

横圧力によって軌道に生ずる応力および変形の解析

ANALYSIS OF THE DEFORMATION OF THE RAILWAY TRACK UNDER THE
LATERAL PRESSURE APPLIED HORIZONTALLY TO THE RAIL HEAD

小 野 一 良*

By Kazuyosi Ono

1. 緒 言

曲線軌道を固定軸距の長い車両が通過するときにはレールに大きな横圧力が作用する。この横圧力によってレールには横方向の移動および曲げを生じ、横圧力によってレール底部に生ずる曲げ応力が垂直荷重による曲げ応力を超過する場合がある。またレール頭部に受けた横圧力によってレールにねじりモーメントが作用し、レールに小返りを生ずる。レールが垂直荷重を受けた場合にレールに生ずるたわみおよび曲げモーメントを計算するにはレールが連続した弾性床に支持されると仮定してもまた等間隔に配置された弾性支点に支持されると仮定しても大きな差を生じない。しかるにレール頭部が横方向の圧力を受けたときにはレールの横方向の剛性が少ないため連続的に支持されると仮定することは実際の支持状態との間に大きな差を生ずる。

レール頭部に横方向の圧力が作用したときにレールに生ずる横方向の曲げおよびねじりの計算方法に関して従来多数の論文が発表されているが^{1)~5)}、これら論文の大部分はレールがまくらぎより受ける反力を集中荷重と仮定している。論文1), 2)においてはまくらぎ上におけるレール底部の横移動を0と見なし、1)においてはレールの横曲げを解き、2)においては主としてレールのねじれを論じている。論文3), 4), 5)においてはまくらぎ上におけるレール底部の横移動を考慮に入れてまずレールの横移動および横曲げを解き、次にレールのねじりを論じている。最後にレールがまくらぎより受ける反力およびモーメントをまくらぎ間に分散させ、レールが横方向に連続的に支持されていると仮定してレールの横移動とねじりとを同時に考慮に入れた解法を示している。

レール頭部が横圧力を受けたときには横曲げによってレール底部は横圧力の方向に移動し、またレールの小返

りによってレール底部は横圧力と反対の方向に移動する。レールがまくらぎから受ける水平方向の反力はこれらの横移動に関連を持つのでレールの横移動とねじりとは切り離さずに同時に考慮する必要があると考えられる。よって本論文においてはレールの横移動とねじれとを同時に考慮し、かつレールは横移動およびねじりに対してまくらぎより集中した反力およびモーメントを受けると仮定した。

一般にレールの横移動に対してはレールとまくらぎとの間の摩擦抵抗または軌道パッドのせん断抵抗、犬くぎの横移動に対する抵抗およびまくらぎが道床中を移動するときの抵抗が作用する。これらの抵抗力はレールとまくらぎ面との間の接触圧力およびまくらぎ下面と道床面との間の接触圧力の大きさによって大きな影響を受け、また抵抗の大きさは移動の初期において急激に増加し、漸次増加の割合が減少して最大値に達した後は徐々に減少する。したがって移動の初期においては抵抗力と横移動との比は大きく、移動の進行とともに減少する。

レールの小返りに対しては犬くぎの引抜抵抗力および軌道パッドまたはまくらぎ表面の圧縮に対する抵抗力がこれを防止する方向に作用する。この場合にもレールの小返り角に比例した抵抗モーメントが作用するとはいい難い。しかしレールとまくらぎとの間に軌道パッドが挿入され、かつレールが弾性的に締結されているときにはまくらぎ上におけるレールの横移動および小返りはこれらの値がある限界内にとどまる限り横圧力に比例し、またまくらぎの道床中における移動量もその大きさが0.5 mmに達するまでは横圧力に比例すると見なしてよいことが従来の実験によって確かめられている。

これまでに発表された論文ではまくらぎ上でのレール底部の横移動を0と仮定したものもあるが、レールの小返りに対しては小返り角に比例したモーメントが小返りを防止する方向に作用すると仮定している。また参考文献3), 5)ではレールの横移動に対しまくらぎから受ける

* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木工学科

反力を横移動に比例するとし、かつその比例の定数が垂直荷重の大きさに比例すると仮定している。しかし軌道に大きな横圧力をおよぼすような車両は一般に数個の車軸が接近して配置されているためこの車両の下ではレールとまくらぎとの間の圧力はほぼ一定と見なしたほうがよい場合もある。よって本論文においては比例の定数を垂直荷重の大きさにかわらず一定と仮定した。

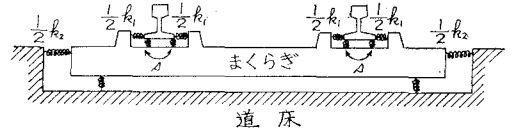


図-1 横圧力に対するレール締結装置および道床のばね定数

2. 一般解

図-1 に示すごとくレールは横方向の移動に対して k_1 なるばね定数をもってまくらぎに締結され、またまくらぎの移動に対しては道床より k_2 なるばね定数を持つ抵抗力が作用すると仮定し、レールの小返りに対してはまくらぎの締結部より s なるばね定数で抵抗モーメントが作用すると仮定する。

レールを頭部、腹部、底部の3部分に分ければこれらのせん断中心の横移動は次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_4 + h_1 \varphi_4 \\ \xi_2 &= \xi_4 + h_2 \varphi_4 \\ \xi_3 &= \xi_4 + h_3 \varphi_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

上式において ξ_4 はレール底面の横移動であり、 φ_4 はレールの小返り角であり、 h_1, h_2, h_3 はそれぞれレール頭部、腹部、底部のせん断中心のレール底面からの高さである (図-2 参照)。

レールの頭部、腹部、底部のせん断中心に作用する横方向のせん断力をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とし、またこれらの断面に作用するねじりモーメントをそれぞれ Z_1, Z_2, Z_3 とする。レールの長さ方向に x 軸を採り、 S_1, Z_1 等を x の関数とすれば任意のまくらぎ間に対して次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} EI_1 \frac{d^3 \xi_1}{dx^3} - S_1 - m_{12} = 0 \\ EI_2 \frac{d^3 \xi_2}{dx^3} - S_2 + m_{12} - m_{23} = 0 \\ EI_3 \frac{d^3 \xi_3}{dx^3} - S_3 + m_{23} = 0 \\ GJ_1 \frac{d\varphi_4}{dx} + Z_1 - m_{12}(h_1 - h_{12}) = 0 \\ GJ_2 \frac{d\varphi_4}{dx} + Z_2 - m_{12}(h_{12} - h_2) - m_{23}(h_2 - h_{23}) = 0 \\ GJ_3 \frac{d\varphi_4}{dx} + Z_3 - m_{23}(h_{23} - h_3) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\}$$

ここに I_1, I_2, I_3 はそれぞれレール頭部、腹部、底部の垂直軸のまわりの断面2次モーメントであり、 J_1, J_2, J_3 はこれら断面の(サンプソンの)ねじり定数とする⁶⁾。また m_{12} はレール腹部を板状の構造物と考えたときにレール頭部と腹部との接続部に作用するねじりモーメン

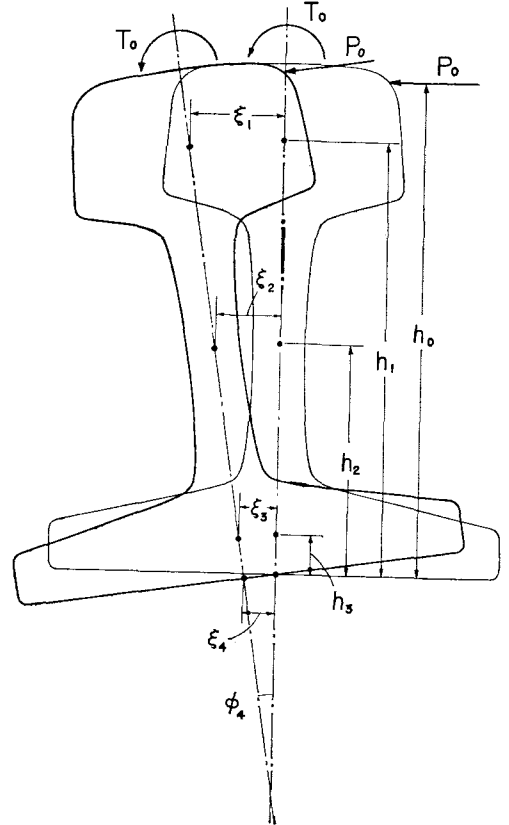


図-2 レールの横移動および小返り

トであり、図-3 に示す t_{12} は x 軸に平行な軸を持つ曲げモーメントであり、 p_{12} はせん断力である。 m_{23}, t_{23}, p_{23} は同様にレール腹部と底部との接続部に作用するねじりモーメント、曲げモーメントおよびせん断力である。なお図-3 に示す B_1, B_2, B_3 はそれぞれレール頭部、腹部、底部の垂直断面に作用する垂直軸のまわりの曲げモーメントである。 h_{12} および h_{23} はそれぞれレール頭部と腹部を分ける境界面および腹部と底部を分ける境界面のレール底面からの高さとする。

式(2)および(3)の中の3個ずつの式を加えあわせ、かつ m_{12}, m_{23} を消去すれば次式が得られる。

$$EI \frac{d^3 \xi_4}{dx^3} + EH \frac{d^3 \varphi_4}{dx^3} - Q_{4,n+1/2} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$GJ \frac{d\varphi_4}{dx} - EH \frac{d^3 \xi_4}{dx^3} - EK \frac{d^3 \varphi_4}{dx^3} + M_{4,n+1/2} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

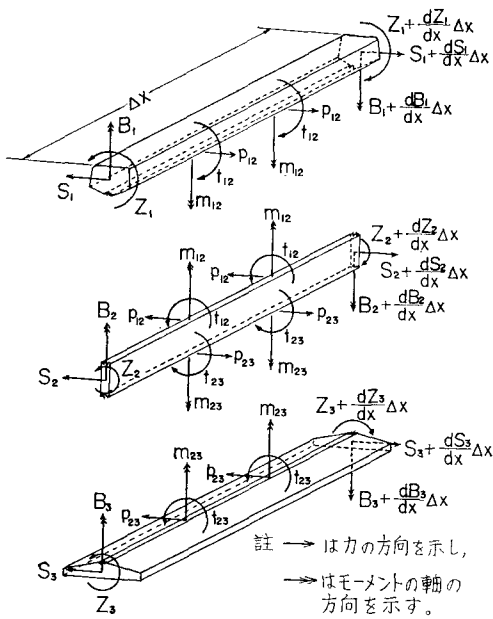


図-3 レール頭部、腹部、底部に作用する力およびモーメント

上式において

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \dots\dots\dots (6)$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3 \dots\dots\dots (7)$$

$$H = I_1 h_1 + I_2 h_2 + I_3 h_3 \dots\dots\dots (8)$$

$$K = I_1 h_1^2 + I_2 h_2^2 + I_3 h_3^2 \dots\dots\dots (9)$$

$$Q_{4,n+1/2} = S_1 + S_2 + S_3 \dots\dots\dots (10)$$

$$M_{4,n+1/2} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + h_1 S_1 + h_2 S_2 + h_3 S_3 \dots\dots\dots (11)$$

x の正の方向に向かってまくらぎに順次番号を付け、これまでに導いた諸式はすべて番号 n と $n+1$ のまくらぎの間の左側レールに適用される式であると考え、 $Q_{4,n+1/2}$ は番号 n と $n+1$ のまくらぎの間に作用する横方向のせん断力であって、この間に横圧力が作用しないときには $Q_{4,n+1/2}$ は一定値を採る。 $M_{4,n+1/2}$ は $Q_{4,n+1/2}$ の作用点をまくらぎの底面としたときにこのまくらぎ間でレールに作用するねじりモーメントであってこの間で一定値を採る。いまここに

$$\eta_i = \xi_i + f \varphi_i \dots\dots\dots (12)$$

$$f = H/I, \quad L = K - fH \dots\dots\dots (13)$$

と置けば式 (4), (5) より次式が導かれる。

$$EI \frac{d^3 \eta_i}{dx^3} - Q_{i,n+1/2} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$GJ \frac{d \varphi_i}{dx} - EH \frac{d^3 \eta_i}{dx^3} - EL \frac{d^3 \varphi_i}{dx^3} + M_{i,n+1/2} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ただしここに $i=4$ とする。これまでは添字 $i=1, 2, 3$ はそれぞれレール頭部、腹部、底部を代表していた

が、今後、 $i=4$ は左側レールを代表し、 $i=2$ は右側レールを代表して使用する。したがって番号 n と $n+1$ のまくらぎ間における右側レールに関しては $\eta_4, \varphi_4, Q_{4,n+1/2}, M_{4,n+1/2}$ のかわりに $\eta_2, \varphi_2, Q_{2,n+1/2}, M_{2,n+1/2}$ と置くこととすれば式 (14), (15) において $i=2$ とした式が導かれる。また $i=3$ および 1 はそれぞれ左右レールに関する量の和または差の $1/2$ を表わすこととし、いまここに

$$\eta_1 = (\eta_4 - \eta_2)/2, \quad \eta_3 = (\eta_4 + \eta_2)/2 \dots\dots\dots (16)$$

$$\varphi_1 = (\varphi_4 - \varphi_2)/2, \quad \varphi_3 = (\varphi_4 + \varphi_2)/2 \dots\dots\dots (17)$$

と置き、 $Q_{1,n+1/2}, Q_{3,n+1/2}, M_{1,n+1/2}, M_{3,n+1/2}$ についても同様な式によって定義すれば、式 (14), (15) は $i=1, 3$ に対しても適用される。これから後に導く諸式は特にことわらない限り $i=1, 2, 3, 4$ に対して論ずることとする。

番号 n のまくらぎ上における $\eta_i, d\eta_i/dx, d^2\eta_i/dx^2, \varphi_i, d\varphi_i/dx, d^2\varphi_i/dx^2$ の値をそれぞれ $(\eta_i)_n, (\eta_i')_n, (\eta_i'')_n, (\varphi_i)_n, (\varphi_i')_n, (\varphi_i'')_n$ と置く。番号 $n-1$ と $n+1$ のまくらぎの間に外力として横圧力またはねじりモーメントが作用しない場合には式 (14) より次式が導かれる (補足 1 参照)。

$$6 \Delta^2 (\eta_i)_n - a^2 \{ \Delta^2 (\eta_i)_{n+1} + 6 (\eta_i)_{n+1} \} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

ただしここに Δ^2 は第 2 階の差分の記号であり、たとえば

$$\Delta^2 (\eta_i)_n = (\eta_i)_{n-1} - 2(\eta_i)_n + (\eta_i)_{n+1} \dots\dots\dots (19)$$

とする。また a はまくらぎ間隔とする。

左側レールが番号 n のまくらぎから受ける横方向の反力を $R_{4,n}$ とし、右側レールが受ける反力を $R_{2,n}$ とする。左右のレールに作用する水平方向のせん断力は番号 n のまくらぎを越えることによって $R_{4,n}$ または $R_{2,n}$ だけ減ることになるので次の関係式が導かれる。

$$R_{i,n} = Q_{i,n-1/2} - Q_{i,n+1/2} \dots\dots\dots (20)$$

ただしここに $R_{1,n}$ および $R_{3,n}$ は式 (16), (17) と同様な式によって $R_{4,n}$ および $R_{2,n}$ より導いた数値とする。式 (20) を使えば式 (14) より次式が導かれる (補足 2 参照)。

$$EI \Delta^2 (\eta_i)_{n+1} + a R_{i,n} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

式 (14) と (15) から η_i を消去すれば次式が得られる。

$$GJ \frac{d \varphi_i}{dx} - EL \frac{d^3 \varphi_i}{dx^3} - f Q_{i,n+1/2} + M_{i,n+1/2} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

いまここに

$$t = a \left(\frac{GJ}{EL} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (23)$$

$$b = \frac{t}{\sinh t}, \quad c = t \tanh \frac{t}{2} \dots\dots\dots (24)$$

と置けば式 (22) より次式が導かれる (補足 3 参照)。

$$D^2(\varphi_i)_n - \frac{EL}{GJ} \{ (1-b) D^2(\varphi_i'')_n + 2c(\varphi_i''')_n \} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

左側レールの小返りに対して番号 n のまくらぎから左側レールが受ける抵抗モーメントを $N_{1,n}$ とし、右側レールの小返りに対して右側レールが受ける抵抗モーメントを $N_{2,n}$ とする。左右のレールに作用するねじりモーメントは番号 n のまくらぎを越えることによって $N_{1,n}$ または $N_{2,n}$ だけ減少するので次の関係が得られる。

$$N_{1,n} = M_{i,n+1/2} - M_{i,n-1/2} \dots\dots\dots (26)$$

上式は $i=1, 3$ に対しても成立し、 $N_{1,n}$ および $N_{3,n}$ は式 (16), (17) と同様な式によって $N_{4,n}$ および $N_{2,n}$ より導いた数値とする。式 (26) を考慮すれば式 (15) より次式が導かれる (補足 4 参照)。

$$GJ D^2(\varphi_i)_n - EH D^2(\eta_i'')_n - EL D^2(\varphi_i''')_n - aN_{1,n} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

番号 n のまくらぎに対する左側レール底部の移動量は $R_{1,n}/k_1$ によって表わされ、また番号 n のまくらぎの道床における移動量は $(R_{1,n} + R_{2,n})/k_2$ によって表わされるので、左側レール底部の道床に対する移動量は次式によって与えられる。

$$(\varepsilon_i)_n = \frac{R_{1,n}}{k_1} + \frac{R_{1,n} + R_{2,n}}{k_2} \dots\dots\dots (28)$$

上式に式 (12) を代入すれば

$$(\eta_i)_n - f(\varphi_i)_n = \frac{R_{1,n}}{k_1} + \frac{R_{1,n} + R_{2,n}}{k_2} \dots\dots (29)$$

右側レールに対しても同様な式が導かれ、これらの式の和または差に式 (16), (17) を代入すれば次式が得られる。

$$R_{1,n} = k_3 \{ (\eta_i)_n - f(\varphi_i)_n \}, \quad i=1, 3 \dots\dots\dots (30)$$

ただしここに k_3 は次式によって計算した数値とする。

$$\frac{1}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2} \dots\dots\dots (31)$$

さきに述べたごとくレールは小返りに対して s なるばね定数をもってまくらぎに締結されているので

$$(\varphi_i)_n = N_{4,n}/s \dots\dots\dots (32)$$

となり、右側レールに対しても同様な式が導かれるので、これらの式の和または差より次式が導かれる。

$$N_{1,n} = s(\varphi_i)_n \dots\dots\dots (33)$$

式 (30) および (33) をそれぞれ式 (21) および (27) に代入すれば式 (18) と (25) をあわせて 4 個の式が得られ、これらの式は未知数として $(\eta_i)_n, (\varphi_i)_n, (\eta_i'')_n, (\varphi_i''')_n$ だけを含むことになる。次にこれら 4 式を差分方程式として解くのであるが、式 (30) が $i=1, 3$ に限って成立するのでこれから導く諸式は $i=1, 3$ に限って成立する。またこれまでの諸式は外から横圧力またはモーメントが作用しない区間について導いたので、これから後に導く諸式も外力の作用しない区間に限って適用される。

いまここに $(\eta_i)_n, (\varphi_i)_n$ 等を次式によって表わす。

$$\left. \begin{aligned} (\eta_i)_n &= f \alpha_i \lambda_i^{-n}, & (\varphi_i)_n &= \beta_i \lambda_i^{-n} \\ (\eta_i'')_n &= -\frac{f}{a^2} \tau_i \lambda_i^{-n}, & (\varphi_i''')_n &= \frac{GJ}{EL} \delta_i \lambda_i^{-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots (34)$$

上式を式 (30) および式 (33) に代入すれば

$$R_{1,n} = f k_i (\alpha_i - \beta_i) \lambda_i^{-n}, \quad N_{1,n} = s \beta_i \lambda_i^{-n} \dots\dots (35)$$

式 (34) および (35) を式 (18), (21), (25), (27) に代入すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 6 \alpha_i y_i - \tau_i (y_i + 3) &= 0 \\ 2 \tau_i y_i + 3 u_i (\alpha_i - \beta_i) &= 0 \\ \beta_i y_i - (1-b) y_i \delta_i - c \delta_i &= 0 \\ (\beta_i - w \tau_i - \delta_i) y_i - v \beta_i &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

上式において

$$y_i = \frac{1}{2} (\lambda_i - 2 + \lambda_i^{-1}) \dots\dots\dots (37)$$

$$u_i = \frac{k_i a^3}{3 EI}, \quad v = \frac{sa}{2 GJ}, \quad w = \frac{EHf}{GJ a^2} \dots\dots (38)$$

式 (36) は未知数 $\alpha_i, \beta_i, \tau_i, \delta_i$ を含む 1 次の 4 元連立方程式であり、かつ定数項を含まないので、未知数をすべて 0 とする解とならないためには次の関係が要求される。

$$\begin{aligned} 4 b y_i^4 + \{ b u_i - 4 c + 4(1-b)v + 6(1-b)u_i w \} y_i^3 \\ + \{ 3 b u_i + c(-u_i + 4v + 6u_i w) + (1-b)u_i v \} y_i^2 \\ + u_i \{ c(v-3) + 3(1-b)v \} y_i + 3 c u_i v = 0 \dots (39) \end{aligned}$$

上式を解けば y_i として 4 個の値が得られ、 $y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}$ とする。これらの y_i の値を式 (36) に代入することによって $\alpha_i, \beta_i, \tau_i, \delta_i$ が得られ、この中の 1 個は任意の値とすることができる。 y_{ij} に対するものを $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \tau_{ij}, \delta_{ij}$ とする。ただしここに $j=1, 2, 3, 4$ とし、 $\alpha_{ij}=1$ と仮定する。式 (37) によれば 1 個の y_{ij} に対して 2 個の λ_{ij} が得られる。いま次の条件

$$|\lambda_{ij}| > 1 \dots\dots\dots (40)$$

を満足する 1 根が得られれば他は λ_{ij}^{-1} によって与えられる。 $n \rightarrow \infty$ となるときに $(\eta_i)_n, (\varphi_i)_n$ 等は 0 になるという境界条件を考慮すれば式 (34) は次式のごとく一般化することができる。

$$\left. \begin{aligned} (\eta_i)_n &= f \sum A_{ij} \alpha_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ (\varphi_i)_n &= \sum A_{ij} \beta_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ (\eta_i'')_n &= \frac{f}{a^2} \sum A_{ij} \tau_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ (\varphi_i''')_n &= \frac{GJ}{EL} \sum A_{ij} \delta_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

上式における \sum は $j=1, 2, 3, 4$ の合計を示す。また、 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ は境界条件によって定まる定数である。このようにして $(\eta_i)_n, (\varphi_i)_n$ が決定されたときには式 (14) および (15) より次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} (\eta_i')_n &= f/a \sum A_{ij} \varepsilon_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ (\varphi_i')_n &= 1/a \sum A_{ij} \zeta_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

ただしここに

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= -\frac{r_{ij}}{2} \cdot \frac{\lambda_{ij} + 1}{\lambda_{ij} - 1} = \frac{1}{2} \left(-\alpha_{ij} + \frac{r_{ij}}{6} \right) (\lambda_{ij} - \lambda_{ij}^{-1}) \\ \zeta_{ij} &= -(b+c)\delta_{ij} \frac{\lambda_{ij} + 1}{\lambda_{ij} - 1} \\ &= \frac{1}{2} (-\beta_{ij} + b\delta_{ij}) (\lambda_{ij} - \lambda_{ij}^{-1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

また式 (35) より

$$\begin{aligned} R_{i,n} &= f k_i \Sigma A_{ij} (\alpha_{ij} - \beta_{ij}) \lambda_{ij}^{-n} \\ &= -\frac{2EH}{a^3} \Sigma A_{ij} r_{ij} y_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{i,n} &= s \Sigma A_{ij} \beta_{ij} \lambda_{ij}^{-n} = \frac{2GJ}{a} \Sigma A_{ij} \theta_{ij} y_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ &\dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

ただしここに

$$\theta_{ij} = \beta_{ij} - w r_{ij} - \delta_{ij} \dots\dots\dots (46)$$

次に $Q_{i,n+1/2}$ は式 (14) または (20) より求められ、 $M_{i,n+1/2}$ は式 (15) または (26) より求められ、その結果は

$$\begin{aligned} Q_{i,n+1/2} &= f k_i \Sigma A_{ij} \theta_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ &= -\frac{EH}{a^3} \Sigma A_{ij} r_{ij} (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \lambda_{ij}^{-n} \dots\dots (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{i,n+1/2} &= s \Sigma A_{ij} \omega_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ &= \frac{GJ}{a} \Sigma A_{ij} \theta_{ij} (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \lambda_{ij}^{-n} \dots\dots (48) \end{aligned}$$

ただしここに

$$\left. \begin{aligned} \rho_{ij} &= \frac{\alpha_{ij} - \beta_{ij}}{\lambda_{ij} - 1} = -\frac{r_{ij}}{3u_i} (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \\ \omega_{ij} &= \frac{\beta_{ij}}{\lambda_{ij} - 1} = \frac{\theta_{ij}}{2v} (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (49)$$

番号 n と $n+1$ のまくらぎ間中央における $d\eta_i/dx$ および $d\varphi_i/dx$ の値は境界条件を論ずる場合に必要となるが、これらの値を $(\eta'_i)_{n+1/2}$ および $(\varphi'_i)_{n+1/2}$ とすれば次式によって表わされる。

$$\left. \begin{aligned} (\eta'_i)_{n+1/2} &= \frac{f}{a} \Sigma A_{ij} \mu_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ (\varphi'_i)_{n+1/2} &= \frac{1}{a} \Sigma A_{ij} \nu_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

ただしここに

$$\left. \begin{aligned} \mu_{ij} &= -\frac{1}{8} r_{ij} (1 + 3\lambda_{ij}^{-1}) + \epsilon_{ij} \lambda_{ij}^{-1} \\ &= \frac{1}{8} r_{ij} (3 + \lambda_{ij}^{-1}) + \epsilon_{ij} \\ \nu_{ij} &= \zeta_{ij} \lambda_{ij}^{-1} \cosh \frac{t}{2} - t \delta_{ij} \lambda_{ij}^{-1} \sinh \frac{t}{2} \\ &\quad + (\beta_{ij} - \delta_{ij}) (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \left(\cosh \frac{t}{2} - 1 \right) \\ &= \zeta_{ij} \cosh \frac{t}{2} + t \delta_{ij} \sinh \frac{t}{2} \\ &\quad + (\beta_{ij} - \delta_{ij}) (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \left(\cosh \frac{t}{2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

次に番号 n と $n+1$ のまくらぎ間中央における $d^2\eta_i$

$/dx^2$ および $d^2\varphi_i/dx^2$ をそれぞれ $(\eta''_i)_{n+1/2}$ および $(\varphi''_i)_{n+1/2}$ とすればこれらは次式によって計算される。

$$\left. \begin{aligned} (\eta''_i)_{n+1/2} &= \frac{f}{a^2} \Sigma A_{ij} \tau_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ (\varphi''_i)_{n+1/2} &= \frac{GJ}{EL} \Sigma A_{ij} \psi_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

ただしここに

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{1}{2} r_{ij} (1 + \lambda_{ij}^{-1}) = -\epsilon_{ij} (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \\ \psi_{ij} &= -\frac{1}{t} \zeta_{ij} \lambda_{ij}^{-1} \sinh \frac{t}{2} \delta_{ij} \lambda_{ij}^{-1} \cosh \frac{t}{2} \\ &\quad - \frac{1}{t} (\beta_{ij} - \delta_{ij}) (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \sinh \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{t} \zeta_{ij} \sinh \frac{t}{2} + \delta_{ij} \cosh \frac{t}{2} \\ &\quad + \frac{1}{t} (\beta_{ij} - \delta_{ij}) (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \sinh \frac{t}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

番号 n と $n+1$ のまくらぎ間中央における η_i および φ_i の値をそれぞれ $(\eta_i)_{n+1/2}$ 、 $(\varphi_i)_{n+1/2}$ とすればこれらは次式によって計算される。

$$\left. \begin{aligned} (\eta_i)_{n+1/2} &= f \Sigma A_{ij} \chi_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \\ (\varphi_i)_{n+1/2} &= \Sigma A_{ij} \kappa_{ij} \lambda_{ij}^{-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

ただしここに

$$\left. \begin{aligned} \chi_{ij} &= \alpha_{ij} \lambda_{ij}^{-1} - \frac{\epsilon_{ij}}{2} \lambda_{ij}^{-1} + \frac{r_{ij}}{8} \lambda_{ij}^{-1} - \frac{u_i}{16} \rho_{ij} \\ &= \alpha_{ij} + \frac{\epsilon_{ij}}{2} + \frac{r_{ij}}{8} + \frac{u_i}{16} \rho_{ij} \\ \kappa_{ij} &= \beta_{ij} \lambda_{ij}^{-1} - \zeta_{ij} \lambda_{ij}^{-1} \frac{1}{t} \sinh \frac{t}{2} \\ &\quad + \delta_{ij} \lambda_{ij} \left(\cosh \frac{t}{2} - 1 \right) \\ &\quad - (\beta_{ij} - \delta_{ij}) (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \left(\frac{1}{t} \sinh \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \beta_{ij} + \zeta_{ij} \frac{1}{t} \sinh \frac{t}{2} + \delta_{ij} \left(\cosh \frac{t}{2} - 1 \right) \\ &\quad + (\beta_{ij} - \delta_{ij}) (1 - \lambda_{ij}^{-1}) \left(\frac{1}{t} \sinh \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

以上に導いた多数の計算式によれば ϵ_{ij} 、 ζ_{ij} 等には2種の計算方法が示されているが、この中で係数 λ_{ij}^{-1} を多数含む式は式の形が複雑のようであるが、実際の計算においては小さい数の和になる場合が多いので計算の精度が比較的に高い。これに反し、 λ_{ij}^{-1} を含むことの少ない式は見かけ上式の形が簡単であるが、実際の計算においては大きな数の差があらわれる場合が多いので計算の精度が低くなる。

これまでに導いた α_{ij} 、 β_{ij} ... 等はすべて5個の係数すなわち t 、 u_i 、 u_s 、 v 、 w の関数となる。軌道が垂直荷重のみ受けるときには軌道係数と称する1個の数値によってレールのたわみおよび曲げモーメントが簡単に計算されたことに比べてレールが横方向の圧力を受けた場合の

解法ははなはだ複雑になる。

以上に導いた諸式は横圧力またはモーメントの作用点を含まない半無限の軌道延長について導いたのであるが、次に軌道の1箇所に横圧力またはモーメントが作用した場合について境界条件を考察し、積分定数を決定する。軌道に多数の横圧力またはモーメントが各所に散在して作用する場合には1個ずつの横圧力またはモーメントによる影響を求め、これらを合計すればよい。

3. 横圧力がまくらぎの直上でレールに作用する場合

横圧力またはモーメントが番号0のまくらぎの直上でレールに作用する場合について積分定数を決定する。このときにはこのまくらぎを中心としてレールに生ずる変形は前後対称となり、番号0のまくらぎ上においてレールの切線方向は変形前のレールの方向に平行になる。したがって

$$\left. \begin{aligned} (\eta_4')_0=0, \quad (\eta_2')_0=0 \\ (\varphi_4')_0=0, \quad (\varphi_2')_0=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

図-4に示すごとく左側レールに作用する横圧力 P_4 および右側レールに作用する横圧力 P_2 はこれらの力の作用点直下のまくらぎから受ける抵抗力とその前後のレールに作用するせん断力によって支持される。したがって

$$R_{4,0}+2Q_{4,1/2}=P_4, \quad R_{2,0}+2Q_{2,1/2}=P_2 \dots\dots(57)$$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} N_{4,0}+2M_{4,1/2}=D_4+P_4h_0 \\ N_{2,0}+2M_{2,1/2}=D_2+P_2h_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(58)$$

上式における D_4 は番号0のまくらぎの直上において左側レールに外から作用するモーメントであり、 D_2 は右側レールに作用するモーメントであり、垂直荷重がレール頭部中心を外れて作用したときに生ずる。 h_0 は横圧力 P_4 および P_2 が作用する高さである。式(56)、(57)、(58)の中に含まれる2式ずつの和および差から次の諸式が導かれる。

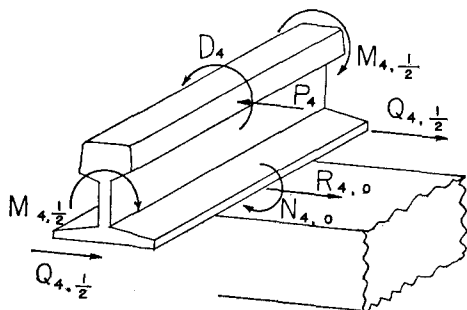


図-4 番号0のまくらぎ直上において左側レールに横圧力およびモーメントが作用した場合

$$\left. \begin{aligned} (\eta_1')_0=0, \quad (\eta_3')_0=0 \\ (\varphi_1')_0=0, \quad (\varphi_3')_0=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(59)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{1,0}+2Q_{1,1/2}=(P_4-P_2)/2 \\ R_{3,0}+2Q_{3,1/2}=(P_4+P_2)/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(60)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{1,0}+2M_{1,1/2}=(D_4+P_4h_0-D_2-P_2h_0)/2 \\ N_{3,0}+2M_{3,1/2}=(D_4+P_4h_0+D_2+P_2h_0)/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61)$$

以上の8個の式から8個の積分定数 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ が決定される。 $i=1, 3$ に対する $(\eta_i)_n, (\varphi_i)_n$ 等は式(41)等によって求められ、 $\eta_4, \eta_2, \varphi_4, \varphi_2$ 等は式(16)、(17)等によって求められる。

4. 横圧力がまくらぎ間の中央でレールに作用する場合

番号0と1のまくらぎ間の中央で横圧力およびモーメントがレールに作用するときには

$$\left. \begin{aligned} (\eta_4')_{1/2}=0, \quad (\eta_2')_{1/2}=0 \\ (\varphi_4')_{1/2}=0, \quad (\varphi_2')_{1/2}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

レールに外から作用する横圧力およびモーメントをさきと同様な符号で表わせばつり合いの条件より次式が導かれる。

$$2Q_{4,1/2}=P_4, \quad 2Q_{2,1/2}=P_2 \dots\dots\dots(63)$$

$$2M_{4,1/2}=D_4+P_4h_0, \quad 2M_{2,1/2}=D_2+P_2h_0 \dots\dots(64)$$

式(62)、(63)、(64)に含まれる2式ずつの和および差から次の諸式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} (\eta_1')_{1/2}=0, \quad (\eta_3')_{1/2}=0 \\ (\varphi_1')_{1/2}=0, \quad (\varphi_3')_{1/2}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(65)$$

$$Q_{1,1/2}=(P_4-P_2)/4, \quad Q_{3,1/2}=(P_4+P_2)/4 \dots\dots(66)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{1,1/2}=(D_4+P_4h_0-D_2-P_2h_0)/4 \\ M_{3,1/2}=(D_4+P_4h_0+D_2+P_2h_0)/4 \end{aligned} \right\} \dots\dots(67)$$

式(65)、(66)、(67)に含まれる8個の式から8個の積分定数が決定される。

以上に導いたごとく横圧力またはモーメントがまくらぎの直上またはまくらぎ間の中央においてレールに作用した場合には荷重の作用点を中心として前後対称となるため解法が簡単になる。しかるにまくらぎ間の任意の位置に横圧力が作用するときには前後対称とはならず、境界条件が複雑となり、16個の積分定数を決定する必要がある。また実際上の必要度も低いのでここではその解法の誘導を省略した。

5. 任意の位置においてレールに生ずる横移動、横曲げ応力その他の計算

これまでにはまくらぎの直上またはまくらぎ間の中央点においてレールに生ずる横移動、小返り角などの計算式を導いたが、番号 n と $n+1$ のまくらぎ間の任意の

点に対しては式 (14) より次の諸式が導かれる。ただし左側レールに対して $i=4$, 右側レールに対して $i=2$ とする。

$$\frac{d^3\eta_i}{dx^3} = \frac{1}{EI} Q_{i,n+1/2} \dots\dots\dots (68)$$

$$\frac{d^2\eta_i}{dx^2} = \frac{1}{EI} Q_{i,n+1/2}x + (\eta_i'')_n \dots\dots\dots (69)$$

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \frac{1}{2EI} Q_{i,n+1/2}x^2 + (\eta_i'')_n x + (\eta_i')_n \dots\dots\dots (70)$$

$$\eta_i = \frac{1}{6EI} Q_{i,n+1/2}x^3 + \frac{1}{2}(\eta_i'')_n x^2 + (\eta_i')_n x + (\eta_i)_n \dots\dots\dots (71)$$

レールの小返り角に対しては式 (22) より次の諸式が導かれる。

$$\varphi_i = \left(\frac{a}{t}\right)^2 (\varphi_i'')_n \left(\cosh \frac{tx}{a} - 1\right) + \frac{a}{t} (\varphi_i')_n \sinh \frac{tx}{a} + \frac{a}{tGJ} (M_{i,n+1/2} - fQ_{i,n+1/2}) \left(\sinh \frac{tx}{a} - \frac{tx}{a}\right) + (\varphi_i)_n \dots\dots\dots (72)$$

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{a}{t} (\varphi_i'')_n \sinh \frac{tx}{a} + (\varphi_i')_n \cosh \frac{tx}{a} + \frac{1}{GJ} (M_{i,n+1/2} - fQ_{i,n+1/2}) \left(\cosh \frac{tx}{a} - 1\right) \dots\dots\dots (73)$$

$$\frac{d^2\varphi_i}{dx^2} = (\varphi_i'')_n \cosh \frac{tx}{a} + \frac{t}{a} (\varphi_i')_n \sinh \frac{tx}{a} + \frac{t}{GJa} (M_{i,n+1/2} - fQ_{i,n+1/2}) \sinh \frac{tx}{a} \dots\dots\dots (74)$$

以上に述べたところによってレールの各位置における η , φ 等が計算されたときにはレールに生ずる曲げモーメント、レール各部の曲げ応力、横移動などは次の計算方法によって求めることができる。

左右のレールに作用する垂直軸のまわりの曲げモーメントをそれぞれ V_1 , V_2 とすれば

$$V_1 = -EI \frac{d^2\eta_1}{dx^2}, \quad V_2 = -EI \frac{d^2\eta_2}{dx^2} \dots\dots\dots (75)$$

レール頭部中心の高さを h_1 とし、幅を b_1 とし、レール底部中心の高さを h_3 とし、幅を b_3 とすれば、左側レール頭部外側に生ずる曲げ応力 σ_{41} , 底部外側に生ずる曲げ応力 σ_{43} , 右側レール頭部内側に生ずる曲げ応力 σ_{21} , 底部内側に生ずる曲げ応力 σ_{23} は次式によって求められる。

$$\sigma_{ij} = -\frac{Eb_j}{2} \left\{ \frac{d^2\eta_i}{dx^2} + (h_j - f) \frac{d^2\varphi_i}{dx^2} \right\} \dots\dots\dots (76)$$

ここに $i=4, 2, \quad j=1, 3$

同様にして左右レールの頭部または底部中心の横移動は次式によって求められる。

$$\xi_{ij} = \eta_i + (h_j - f)\varphi_i \dots\dots\dots (77)$$

ここに $i=4, 2, \quad j=1, 3$

まくらぎの移動量 z_n は次式によって計算される。

$$Z_n = 2R_{3,n}/k_2 \dots\dots\dots (78)$$

番号 n と $n+1$ のまくらぎの間でレールが受けているねじりモーメント $T_{i,n+1/2}$ は次式によって求められる。

$$T_{i,n+1/2} = M_{i,n+1/2} - fQ_{i,n+1/2} \dots\dots\dots (79)$$

ただし左側のレールに対しては $i=4$ と置き、右側レールに対しては $i=2$ と置く。このねじりモーメントによってレール腹部の中央表面に生ずるせん断応力は次式によって計算される。

$$\tau_w = T_{i,n+1/2}/W \dots\dots\dots (80)$$

上式における W はレールの形状および寸法によって定まる定数であり、ねじりに関する断面係数と呼び、次章においてその求め方を述べる。

6. レールの断面形状に関する諸係数の計算ならびに測定方法

これまでに導いた諸式に含まれる係数 I, H, K はそれぞれ式 (6), (8), (9) によって表わされているが、この場合にはレールが3部分に分けられている。しかしさらに精度を高くするためには図-5 に示すごとくレールを多数の帯状の部分に分ち、次式によって計算することが望ましい。このときには f はレールのせん断中心の高さを表わすことになる。

$$\left. \begin{aligned} I &= \sum_i b_i^3 \Delta h_i / 12, & H &= \sum_i b_i^3 h_i \Delta h_i / 12 \\ K &= \sum_i b_i^3 h_i^2 \Delta h_i / 12, & f &= H/I \end{aligned} \right\} \dots\dots (81)$$

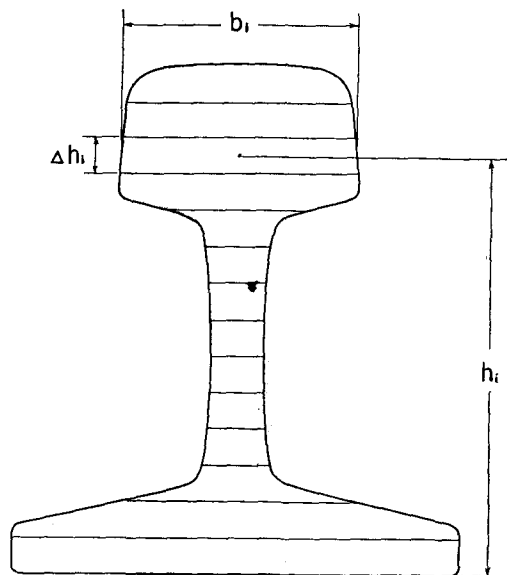


図-5 多数の水平線で細片に分割されたレール断面

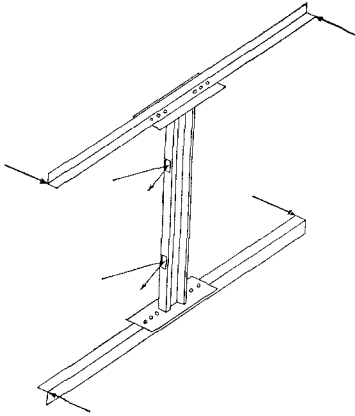


図-6 レールのねじり試験

レールのねじりに関する係数 J および W の値は解析的方法によって求めることは困難になるため直接にねじり試験を行なうかまたは薄膜における相似現象によって求める必要がある。

(1) 直接法

図-6 に示すごとく長さ 1~2m のレール片の1端を固定して他端に偶力をかけてねじる。ねじり角はレールに貼り付けた鏡で反射された物指の目盛を読むことによって正確に測ることができる。レールに加えた偶力の大きさを T とし、レールに貼り付けた2個の鏡の間の距離を l とし、この間のねじれ角を θ とするとき

$$J = \frac{TI}{G\theta} \dots\dots\dots (82)$$

最大のせん断力がどこに生ずるかは不明であるが、一般にレール腹部に生ずるせん断応力がかつても多く測定のため対称となる。よってレール腹部にワイヤストレーンゲージを貼り付けて測定した値を τ_w とすればねじりに対する断面係数 W は次式によって求めることができる。

$$W = T/\tau_w \dots\dots\dots (83)$$

(2) 薄膜の相似現象による方法

弾性理論によって軸のねじりを解く場合にあらわれる微分方程式と一樣な張力で張られ、かつ横方向から一樣な圧力を受けている薄膜の形状を求めるための微分方程式とは相似であり、またこれらの微分方程式が満足すべき境界条件も相似である。よって軸のねじり定数を求める方法として薄膜による相似法が使われる場合が多い^{(8), (9)}。この方法をレール断面に適用するために図-7 に示すような装置を作った。

平板に半径 r の円孔とレール断面に等しい孔とを穿ち、これらの孔に石鹼膜を張って同一の圧力でふくらませる。このときに石鹼膜もとの平面との間に含まれる体積をそれぞれ V_c および V_r とすれば、これらの体積

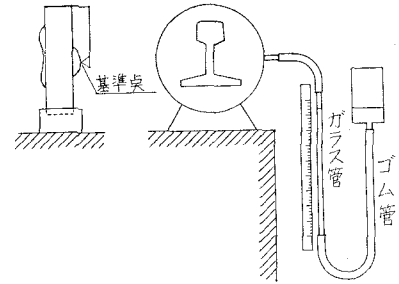


図-7 薄膜による相似現象を用いてレールのねじり定数を測定する装置

とそれぞれの断面のねじり定数との間に次式が成立する。

$$\frac{J_r}{V_r} = \frac{J_c}{V_c} \dots\dots\dots (84)$$

ここに

$$J_c = \pi r^4/2 \dots\dots\dots (85)$$

まず円孔だけをあけて石鹼膜を張り、膜の中心がある基準点に達するまでふくらませた場合の体積 V_c をガラス管の水位の変化によって知る。次に円孔とレール断面孔とを同時にあけた場合について円孔に張られた石鹼膜の中心がさきと同一の基準点に達するまでふくらませてそのときの体積 $V_c + V_r$ を測定する。これより V_r を知り、式 (84) によって J_r が求められる。

軸をねじった場合に断面内または断面の周辺上の任意の点に生ずるせん断応力 τ と薄膜上の相似点における傾斜角 i との間には相似の関係が成立することが理論的に証明されている。石鹼膜の傾斜角より断面係数を求める方法も考えられるが、測定精度が低いため解析的方法を採ることとした。レール腹部を双曲線の一部と見なせば次式によって断面係数が計算できる(補足5参照)。

$$W = J_r \left(\frac{1}{t_w} - \frac{1}{2R} \right) \dots\dots\dots (86)$$

ただしここに t_w は腹部の中央における厚さとし、 R は腹部両側面の曲率半径とする。

種々のレールについて(1)直接法および、(2)薄膜による相似現象を用いてねじり定数および断面係数を測定した結果を表-1 に示した。この表によれば直接法によって得たねじり定数は相似法によって得た数値に比べていくらか小さいが、この原因は直接法に用いたレールにいくらかの磨耗およびさびがあったためと考えられる。なお 50 kg N レールについても測定を行なったが、P S

表-1 レールのねじり定数およびねじりに対する断面係数

レール重量	ねじり定数		断面係数
	直接法 (cm ⁴)	相似法 (cm ⁴)	相似法 (cm ⁴)
50 kg PS	150	169	115
37 kg ASCE	80	91	66
30 kg ASCE	51	54	43

表-2 y_{ij}, λ_{ij} およびその他の諸係数

i	1			3		
	1	2	3	1	2	3
y_{ij}	0.6924	40.60	$-0.353+1.524 i$	0.6836	41.64	$-0.0617+0.6316 i$
λ_{ij}	3.058	83.19	$1.198+3.315 i$	3.038	85.27	$1.561+1.584 i$
λ_{ij}^{-1}	0.3270	0.01202	$0.0964-0.2668 i$	0.3292	0.01173	$0.3157-0.3203 i$
α_{ij}	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
β_{ij}	1.159	47.32	$0.02062+0.06589 i$	1.933	286.5	$0.01504+0.01670 i$
r_{ij}	1.125	5.587	$0.893+2.940 i$	1.113	5.597	$0.145+1.259 i$
δ_{ij}	0.1566	46.51	$-0.02266+0.00945 i$	0.2582	282.4	$-0.002300+0.002204 i$
ε_{ij}	-1.109	-2.862	$-1.346-1.255 i$	-1.103	-2.865	$-0.8073-0.7984 i$
ζ_{ij}	-1.389	-214.2	$0.0800-0.1053 i$	-2.300	-1300	$0.00333-0.02546 i$
ρ_{ij}	-0.07730	-0.5636	$-0.0023-0.2956 i$	-0.4576	-3.388	$0.1864-0.5560 i$
ω_{ij}	0.5633	0.5757	$0.02018-0.00502 i$	0.9482	3.400	$0.01236-0.00512 i$
μ_{ij}	-0.6414	-0.7580	$-0.9027-0.1462 i$	-0.6397	-0.7578	$-0.6970-0.2825 i$
ν_{ij}	-0.7239	-22.28	$-0.01330-0.06371 i$	-1.204	-134.5	$-0.00616-0.01583 i$
τ_{ij}	0.7465	2.827	$0.882+1.493 i$	0.7400	2.831	$0.2967+0.8049 i$
ψ_{ij}	0.02074	4.697	$-0.002228+0.001638 i$	0.03425	28.52	$-0.0002316+0.0003629 i$
χ_{ij}	0.5702	0.1526	$0.4380-0.3200 i$	0.5721	0.1520	$0.6208-0.2608 i$
κ_{ij}	0.6859	5.108	$0.02903+0.02680 i$	1.147	30.61	$0.01350+0.00712 i$

ルールとの間にほとんど差が認められなかった。

7. 計算例

50 kg レールを敷設した軌道の左側ルール頭部にまくらぎ間中央で 3 t の横圧力を加えた場合についてルールに生ずる曲げ応力、横移動その他の計算を行なう。まくらぎ間隔を $a=53.2$ cm とし、 $E=2100000$ kg/cm²、 $G=810000$ kg/cm² とする。式(81)によって計算した結果 $I=366$ cm⁴、 $H=1263$ cm³、 $K=13120$ cm⁶ が得られた。式(13)より $f=3.45$ cm、 $L=8762$ cm⁶ が求められる。表-1 より $J=169$ cm⁴、 $W=115$ cm³ が得られる。ばね定数 k_1, k_2, s に関しては試験軌道で得られた値を用い、 $k_1=50000$ kg/cm、 $k_2=20000$ kg/cm、 $s=3000000$ kg・cm とする。式(31)によって $k_3=8333$ kg/cm が得られる。式(23)、(24) および(38)によって $t=4.588$ 、 $u_1=3.2650$ 、 $u_3=0.5442$ 、 $v=0.5829$ 、 $w=0.02362$ 、 $b=0.0933$ 、 $c=4.4964$ が得られる。これらの値を式(39)に代入すれば y_i として 2 個の実数根と 2 個の共役複素根が得られる。 $\alpha_i=1$ と仮定すれば式(36)より β_i, r_i, δ_i が求められ、式(43) およびこれに続く諸式によって ε_i その他の係数が計算される。これらの値を表-2 に示したが、 $j=4$ に対する値は $j=3$ に対する値の共役複素数となるため表に記入することを省略した。

$P_4=3000$ kg、 $P_2=0$ 、 $D_4=D_2=0$ 、 $h_0=13.2$ cm とすれば式(65)、(66)、(67)より次の 2 組の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} \sum A_{1j}\mu_{1j}=0 \\ \sum A_{1j}\nu_{1j}=0 \\ fk_1\sum A_{1j}\rho_{1j}=3000/4 \\ s\sum A_{1j}\omega_{1j}=3000\times 13.2/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum A_{3j}\mu_{3j}=0 \\ \sum A_{3j}\nu_{3j}=0 \\ fk_3\sum A_{3j}\rho_{3j}=4000/4 \\ s\sum A_{3j}\omega_{3j}=3000\times 13.2/4 \end{cases}$$

これらの連立方程式を解いて A_{1j}, A_{3j} の値が得られる。

$$\begin{cases} A_{11}=0.005919 \\ A_{12}=-0.0001458 \\ A_{13}=-0.000749+0.007982 i \\ A_{14}=-0.000749-0.007982 i \\ A_{31}=0.003129 \\ A_{32}=-0.00002348 \\ A_{33}=0.00755+0.02214 i \\ A_{34}=0.00755-0.02214 i \end{cases}$$

これらの数値を式(47)、(48)、(52)、(54)に代入し、 $n=0$ と置くことによって $i=1, 3$ に対する $Q_{i,1/2}$ 、 $M_{i,1/2}$ 、 $(\eta_i'')_{1/2}$ 、 $(\varphi_i'')_{1/2}$ 、 $(\eta_i)_{1/2}$ 、 $(\varphi_i)_{1/2}$ が得られる。 $i=2, 4$ に対する $Q_{i,1/2}$ 、 $M_{i,1/2}$ およびその他の値は $i=3$ の値に $i=1$ の値を加えるかまたは引くことによって得られる。このようにして横圧力の作用点において左側ルールに生ずる小返り角およびこの対称の位置における右側ルール的小返り角を計算した結果は

$$(\varphi_4)_{1/2}=0.005602, (\varphi_2)_{1/2}=-0.000086$$

となる。また横圧力の作用点においてルール腹部に生ずるせん断応力は $Q_{4,1/2}$ 、 $M_{4,1/2}$ の値を式(79)、(80)に代入することによって求められ、その結果は

$$\tau_w=127 \text{ kg/cm}^2$$

ルール頭部および底部の幅をそれぞれ $b_1=6.5$ cm、 $b_3=12.7$ cm とし、それらのほぼ中央部の高さをそれぞれ $h_1=13.2$ cm、 $h_3=0.65$ cm とすれば $i=4$ および 2 に対する $(\eta_i'')_{1/2}$ 、 $(\varphi_i'')_{1/2}$ 、 $(\eta_i)_{1/2}$ 、 $(\varphi_i)_{1/2}$ の値を式(76) および (77) に代入して横圧力の作用点におけるルール

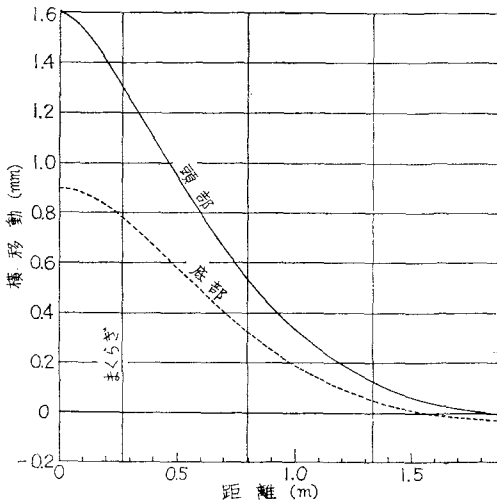


図-8 レール頭部および底部の横移動

の頭部、底部およびこの向い側のレールに生ずる横曲げ応力および横移動が求められる。

$$\sigma_{41}=994.2 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{21}=63.2 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{43}=489.7 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{23}=127.1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{41}=0.1599 \text{ cm}, \epsilon_{21}=0.0506 \text{ cm}$$

$$\epsilon_{43}=0.0896 \text{ cm}, \epsilon_{23}=0.0517 \text{ cm}$$

なお式(71)および(72)を用いて横圧力の作用点から離れた諸点においてレール頭部および底部に生ずる横移動計算をした結果を図-8に示した。頭部と底部の横移動の差がレールの小返りによる影響となる。この図によればレールの横移動に関してはまくらぎの付近で急激な変化はなく、横圧力の作用点を離れるにしたがってなめらかに減少している。なお横圧力の作用点から離れた諸点においてレールに生ずる曲げ応力を計算した結果については次章に述べる。

8. 計算値と実験値との比較

50 kg P Sレール、F型タイププレート、木まくらぎ、砕石道床を用い、まくらぎ間隔を532 mmとして延長6 mの試験軌道を敷設した。この上に種々の大きさの垂直荷重をかけた後、まくらぎ間の中央においてレール頭部に横圧力を加えた。垂直荷重を6 tとし、横圧力の大きさを1, 2, 3 tとしたときに荷重の作用点におけるレール頭部、底部の横移動およびまくらぎの横移動を測定した結果を図-9に示した。これらの横移動は横圧力に比例するとはいい難いが、ばね定数 k_1, k_2, s を表-3に示すごとく仮定して計算を行なえばこの図に鎖線および破線で示したようにそれぞれ横圧力3 tまたは2 tにおいて測定値にほぼ一致する結果が得られる。この中でばね定数(A)を用いた計算過程が前章に示されている。

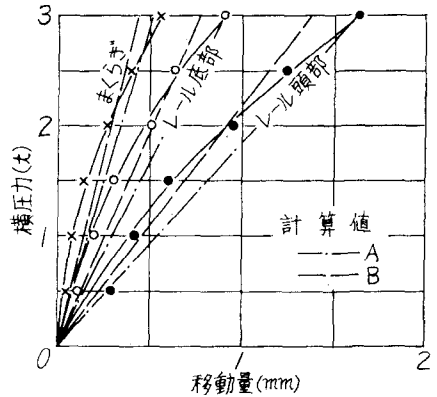


図-9 横圧力の作用点においてレールおよびまくらぎに生ずる横移動

表-3 軌道各部のばね定数

	k_1 (kg/cm)	k_2 (kg/cm)	s (kg·cm)
(A)	50 000	20 000	3.0×10^6
(B)	60 000	25 000	4.0×10^6

横圧力の作用点およびこれから離れた種々の点においてワイヤストレインゲージを用いてレール頭部および底部に生ずる横曲げ応力を測定した結果を図-10, 11に示した。これらの図には表-3に示したばね定数を用いて計算した結果が記入されている。ここに示すごとく横圧力の作用点においてレール頭部に生ずる曲げ応力は計算値の70%程度となっており、軌道のばね定数を少し変えた程度では計算値を測定値に一致させることは困難である。このように大きな差を生じた原因としては計算では横圧力ならびに横圧力によってレールに加わるモーメ

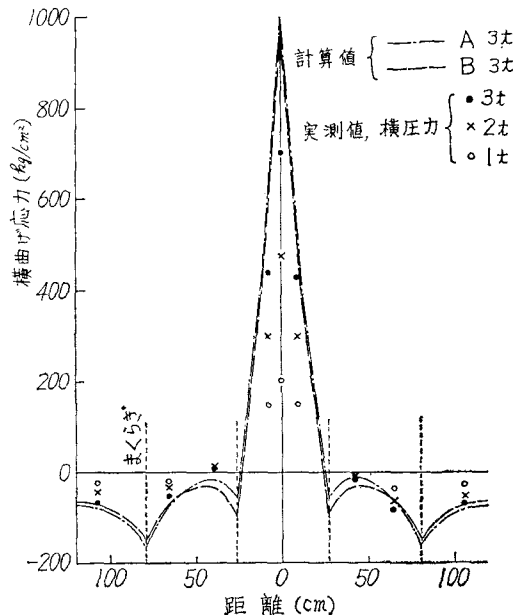


図-10 レール頭部に生ずる横曲げ応力

ントが集中してレールに作用すると仮定したが、実際の軌道においてはある程度分布されるためと考えられる。また計算においてはまくらぎ直上においてレール頭部に生ずる横曲げ応力が急激に変化するが、実験においてはこの点の測定値がないためこれを確かめることはできなかった。しかし実際には計算におけるほど激しい変化は

ないと想像される。すなわち、まくらぎからレールが受ける抵抗モーメントもある程度分布して作用するとしなくてはならないと考えられる。

図-11にはレール底部に生ずる横曲げ応力の測定値と計算値を示したが比較的によく一致している。これは曲げ応力の計算値に急激な変化がないためレールに作用する横圧力を集中荷重と仮定しても分布荷重と仮定してもその差が少ないためと考えられる。

9. 結 論

レールが横圧力を受けた場合にはレールに横移動およびねじれを生ずるが、これらを同時に考慮してレールの横移動、小返りおよび曲げ応力の計算式を導いた。計算式は相当煩雑であるが、電子計算機が広く利用できるようになった今日においては計算のプログラムさえできればあとは問題がない。

レールに作用する横圧力およびまくらぎより受ける抵抗力および抵抗モーメントが集中力またはモーメントとしてレールに作用すると仮定することはこれらの力またはモーメントの作用点においてレール頭部に生ずる曲げ応力の計算値を過大にするためレールの高さ程度の幅に分布する圧力またはモーメントとみなす必要がある。まくらぎより受ける抵抗力およびモーメントについても同様に仮定した方がよいと考えられる。

レール頭部に横圧力を加えたときにレールがまくらぎから受ける抵抗力および抵抗モーメントを横移動または小返り角に比例し、この比例の定数を垂直荷重の大きさには無関係として計算することは実際とは異なるが、レールに生ずる曲げ応力の値に対して大きな影響を及ぼすことはないようである。横圧力の作用点から2番目以上のまくらぎでレールの横移動および小返りを計算する場

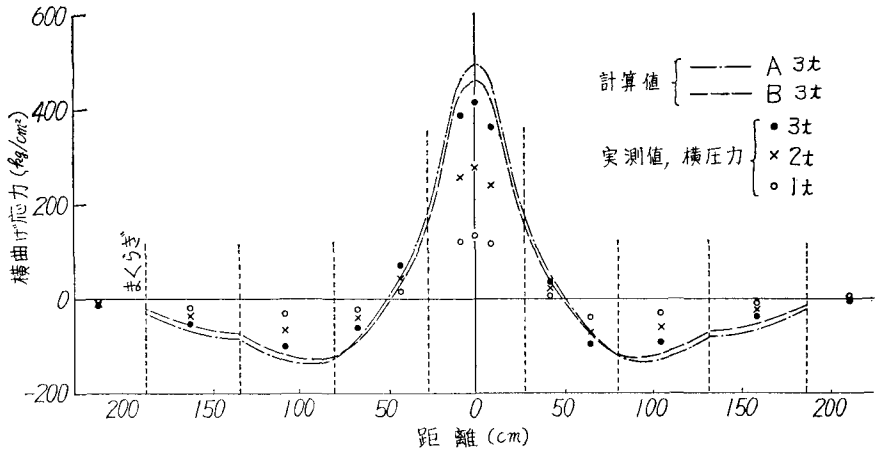


図-11 レール底部に生ずる横曲げ応力

合には実際より小さい値を与えるおそれがあるが、このような計算を行なう必要は実際上少ないと考えられる。また機関車の動輪のごとく短い軸距で多数の垂直荷重がレール作用する場合には比例の定数を一定とした方が実際に近くなる。

(補足 1)

番号 n と番号 $n+1$ のまくらぎ間について式 (14) を積分すれば次式が導かれる。

$$6\{(\eta_i)_n - (\eta_i)_{n+1}\} + 6a(\eta_i')_{n+1} - a^2\{(\eta_i'')_n + 2(\eta_i'')_{n+1}\} = 0 \dots\dots\dots (87)$$

$$6\{(\eta_i)_n - (\eta_i)_{n+1}\} + 6a(\eta_i')_n + a^2\{2(\eta_i'')_n + (\eta_i'')_{n+1}\} = 0 \dots\dots\dots (88)$$

$\eta_i, d\eta_i/dx$ および $d^2\eta_i/dx^2$ はまくらぎの前後において連続した値を採ると仮定し、式 (87) において n のかわりに $n-1$ と置くことによって次式が得られる。

$$6\{(\eta_i)_{n-1} - (\eta_i)_n\} + 6a(\eta_i')_n - a^2\{(\eta_i'')_{n-1} + 2(\eta_i'')_n\} = 0 \dots\dots\dots (89)$$

式 (89) より式 (88) を差引けば式 (18) が導かれる。

(補足 2)

式 (14) を番号 n と $n+1$ のまくらぎの間で積分すれば、次式が導かれる。

$$EI\{(\eta_i'')_n - (\eta_i'')_{n+1}\} + aQ_{i,n+1/2} = 0 \dots\dots (90)$$

式 (90) において n のかわりに $n-1$ と置けば

$$EI\{(\eta_i'')_{n-1} - (\eta_i'')_n\} + aQ_{i,n-1/2} = 0 \dots\dots (91)$$

式 (91) より式 (90) を差引けば式 (21) が得られる。

(補足 3)

番号 n と番号 $n+1$ のまくらぎの間で微分方程式 (22) を解き、両端の境界条件によって積分定数を定め両端の φ_i の値の差を計算すれば次の 2 式が得られる。

$$\begin{aligned} (\varphi_i)_n - (\varphi_i)_{n+1} + a(\varphi_i')_n + \frac{EL}{GJ} \{(b+c-1)(\varphi_i'')_n \\ + (1-b)(\varphi_i'')_{n+1}\} = 0 \dots\dots\dots (92) \end{aligned}$$

$$(\varphi_i)_{n-1} - (\varphi_i)_{n+1} + a(\varphi_i')_{n+1} - \frac{EL}{GJ} \{(1-b)(\varphi_i'')_n + (b+c-1)(\varphi_i'')_{n+1}\} = 0 \dots\dots\dots(93)$$

式(93)において n のかわりに $n-1$ と置けば

$$(\varphi_i)_{n-1} - (\varphi_i)_{n+1} + a(\varphi_i')_n - \frac{EL}{GJ} \{(1-b)(\varphi_i'')_{n-1} + (b+c-1)(\varphi_i'')_n\} = 0 \dots\dots\dots(94)$$

式(94)より式(92)を差引けば式(25)が得られる。

(補足 4)

式(15)を番号 n と番号 $n+1$ のまくらぎの間で積分すれば次式が得られる。

$$GJ\{(\varphi_i)_{n-1} - (\varphi_i)_{n+1}\} - EH\{(\eta_i'')_{n-1} - (\eta_i'')_{n+1}\} - EL\{(\varphi_i'')_{n-1} - (\varphi_i'')_{n+1}\} - aM_{i,n+1/2} = 0 \dots\dots\dots(95)$$

上式における n のかわりに $n-1$ と置けば

$$GJ\{(\varphi_i)_{n-1} - (\varphi_i)_n\} - EH\{(\eta_i'')_{n-1} - (\eta_i'')_n\} - EL\{(\varphi_i'')_{n-1} - (\varphi_i'')_n\} - aM_{i,n-1/2} = 0 \dots\dots\dots(96)$$

式(96)より式(95)を差引けば式(27)が得られる。

(補足 5)

レール断面において腹部の中心に原点を採り、水平方向を x 軸とし、垂直方向を y 軸とすれば腹部の形状は次式によって表わすことができる。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \dots\dots\dots(97)$$

$$\text{ただし } a = t_w/2, \quad b^2 = t_w R/2 \dots\dots\dots(98)$$

次の微分方程式を満足し¹⁰⁾

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2 \frac{G \theta}{l} \dots\dots\dots(99)$$

かつ腹部の表面で $\phi = 0$ となるような応力関数 ϕ を求めれば次式のごとくなる。

$$\phi = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \frac{G \theta}{l} \dots\dots\dots(100)$$

上記の ϕ の値を用いれば垂直方向のせん断応力は次式

によって求められる。

$$\tau = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2 b^2 x}{b^2 - a^2} \cdot \frac{G \theta}{l} \dots\dots\dots(101)$$

$x = a$ と置けば腹部中央の表面に生ずるせん断応力 τ_w が得られる。

$$\tau_w = \frac{2 a b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{G \theta}{l} \dots\dots\dots(102)$$

式(82),(83)によれば

$$\tau_w = \frac{J}{W} \cdot \frac{G \theta}{l} \dots\dots\dots(103)$$

であることに注意すれば

$$W = J \frac{b^2 - a^2}{2 a b^2} \dots\dots\dots(104)$$

上式の a, b に式(98)を代入すれば式(86)が得られる。

参 考 文 献

- 1) 千秋邦夫：軌条に作用する横圧力，土木学会誌，第27巻第8号，昭和16年8月
- 2) 八十島義之助：レールのねじれの理論について，土木学会誌，第35巻第11号，昭和25年11月
- 3) 佐藤 裕：軌道の横強度理論（I），土木学会論文集，第5号，昭和25年11月
- 4) 佐藤 裕：軌道の横強度理論（II），土木学会論文集，第6号，昭和26年8月
- 5) 佐藤 裕：横圧に対する軌道強度の研究，鉄道技術研究報告，第110号，昭和35年2月
- 6) 福本嘯士・西野文雄訳：鋼構造部材と骨組，2.5ねじりによる応力と変形
- 7) 土木工学ハンドブック 第2編 構造力学，第18章 板第1節 解説
- 8) A.A. Griffith, G.I. Taylor: The Use of Soap Films in Solving Torsion Problems, Engineering, Dec. 21, 1917, Dec. 28, 1917.
- 9) S. Timoshenko, J.N. Goodier: Theory of Elasticity, Third Edition, 107 Membrane Analogy
- 10) 同上, 104 Torsion of Straight Bars

(1972.2.14・受付)