他の境界条件の場合はこの中間にある。

8. 結 論

本研究においては，はりの横倒れ座屈を伝達マトリックスを用いて解析した。はりの分割要素間では曲げモーメントが一定であると，格間伝達マトリックスを導き，また，支点およびスパン中間で種々の拘束を考慮した格点伝達マトリックスを用いて任意の荷重条件，拘束条件および境界条件を有するはりの横倒れ座屈の解析法を示した。

計算例として3つの支点で横変位およびねじれに対して単純支持である2径間連続ばりおよび各種の拘束をうける2径間連続ばりの横倒れ座屈の解析例を示した。

また，非弾性横倒れ座屈の計算手法を示した。まず，はり断面の非弾性域での各種の係数を計算し，これらの

値を用いて任意の荷重条件および境界条件に対する座屈解析法を示し，単純ばりの非弾性横倒れ座屈強度に関する次の諸点について検討を行なった。

- 1) 作用荷重の種類による影響
- 2) 作用荷重位置の影響
- 3) 境界条件の影響
- 4) モーメント勾配の影響
- 5) 残留応力の影響
- 6) 断面の影響

本研究により，任意の境界条件および拘束条件を有するはりの横倒れ座屈解析が容易になったと考えられる。また，これまでモーメント勾配を有するはりの非弾性横倒れ座屈解析が困難であるとされていたが，容易に解析できるようになり，非弾性域での単純ばりの横倒れ座屈に関する若干の資料が示された。

なお，本方法を用いることにより，各種の拘束条件を有する連続ばり，変断面はり等の非弾性横倒れ座屈の解析も容易である。

本研究に当っては名古屋大学 成岡昌夫教授，福本啓士助教授にお世話になった。

なお，使用した電子計算機は金沢大学の FACOM 230-35 である。

記 号

A^L : 左端の自由度から成る初期ベクトル

\mathbf{a} : 係数ベクトル

b : フランジ幅

d : 断面の高さ

$EI_\omega, (EI_{\omega 0})$: 曲げねじり剛性（弾性域での曲げねじり剛性）

$EI_y, (EI_{y 0})$: 弱軸まわりの曲げ剛性（弾性域での曲げ剛性）

F_i : 格間伝達マトリックス

GK_T : St. Venant のねじり剛性

h_u, h_l : せん断中心から上下フランジまでの距離

h_0 : せん断中心から荷重作用点までの距離

I_x : x 軸まわりの断面2次モーメント

K_{bi} : 点 i におけるねじり角に対する拘束ばね定数

K_{oi} : 点 i における横たわみ角に対する拘束ばね定数

K_{ui} : 点 i における横変位に対する拘束ばね定数

$K_{\omega i}$: 点 i におけるそりに対する拘束ばね定数

L : スパン長

l : 格間長

L/r_y : 弱軸まわりの細長比

M : 作用曲げモーメント

M_{cr} : 座屈曲げモーメント

M_0 : はり要素の曲げモーメント

M_p : 全塑性曲げモーメント

- M_y : 残留応力のないはりの弾性限界曲げモーメント
 M_z : ねじりモーメント
 M_ω : バイモーメント
 M_y : y 軸まわりの曲げモーメント
 n : 分割数
 P : 集中荷重強度
 P_{cr} : 集中荷重による座屈強度
 P_i : 格点伝達マトリックス
 p : 等分布荷重強度
 p_{cr} : 等分布荷重による座屈強度
 p_y : 残留応力のないはりの等分布荷重による弾性限界強度
 q : 右端に作用する曲げモーメントと左端に作用する曲げモーメントの比
 R : 左端の境界マトリックス
 R' : 右端の境界マトリックス
 S : せん断力
 S', S'' : せん断力の飛躍量
 t : フランジ厚さ
 u : せん断中心の横変位
 \bar{u} : 上フランジの横変位
 V_i^L, V_i^R : 格間 i の左側および右側の状態量ベクトル
 w : ウェブ厚さ
 α : 等分布荷重の等分布荷重のみによる座屈強度に対する比
 θ : 横たわみ角
 ρ : ねじり率
 ϕ : せん断中心まわりのねじり角

参 考 文 献

- 1) 福本啓士・久保全弘: 横構・対傾構をもつ桁の横倒れ座屈強度, 土木学会論文報告集, 第 196 号, pp. 19~28, 1971 年 12 月
- 2) 福本啓士・久保全弘: 横倒れ座屈強度と横補剛効果, JSSC, Vol. 7, No. 71, pp. 11~22, 1971 年 11 月
- 3) 吉田 博・西田 進: ねじり拘束のあるはりの横倒れ座屈強度, 第 25 回土木学会年次学術講演会概要集, pp. 53~54, 1970 年 11 月
- 4) Schmidt, L.C.: Restraints Against Elastic Lateral Buckling, Proc. of ASCE, Vol. 91, No. EM 6, pp. 1~10, Dec., 1965.
- 5) Taylor, A.C. and Ojalvo, M.: Torsional Restraint of

- Lateral Buckling, Proc. of ASCE, Vol. 92, No. ST 2, pp. 115~129, April, 1966.
- 6) Hartman, A.J.: Elastic Lateral Buckling of Continuous Beams, Proc. of ASCE, Vol. 93, No. ST 4, pp. 11~26, August, 1967.
- 7) Trahair, N.S.: Elastic Stability of Continuous Beams, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. ST5, pp. 1295~1311, June, 1969.
- 8) Powell, G. and Klinger, R.: Elastic Lateral Buckling of Steel Beams, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. ST 9, pp. 1919~1932, Sept., 1970.
- 9) Baker, J., Horne, M.R. and Heyman, J.: The Steel Skeleton, Vol. 2, Plastic Behaviour and Design, Cambridge Univ. Press, 1965.
- 10) Galambos, T.V.: Inelastic Lateral Buckling of Beams, Proc. of ASCE, Vol. 89, No. ST 5, pp. 217~242, Oct., 1963.
- 11) Fukumoto, Y. and Galambos, T.V.: Inelastic Lateral-Torsional Buckling of Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol. 92, No. ST 2, pp. 41~61, April, 1966.
- 12) Galambos, T.V., Adams, P.F. and Fukumoto, Y.: Further Study on the Lateral-Torsional Buckling of Steel Beam-Columns, Welding Research Council Bulletin, No. 115, pp. 1~11, July, 1966.
- 13) Hartman, A.J.: Inelastic Flexural-Torsional Buckling, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. EM. 4, pp. 1103~1117, August, 1971.
- 14) Unger, B.: Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Burchlaufträgern mit einfach-symmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt und einer Abwandlungdes Reduktionsverfahrens als Lösungsmethode Dissertation, Technischen Hochschule Darmstadt, 1969.
- 15) Sakimoto, T. and Namita, Y.: Out of Plane Buckling of Solid Rib Arches Braced with Transverse Bars, Proc. of JSCE, No. 191, pp. 109~116, July, 1971.
- 16) Yoshida, H. and Nishida, S.: Lateral-Torsional Properties of Wide-Flange Sections with Residual Stresses, Memoirs of the Faculty of Technology, Kanazawa University, Vol. 6, No. 3, pp. 13~23, 1971.
- 17) 福本啓士・西野文雄訳 (Galambos 著): 鋼構造部材と骨組一強度と設計, 丸善, 1970.
- 18) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, Second Edition, 1961.
- 19) Bleich, F.: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- 20) 成岡昌夫・遠田良喜: 伝達マトリックス法, コンピューターによる構造工学講座, 培風館, 1970.
- 21) Pestel, E.C. and Leckie, F.A.: Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.

【付 録】

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & l & 0 & \frac{M_0 GK_T}{E^2 I_y I_\omega A_2^2} \left(l - \frac{D_6}{A_1 A_2} \right) & -\frac{1}{EI_y A_2^2} \left(\frac{D_9}{A_1 A_2} + A_3 l \right) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{M_0 GK_T}{E^2 I_y I_\omega A_2^2} \left(1 - \frac{D_5}{A_1} \right) & -\frac{1}{EI_y A_2^2} \left(\frac{D_8}{A_1} + A_3 \right) \\ 0 & 0 & 1 & l + \frac{GK_T}{EI_\omega A_1 A_2} D_3 & \frac{1}{M_0} \left(\frac{D_6}{A_1 A_2} - l \right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{GK_T}{EI_\omega A_1} D_1 & \frac{1}{M_0} \left(\frac{D_5}{A_1} - 1 \right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & -\frac{M_0 G K_T}{E I_\omega A_1} D_1 & \frac{D_5}{A_1} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{M_0 G K_T}{E I_\omega A_1 A_2} D_3 & \frac{D_6}{A_1 A_2} \\
 0 & 0 & 0 & G K_T \left(1 - \frac{G K_T D_1}{E I_y A_1} - \frac{D_4}{A_1} \right) & \frac{1}{M_0} \left\{ G K_T \left(\frac{D_5}{A_1} - 1 \right) + \frac{E I_\omega A_2^2}{A_1} D_1 \right\} \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{D_2}{A_1} G K_T & -\frac{E I_\omega A_2}{M_0 A_1} D_3
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{ccc}
 -\frac{1}{E I_y A_2^2} \left(\frac{D_5}{A_1} - A_3 \right) & -\frac{M_0}{E^2 I_y I_\omega A_2^2} \left(\frac{D_5}{A_1 A_2} - l \right) & -\frac{M_0}{E^2 I_y I_\omega A_2^2} \left(\frac{D_5}{A_1} - 1 \right) \\
 -\frac{D_6}{E I_y A_1 A_2} & \frac{M_0}{E^2 I_y I_\omega A_2^2} \left(\frac{D_5}{A_1} - 1 \right) & \frac{M_0 D_3}{E^2 I_y I_\omega A_1 A_2} \\
 \frac{1}{M_0} \left(\frac{D_5}{A_1} - 1 \right) & \frac{D_3}{E I_\omega A_1 A_2} & \frac{D_1}{E I_\omega A_1} \\
 \frac{A_2}{M_0 A_1} D_3 & \frac{D_1}{E I_\omega A_1} & -\frac{D_2}{E I_\omega A_1} \\
 \frac{A_2}{A_1} D_3 & \frac{M_0 D_1}{E I_\omega A_1} & -\frac{M_0 D_2}{E I_\omega A_1} \\
 \frac{D_5}{A_1} & -\frac{M_0 D_3}{E I_\omega A_1 A_2} & \frac{M_0 D_1}{E I_\omega A_1} \\
 \frac{A_2}{M_0 A_1} (G K_T D_3 - E I_\omega A_2 D_2) & \frac{G K_T D_1}{E I_\omega A_1} - \frac{D_4}{A_1} & -\frac{G K_T D_2}{E I_\omega A_1} - \frac{D_7}{A_1} \\
 \frac{E I_\omega A_2^2}{M_0 A_1} D_1 & \frac{D_2}{A_1} & \frac{D_4}{A_1}
 \end{array} \right\}$$

ここに

$$A_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

$$A_2 = \alpha_1 \alpha_2$$

$$A_3 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2$$

$$D_1 = -\cosh \alpha_1 l + \cos \alpha_2 l$$

$$D_2 = \alpha_1 \sinh \alpha_1 l + \alpha_2 \sin \alpha_2 l$$

$$D_3 = \alpha_2 \sinh \alpha_1 l - \alpha_1 \sin \alpha_2 l$$

$$D_4 = \alpha_1^2 \cosh \alpha_1 l + \alpha_2^2 \cos \alpha_2 l$$

$$D_5 = \alpha_2^2 \cosh \alpha_1 l + \alpha_1^2 \cos \alpha_2 l$$

$$D_6 = \alpha_2^3 \sinh \alpha_1 l + \alpha_1^3 \sin \alpha_2 l$$

$$D_7 = \alpha_1^3 \sinh \alpha_1 l - \alpha_2^3 \sin \alpha_2 l$$

$$D_8 = \alpha_2^4 \cosh \alpha_1 l - \alpha_1^4 \cos \alpha_2 l$$

$$D_9 = \alpha_2^5 \sinh \alpha_1 l - \alpha_1^5 \sin \alpha_2 l$$

(1972.2.17・受付)