

混合砂れき河床の変動と平衡河床に関する研究

STUDIES ON VARIATION AND EQUILIBRIUM STATE
OF A RIVER BED COMPOSED OF NONUNIFORM MATERIAL

平野 宗夫*

By Muneo Hirano

1. ま え が き

将来の河床変動の予知は、河川工学上重要な問題であり、従来から多くの研究がなされてきたが、そのほとんどは、河床砂れきの粒度分布を既知量と考え、しかも均一粒径で近似して取りあつかわれたものである。しかし貯水池下流の河床がふるい分け作用により粗粒化しながら低下する場合がその好例であるように、実際の河川においては、河床の粒度分布が場所的にも時間的にも変動する場合が少なくない。

このような河床の粒度分布の変動に関して、近年いくつかの注目すべき研究がなされている。たとえば、矢野・土屋および道上¹⁾(1969)は縦断方向の河床の粒度分布をあらわす式を導いて、実際河川のデータとよく適合することを示し、Gessler²⁾(1970)は armor coat の粒度分布の計算法を提案している。しかし、前者は河床勾配が既知で変化しないものとし、後者は河床変動量が小さく、水理量の変化はないとしているなど、その適用範囲は限定されている。河村³⁾(1969)および、青田・道上⁴⁾(1971)は、ダム下流の河床低下の計算を、河床低下計算と独立に推定した最終状態の河床砂れきの粒度を用いて行なっている。後者は、疑似等流を仮定することにより、河床変動の解析解を与えている点に特徴がある。また、筆者は、前報⁵⁾において、ふるい分け作用は粒径別流砂量の場所的不均衡に基づくという考えのもとに、粒度分布の連続の式を導き、疑似等流の仮定を導入してダム下流の armoring に適用した。

このように、限定された条件下におけるふるい分け作用については、その予知計算が可能になりつつあるが、混合砂れき河床の変動に関する統一な計算法はまだ確立されていない。

本論文においては、前報で導かれた粒度分布に関する基礎式を不等流の式と組合せることにより、混合砂れき河床変動の一般的な計算法が提示されている。この計算法は、まず、水路幅の変化する armoring に適用され、実験結果と比較してその適合性が確かめられている。次に、これらの計算法が静的平衡河床に適用され、実験結果とよく一致することを示すとともに、静的平衡河床の粒度特性を規定する parameter について種々の検討がなされている。最後に、動的平衡河床における計算式が導かれ、実験値との比較および現象の特性に関する考察がなされている。

2. 実験の概要

実験は Run 5~Run 10 の6回行なわれた。Run 5~Run 7 の実験に用いた水路は、長さ 15 m、幅 60 cm のコンクリート製水路で、水路の中流部に長さ 3 m の狭さく部が設置されている。狭さく部の幅は、Run 5 では 40 cm、Run 6 および Run 7 では 20 cm で、上下流部にそれぞれ 1.5 m のすりつけ部がある。Run 8~Run 10 の実験は、幅 25 cm、長さ 5 m のアクリライト製水路中に、長さ約 80 cm の移動床を設置して行なった。

Run 6 および Run 7 は、動的平衡河床の粒度特性を調べるために行なわれたもので、図-1に示すように下流端に流出してきた砂を循環用パイプで水と一緒に上流へ流送し、そこで水と砂を分離して砂だけを水路に補給

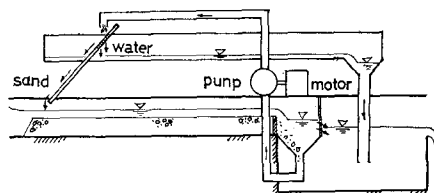


図-1 動的平衡河床実験装置

* 正会員 九州大学講師 工学部水工土木学教室

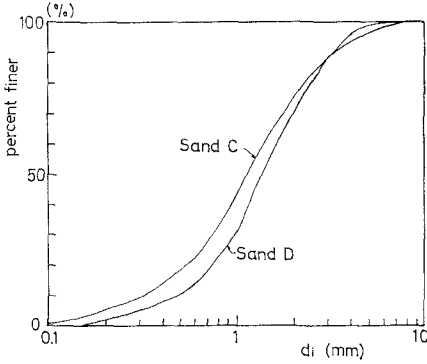


図-2 実験用砂の粒度分布

表-1 実験条件一覧

実験番号	流量 Q(l/sec)	河床 材料	縮流幅 比 θ_s	給砂の 有 無	水路幅 B_0 (cm)	移動床 長L(m)	通水時 間(分)
Run 5	10.0	C砂	2/3	無	60	14	3000
Run 6	8.8	D砂	1/3	有	60	13	510
Run 7	9.0	〃	1/3	有	60	13	660
Run 8	6.0	〃	—	無	25	0.8	1100
Run 9	5.7	〃	—	〃	25	0.8	280
Run 10	5.85	〃	—	〃	25	0.8	320

し、水は別の水路を流下して下流端にもどるようになっている。

Run 5 および Run 8~Run 10 は、河床低下の実験であり、上流端における給砂は行なわれていない。

実験に用いた砂は、C砂（平均粒径 $d_m=1.69$ mm、標準偏差 $\sigma_0=2.66$ ）および D砂（平均粒径 $d_m=1.63$ mm、標準偏差 $\sigma_0=2.0$ ）の2種類で、その粒度分布は図-2 のようである。

実験の条件は表-1 に示されている。

3. 河床および粒度分布変動の計算式

(1) 基礎式

通常の河床変動計算においては、不等流の式、流砂量の式および流砂の連続の式が用いられる。ふるい分け作用を考慮する場合には、これらの式のほかに、粒度分布の変動を規定する式が必要であり、また、流砂量の式として粒径別流砂量を与える式を用いなければならない。これらの式を列挙すると次のようである。

a) 不等流の式

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{u_*^2}{gh} = 0 \dots\dots(1)$$

ここに、 h : 水深、 x : 流れ方向にはかった距離、 z : 河床高、 v : 平均流速、 g : 重力の加速度、 u_* : 摩擦速度である。

b) 総流砂および粒径別流砂に関する連続式

前報で求められた式は次のようである。

河床上昇の場合 :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{(1-\lambda)B} \frac{\partial(q_B \cdot B)}{\partial x} + \frac{a}{1-\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\lambda)B} \left\{ \frac{\partial(i_B q_B \cdot B)}{\partial x} - i_b \frac{\partial(q_B \cdot B)}{\partial x} \right\} \dots\dots(3)$$

河床低下の場合

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{(1-\lambda_0)B} \frac{\partial(q_B \cdot B)}{\partial x} + \frac{1}{1-\lambda_0} \left\{ a \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial a}{\partial t} \right\} \dots\dots(4)$$

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\lambda)B} \left\{ \frac{\partial(i_B q_B \cdot B)}{\partial x} - i_{b0} \frac{\partial(q_B \cdot B)}{\partial x} \right\} + (i_b - i_{b0}) \left(\frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) \dots\dots(5)$$

ここに、 t : 時間、 B : 河床幅、 λ および λ_0 : それぞれ交換層およびその直下の河床砂れきの空隙の割合、 i_b 、 i_B および i_{b0} : ある粒径範囲の砂れきがそれぞれ交換層中、流砂中および交換層直下の河床砂れき中に占める割合、 q_B : 単位幅当たり流砂量、 a : 交換層の厚さである。

c) 粒径別流砂量の式

前報と同様、佐藤・吉川・芦田の式に粒径別限界掃流力を導入した次式を用いる。

$$\frac{i_B q_B}{u_* d_i} = i_b K \frac{u_*^2}{(\sigma/\rho - 1) g d_i} f \left(\frac{u_* c_i^2}{u_*^2} \right) \dots\dots(6)$$

ここに、 d_i はある粒径範囲の砂れきの平均粒径、 $u_* c_i$ は粒径 d_i の砂れきの限界摩擦速度、 σ および ρ はそれぞれ砂れきおよび水の密度である。また、 K は佐藤・吉川・芦田の式においては、粗度係数 n の関数として与えられているが、前報のデータに対しては $K=4$ であった。

d) 粒径別限界掃流力

式(6)に導入する $u_* c_i$ は、前報と同様、Egiazaroff⁶⁾の式を若干変形した次式により計算される。

$$\xi_i \equiv \frac{u_* c_i^2}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g d_i} \left/ \frac{u_* c_m^2}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g d_m} \right. = \left(\frac{\log 19}{\log 19 \frac{d_i}{d_m}} \right)^2 \dots\dots(7)$$

ここに、 $u_* c_m$ は粒径 d_m の砂れきの限界摩擦速度、 d_m は平均粒径である。

上式により、 $u_* c_i / u_* c_m$ を計算して図示すると図-3 のようである。それによると、 $u_* c_i / u_* c_m$ は d_i / d_m により変化するが、均一砂れき河床の限界掃流力が粒径にほ

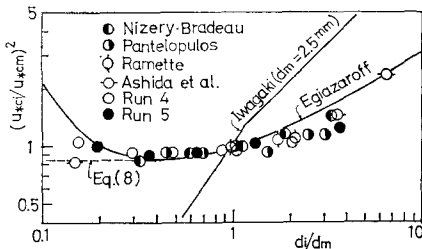


図-3 粒径別限界掃流力

ば比例して変化するのに比し、その変化の割合はかなり小さく、 u_{*ci} が u_{*cm} に近いことがわかる。また、実験データ^{5), 6), 7)} は、実験値の範囲内では計算値とかなりよくあっているが、 d_i/d_m による変化は式 (7) による計算値よりさらに小さいようである。これらのことより、混合砂れき河床における平均的な限界掃流力については、従来行なわれているように、均一砂れき河床における限界掃流力の式（たとえば岩垣公式）に平均粒径を適用することにより求めることができるが、粒径別の限界掃流力については、均一砂れきと同じ取りあつかいはできないことが明らかである。

次に、図-3 によると、 u_{*ci}/u_{*cm} の計算値は、 $d_i/d_m > 0.4$ の範囲では d_i/d_m の増加とともに漸増し、粒径が大きくなるにつれて砂れきが動きにくくなることを示しているが、 $d_i/d_m < 0.4$ の範囲では逆に d_i/d_m が小さくなるにつれて u_{*ci}/u_{*cm} が急増している。これは、式 (7) の誘導に際して、流速分布として対数分布則が用いられているためであり、この範囲に対して式 (7) が適用できるかどうか疑問であるが、この範囲の実験データに乏しいので詳細な検討は今後にゆずるほかはない。しかし、混合砂れき河床においては、平均より小さい砂れきは、それより大きい砂れきに遮蔽されるため、均一砂の場合に比し動きにくくなるが、大きい粒径の砂れきが移動するとそれに遮蔽されていた小さい砂粒も一緒に動くから、非常に小さい砂粒の限界掃流力は、それを遮蔽している大きい砂れきの限界掃流力に規定されると考えられる。さらに、そのような小さな砂粒は、その割合も少なく、かつ、主として大きい砂れきの空隙をうめているだけであるから、河床変動にはほとんど寄与しないとされる。そこで、簡単に、 $d_i/d_m < 0.4$ の砂粒に対しては、 $d_i/d_m = 0.4$ の砂粒に対する u_{*ci} を用いることにする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \left(\frac{\log 19}{\log 7.6} \right)^2 \times 0.4 \frac{d_m}{d_i}, \quad (d_i/d_m \leq 0.4) \\ \xi_i &= \left(\frac{\log 19}{\log 19 \frac{d_i}{d_m}} \right)^2, \quad (d_i/d_m \geq 0.4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

とする。なお、後述の計算法により、粒度分布の計算を

行なって実験値と比較してみると、式 (8) を用いた場合には計算値と実験値はよく一致するが、式 (7) を用いた場合には、 $d_i/d_m < 0.4$ の領域で、両者の差がかなり大きくなることから、式 (8) はほぼ妥当なものと考えられる。

(2) 計算式とその特性

上記の諸式を、次の関係を用いて無次元化する。

$$\xi = x/h_0, \quad \zeta = z/h_0, \quad \eta = h/h_0, \quad \omega_B = q_B/q_{B0}, \quad \tau = q_{B0} \cdot t / (1-\lambda)h_0^2, \quad b_* = B/B_0, \quad \alpha = a/h_0, \quad \varphi_* = \varphi/q_0$$

まず、不等流の式 (1) は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + F_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2 b_*^2 \eta^2} \right) + \frac{I_0}{\varphi_*^2 b_*^2 \eta^3} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $F_0 = v_0 / \sqrt{gh_0}$ および I_0 はそれぞれ基準点におけるフルード数および勾配、 $\varphi = v/u_*$ は流速係数、添字 0 は基準点における量を表わすものとする。

次に、 $q_{B0} = Ku_*^3 / (\sigma/\rho - 1)g$ とすれば、流砂量の式 (6) は、

$$\omega_B = \frac{1}{(\varphi_* b_* \eta)^3} \int_0^1 f \left(\frac{u_{*ci}^2}{u_*^2} \right) di_b \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{u_{*ci}^2}{u_*^2} = \xi_i \frac{\tau_{*cm}}{\tau_{*0}} \frac{d_i}{d_{m0}} (\varphi_* b_* \eta)^2 \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\tau_{*cm} = u_{*cm}^2 / (\sigma/\rho - 1)gd_m$ 、 $\tau_{*0} = u_{*0}^2 / (\sigma/\rho - 1)gd_{m0}$ である。

さらに、 λ および a の時間的変化を無視すると、式 (2)~(5) より

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = -\frac{1}{b_*} \frac{\partial (\omega_B \cdot b_*)}{\partial \xi} \dots\dots\dots (12)$$

$$\alpha \frac{\partial i_b}{\partial \tau} = (i_B - i_b) \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \omega_B \frac{\partial i_B}{\partial \xi} \dots\dots\dots (13)$$

$$\alpha \frac{\partial i_b}{\partial \tau} = (i_B - i_{b0}) \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \omega_B \frac{\partial i_B}{\partial \xi} \dots\dots\dots (14)$$

これらの式より、混合砂れき河床の変動を規定する parameter は、初期条件・境界条件のほか、 F_0 、 I_0 、 φ_* 、 b_* 、 τ_{*0} および α であることがわかる。

次に、式 (13) および (14) において、 $\partial \zeta / \partial \tau$ が大きい場合には、右辺の第 1 項が支配的になるが、混合砂れき河床においては、相対的に大きい粒径の砂れきは小さい粒径の砂れきより動きにくいから、平均より大きい粒径の砂れきでは $i_B < i_b$ および $i_B < i_{b0}$ 、平均より小さい砂れきでは $i_B > i_b$ および $i_B > i_{b0}$ となる。したがって式 (13) および式 (14) の右辺第 1 項は、河床が上昇 ($\partial \zeta / \partial \tau > 0$) する場合、平均より大きい砂れきに対して負の値、平均より小さい砂れきに対して正の値をとり、河床低下 ($\partial \zeta / \partial \tau < 0$) の場合はその逆となるので、河床砂れきの粒度は、堆積の場合細かく、洗掘の場合粗くなる傾向があることがわかる。また、粒度分布の範囲が広いほど i_B と i_b や i_{b0} との差が大きくなり、ふるい分

けが起りやすくなることも明らかである。

(3) 計算値と実験値の比較

水路の中流部に縮流部のある Run 5 の実験結果と、

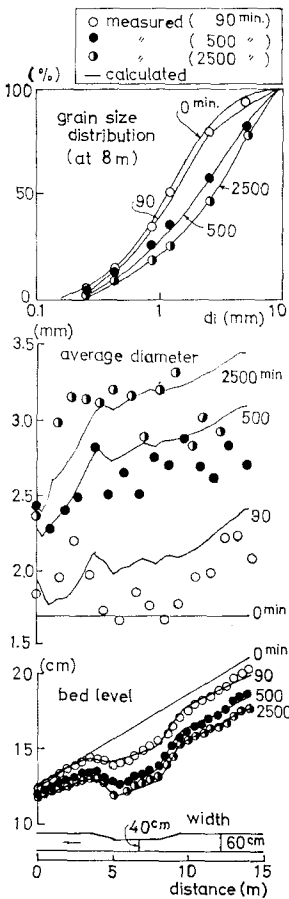


図4 計算値と実験値の比較 (Run 5)

式(8)~式(14)を用いた計算結果とを比較すると、図4のようであり、両者はかなりよく一致している。図4において、粒度分布図は横軸が対数目盛になっているため、実験値と計算値の適合性が平均粒径のそれよりすぐれているようにみえるが、両者の適合度は、もちろん同じである。

なお、計算にあたっては $h_0=3.8$ cm, $I_0=0.0060$, $Q=9.96$ l/sec, $a=1$ cm, $K=4$ および $\varphi_* = 1$ とし、 τ_{*cm} は岩垣公式により計算されている。また、境界条件として、

- 上流端：流砂量=0
 - および河床砂の粒度分布不変
 - 下流端：水位一定
- という条件が用いられている。

4. 静的平衡河床における armoring

河床が洗掘されながら静的平衡状態に近づくとともに河床砂れきが粗粒化する現象は、ダム下流や、河川の狭き部などにおいてよく見受けられるものであり、従来の研究においても、主として、静的平衡河道における問題がとりあつかわれている。

さて、大ダムの下流のように、対象とする区間が長かつ、河幅が複雑に変化する河道においては、armoring の状態は流れ方向にも変化すると思われるので、このような場合に対しては、前述の計算法を適用しなければならない。しかし、対象区間が短い場合には、粒度分布の場所的な変化は、時間的変動に比し小さく、無視できるので、計算を簡略化することができる。ここでは後

者の場合について、簡略化された計算を行ない、静的平衡河床の armoring を規定する parameter について検討することにする。

(1) 計算式の簡略化

対象とする区間が短く、かつ、区間内では幅が一定であり、諸量の流れ方向の変動がそれらの時間的変動に比し無視できる場合を考える。

まず、河床低下に対する式(12)および式(14)を、上流端における砂れきの流入がなく、 $\partial\zeta/\partial x$ および $\partial i_b/\partial x$ が x 方向に一定であるという条件のもとに、長さ L の対象区間について積分すると、

$$\frac{d\zeta}{d\tau'} = -\omega_B \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{di_b}{d\tau'} = (i_{b0} - i_B) \frac{\omega_B}{\alpha} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$$\tau' = \frac{q_{B0} \cdot t}{(1-\lambda)h_0L} \dots\dots\dots (17)$$

次に、これらの式を、次の二つの場合に適用してみよう。

a) parallel degradation の場合

上流からの砂れきの補給がない場合には、河床は低下するとともに河床表面に armor coat を生ずるが、掃流力が限界掃流力に近い場合には、河床の低下量はごくわずかで、しかもほぼ平行に起こるため、水理量はほとんど変化せず、armoring だけが進行する。このような現象を Gessler は 'parallel degradation' とよんでいる。この場合には、水深や流速などの水理量を一定とみなすことができるので、計算は非常に簡単になる。

さて、基準量として、時刻 $t=0$ における値を用いれば、 $\varphi_* b_* \eta = \text{const.} = 1$ としよければ、式(16)に式(10)を代入して、

$$\frac{di_b}{d\tau''} = (i_{b0} - i_B) \int_0^1 f_i di_b \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$f_i = f\left(\xi_i \frac{\tau_{*cm}}{\tau_{*0}} \frac{d_i}{d_m}\right) \dots\dots\dots (19)$$

$$\tau'' = \frac{q_{B0} \cdot t}{(1-\lambda)\alpha L} \dots\dots\dots (20)$$

τ_{*cm} は一般に d_m の関数であるから、parallel degradation における粒度変動を規定する parameter は、 τ_{*0} および初期河床の粒度分布である。また、交換層の厚さ a は、無次元時間 τ'' のみに含まれているので、ある粒度になるのに要する時間は a に比例することになるが、最終状態の粒度分布に対しては、ほとんど影響はない。

b) 対象区間が短い場合

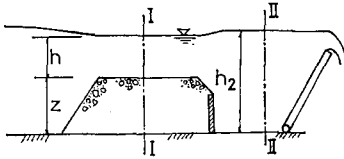


図-5 概略説明図

水深などの水量が、時間的に変動する場合には、式(15)および式(16)のほかに、水深の変化を規定する式が必要であり、不等流の式や運動量の式が用いられる。たとえば、損失水頭の時間変動が無視できる場合には、不等流の式を τ' で偏微分して、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau' \partial \xi} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau' \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \tau' \partial \xi} \left(\frac{1}{2b_*^2 \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \tau' \partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 $\eta_1 = h_1/h_0$ 、 h_1 は損失水頭である。ここで、図-5のように近接した2断面を考え、下流側断面の水量および2断面間の η_1 が時間的に変化しないものとして上流側断面において次式が成立する。

$$\frac{d\eta}{d\tau'} = -\frac{d\zeta}{d\tau'} \left/ \left(1 - \frac{F_0^2}{\eta^3} \right) \right. \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、基準水深 h_0 は上流側断面における初期水深とし、流れは常流とする。流れが射流の場合には上・下流断面を逆にする必要がある。

また、断面変化による損失の時間的な変化が無視できない場合には、不等流の式のかわりに運動量の式を用いればよい。たとえば、実験 Run 8~Run 10 に用いられた図-5のような場合に対しては、図-5の断面 I~II間に運動量の定理を適用して、

$$2F_0^2 \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_2} \right) = \eta_2^2 - (\eta + \zeta)^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、添字 2 は断面 II における量、添字のないものは断面 I における量を示し、基準量は断面 I における初期値とする。上式を τ' で微分し、断面 II における量の時間変動はないものとするれば、次式がえられる。

$$\frac{d\eta}{d\tau'} \left\{ 1 - \frac{F_0^2}{\eta^2(\eta + \zeta)} \right\} = -\frac{d\zeta}{d\tau'} \quad \dots\dots\dots (24)$$

このように、 η と ζ の関係式が与えられると、式(15)および式(16)に、式(10)を代入した次式

$$\frac{d\zeta}{d\tau'} = \frac{1}{\eta_*^3} \int_0^1 f_i d i_b \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{d i_b}{d\tau'} = \frac{1}{\alpha \eta_*^3} (i_{b0} - i_b) \int_0^1 f_i d i_b \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに、

$$f_i = f \left(\xi_i \frac{\tau_{*cm}}{\tau_{*0}} \frac{d_i}{d_{m0}} \eta_*^2 \right),$$

$$\eta_* = \varphi_* \eta \quad \dots\dots\dots (27)$$

により、河床変動と粒度分布の変動が求められる。

上記諸式より、現象を規定する parameter は、 F_0 、 α 、 τ_{*0} 、 φ_* および初期河床の粒度分布であることがわかる。

(2) 計算値と実測値の比較

a) parallel degradation の場合

式(18)~(20)および(8)を用いて armor coat の粒度分布を計算し、芦田・道上¹⁾の実験値と比較すると図-6のようになり、両者はかなりよく一致する。なお、計算において、 $K=4$ 、 $a=d_{max}=1$ cm とした。また、河村²⁾および Gessler²⁾の実験値は、経過時間が不明であるが、図に示すように、 $\tau_{*cm}/\tau_{*0m}=2$ となったときの計算値とよく一致する。

b) 区間が短く、摩擦損失が無視できる場合

Run 8~Run 10 の実験においては、図-5に示されるように、幅一定の水路中に長さ約 80 cm、高さ 25 cm の bank が設けられ、下流側水位は一定に保たれている。bank はほぼ平行に低下するが、いわゆる parallel degradation の場合と異なり、bank の低下につれて水深が増大しながら静的平衡状態へ移行する。このような bank の低下は、あまり実際的な現象とは言えないが、境界条件が明確で、運動量の定理を適用するのに適しているため、計算式の検証のために行なわれたものである。

式(24)~(27)および(8)を用いた最終河床の粒度分布と河床低下量の計算結果を、実験値と比較すると図-7のようになり、両者はかなりよく一致する。

(3) 静的平衡河床の粒度特性

前述のように、土砂の流入がなければ、河床はしだいに低下して静的平衡河床に漸近すると考えられるが、前報で述べたように、armoring の実験によると、河床が

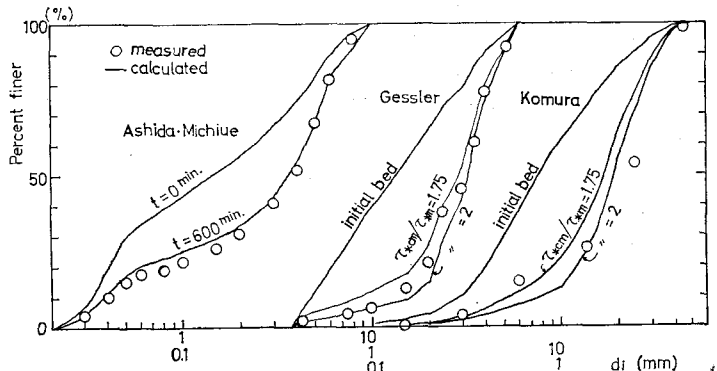


図-6 計算値と実験値の比較 (parallel degradation)

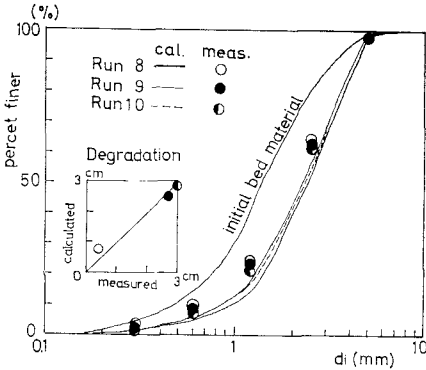


図-7 計算値と実験値の比較

ほとんど低下しなくなった後も、armoring はかなり長時間にわたって進行するので、静的平衡河床として、通常用いられている、「掃流力が限界掃流力に等しい河床」という定義を採用することは、河床高に対してはよいとしても、河床砂れきの粒度分布の最終状態に対しては適当でないと考えられる。また、静的平衡河床を、流砂量が0で河床変動が全然生じない河床であると定義すると流砂量の式(6)において、 $u_{*ci}/u_* = \infty$ とならなければならないので、式(6)を用いる場合には、厳密な意味での静的平衡河床は存在しないことになる。しかし、河床高と河床の粒度分布がほとんど変動しない状態を静定平衡河床として定義することは、実用上意義のあることと考えられるので、まず、静的平衡状態の判定基準について考察することにする。

静的平衡状態における河床の平均粒径 d_{mf} に対する限界掃流力と、その河床の掃流力との比を C_f とすると

$$C_f = \frac{\tau_{*cf}}{\tau_{*f}} = (b_* \eta_*)^2 \frac{d_{mf}}{d_{m0}} \frac{\tau_{*cf}}{\tau_{*0}} \dots (28)$$

ゆえに、

$$\frac{d_{mf}}{d_{m0}} = \frac{1}{(b_* \eta_*)^2} C_f \frac{\tau_{*0}}{\tau_{*cf}} \dots (29)$$

となる。ここに、

$$\tau_{*f} = u_{*f}^2 / (\sigma/\rho - 1) g d_{mf}$$

$$\tau_{*cf} = u_{*cf}^2 / (\sigma/\rho - 1) g d_{mf}, \quad \eta_* = \varphi_* \eta$$

u_{*f} : 静的平衡河床における摩擦速度

u_{*cf} : 粒径 d_{mf} の砂れきの限界摩擦速度

および添字 f は静的平衡河床における量を示す。

また、parallel degradation の場合には、 $b_* \eta_* = 1$ としてよいから、

$$\frac{d_{mf}}{d_{m0}} = C_f \frac{\tau_{*0}}{\tau_{*cf}} \dots (30)$$

さて、土屋⁹⁾の研究によると、均一砂の実験において、砂れきがほとんど移動しない状態の掃流力は、限界掃流力に関する岩垣公式において遮蔽係数 $\epsilon = 0.7$ とした線に、限界掃流力は同公式において $\epsilon = 0.4$ とした線によ

く一致する。したがって均一砂れきの場合には、

$$C_f = \frac{0.7}{0.4} = 1.75$$

となる。また、混合砂れきの粒径別限界掃流力の式として式(8)を用いると、粒径別限界掃流力の最小値は平均粒径のその0.85倍であるから、もっとも動きやすい砂れきがほとんど動かなくなった状態を静的平衡状態とすれば、

$$C_f = 1.75 / 0.85 = 2.06$$

となる。これらの値が、静的平衡状態判定の一つの規準を与えると考えられる。そこで、既往の実験 data より d_{mf}/d_{m0} を求めて plot すると図-8 のようになり、Gessler と河村の実験値は式(30)において $C_f = 2$ とした線に、芦田・道上の実験値は $C_f = 1/0.85$ とした線にほぼ一致する。したがって、Gessler と河村は砂粒がほとんど移動しなくなった状態を、芦田らは河床がほとんど低下しなくなった状態を、それぞれ最終状態と判断したと思われる。実際に採用すべき C_f の値は、河床の状態、安全性などを考慮の上で決定さるべきであるが、ここでは、上記の諸検討より $C_f = 2$ を静定平衡河床の規準として採用することにする。

a) parallel degradation の場合

式(30)において $C_f = 2$ とすると、

$$\frac{d_{mf}}{d_{m0}} = 2 \frac{\tau_{*0}}{\tau_{*cf}} \dots (31)$$

τ_{*cf} は d_{mf} の関数であるから、初期河床の掃流力と平均粒径が与えられると、静的平衡河床の平均粒径が求められる。 $\tau_{*cf} = 0.05$ とすれば d_{mf}/d_{m0} は τ_{*0} の40倍となる。一般に τ_{*cf} は 0.03~0.06 程度であるから、 d_{mf}/d_{m0} は τ_{*0} の30~60倍程度である。

b) 対象区間が短く、摩擦損失が無視できる場合

基準量として初期値を用いると、 $b_* = 1$ としてよいから、式(29)は、

$$\frac{d_{mf}}{d_{m0}} \eta_{*f} = C_f \frac{\tau_{*0}}{\tau_{*cf}} \dots (32)$$

となり、 τ_{*m} の減少に対して、 d_m の増加と η_* の増加がともに寄与することがわかる。

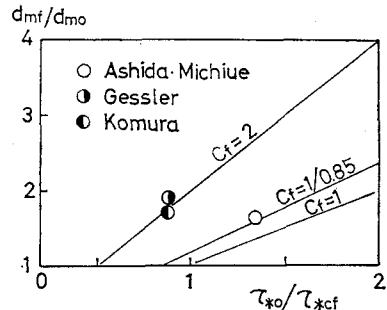


図-8 Armor coat の平均粒径

さて、この場合、現象を規定する parameter は、前述のように、 $F_0, \alpha, \tau_{*0}, \varphi_*$ および初期河床の粒度分布であるから、これらの値を種々変化させて、式 (25)~(27) および (22) により計算してみよう。これらの parameter のうち、 α は、 a を河床の最大粒径 d_{max} に等しいと考えれば、

$$\alpha = \frac{a}{h_0} = \frac{d_{max}}{h_0} = \frac{d_{max}}{d_{m0}} \frac{d_{m0}}{h_0} \dots\dots\dots (33)$$

となるが、 d_{max}/d_{m0} は、初期河床の粒度分布によりきまる値であるから、 α のかわりに d_{m0}/h_0 を用いることにする。初期河床の粒度分布は対数正規分布とし、その標準偏差 σ_0 を種々変化させる。ただし、最大粒径 d_{max} が無限大となる不都合をさけるため、 $d_{max}=d_{98}$ とすることにす。また、 τ_{*cm} は一般には d_m の関数であるが、ここでは $\tau_{*cm}=\tau_{*cf}=\text{const.}$ とする。

まず、図-9 は、 $h_0/d_{m0}=100, F_0=0$ および $\varphi_*=1$ とした場合の、 $\tau_{*0}/\tau_{*cf}, \sigma_0$ と d_{mf}/d_{m0} の関係を図示したものである。それによると、 d_{mf}/d_{m0} は τ_{*0}/τ_{*cf} が大きくなるにつれて増加するが、やがて一定値に漸近するようである。これは、 d_{mf} の上限が d_{max} であることから当然のことであろう。また、 σ_0 が小さいほどはやく一定値に近づくこと、それより小さい τ_{*0}/τ_{*cf} の値に対しては、 σ_0 による差がほとんどないことなどがわかる。次に、図-10 は、 h_0/d_{m0} と F_0 の影響をみるために、 $\sigma_0=3$ とし、 h_0/d_{m0} と F_0 を parameter とし計算した結果である。図によると、 h_0/d_{m0} が大きく

なるほど d_{mf}/d_{m0} が大きくなり、parallel degradation の場合に近づいている。このことは、同一の d_{m0} の場合、 h_0 が大きいほど水深 h の変化による η の変化の割合が小さいので、その分だけ d_{mf}/d_{m0} が大きくなることから、容易に理解されよう。また、この論文においては、交換層の厚さ a を最大粒径 d_{max} に等しいとしているが、 h_0/d_{m0} が2倍程度変化しても d_{mf}/d_{m0} はあまり変わらないから、 a に含まれる誤差の影響はかなり小さいと考えられる。図-10 には、フルード数の影響をみるために、 $F_0=0$ の場合と $F_0=0.7$ の場合が示されているが両者の差はわずかである。もちろん、フルード数は、流れの pattern や河床の regime を規定するという意味においては重要な parameter の一つであるが、それらが変化しない範囲においては、その影響は微小であると考えられる。最後に、 φ_* の影響について検討してみよう。 $F_0=0$ の場合、式 (22) および (24) を式 (25) に代入すると、

$$\frac{d\eta_*}{d\tau_*} = -\frac{\varphi_*}{\eta_*} \int_0^1 f_i di b \dots\dots\dots (34)$$

式 (32) において、一定の τ_{*0}/τ_{*cf} に対して d_{mf}/d_{m0} と η_{*f} は逆比例するが、式 (34) および式 (26) より、これらはそれぞれ φ_* および $1/\alpha$ に比例するから、 φ_* と α (したがって d_{m0}/h_0) は、 d_{mf}/d_{m0} および η_{*f} に対して同じ影響を与えることがわかる。すなわち、他の条件を同じにした場合、 φ_* を n 倍にして計算した結果と、 h_0/d_{m0} を $1/n$ にして計算した結果は全く同じ値になる。たとえば、図-10 において、 $F_0=0, \varphi_*=1, h_0/d_{m0}=50$ の線は、 $F_0=0, \varphi_*=2, h_0/d_{m0}=100$ の線に一致する。このように、 φ_* の変動の影響は、 d_{m0}/h_0 のそれと同じであるが、一般に φ_* の変動はかなり小さいことから、無視しうる程度のものであると思われる。

5. 動的平衡河道の粒度特性

(1) 動的平衡条件と計算式

河床高と河床砂れきの粒度構成が時間的に変化しない河床を平衡河床と定義すると、条件は式 (12)~(14) より

$$\frac{\partial(\omega_B \cdot b_*)}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots (35)$$

および

$$\frac{\partial i_B}{\partial \xi} = 0 \text{ or } \frac{\partial(i_B \omega_B b_*)}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots (36)$$

式 (36) は、粒径別流砂量が場所的に変化しないという条件であり、混合砂れき河床においては、通常の平衡河床の条件式 (35) のほかに、この条件が必要である。

式 (36) に流砂量の式 (10) を代入すると、

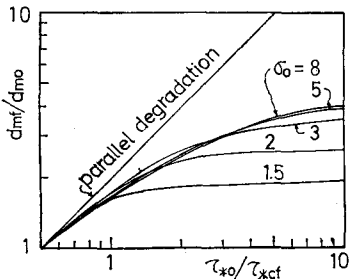


図-9 静的平衡河床の平均粒径 ($h_0/d_{m0}=100, F_0=0, \varphi_*=1$)

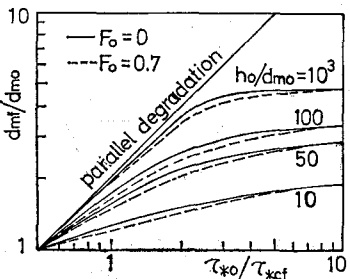


図-10 静的平衡河床の平均粒径 ($\sigma_0=3, \varphi_*=1$)

$$\frac{i_b f_i}{(i_b f_i)_0} = \eta_*^3 b_*^2 \dots\dots\dots (37)$$

ここに、添字 0 は基準点における量を表わす。上式において、 $i_b = (i_b)_0 = 1, f_i = f_{i0} = 1$ および $\varphi_* = \eta_*^{1/6}$ とすると、

$$\eta_*^{7/2} b_*^2 = 1 \dots\dots\dots (38)$$

となり、均一砂れき河床における 菅田の式¹⁰⁾に一致する。

また、式 (8) および式 (11) より

$$f_i = f_1 \left(\frac{d_i}{d_m}, \frac{\tau_{*cm}}{\tau_{*0}}, b_* \eta_* \right) \dots\dots\dots (39)$$

であるから、

$$\frac{i_b}{(i_b)_0} = f_2 \left(\frac{d_i}{d_m}, \frac{\tau_{*cm}}{\tau_{*0}}, \eta_*, b_* \right) \dots\dots\dots (40)$$

さらに、

$$\int_0^1 d i_b = \int_0^1 d (i_b)_0 = 1, \int_0^1 d_i d i_b = d_m,$$

$$\int_0^1 d_i d (i_b)_0 = d_{m0}$$

および

$$\frac{d_i}{d_m} = \frac{d_i}{d_{m0}} \cdot \frac{d_{m0}}{d_m}$$

であるから、次の関係式が成立する。

$$\frac{i_b}{(i_b)_0} = f_3 \left(\frac{\tau_{*cm}}{\tau_{*0}}, b_*, (i_b)_0 \right) \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{d_m}{d_{m0}} = f_4 \left(\frac{\tau_{*cm}}{\tau_{*0}}, b_*, (i_b)_0 \right) \dots\dots\dots (42)$$

$$\eta_* = f_5 \left(\frac{\tau_{*cm}}{\tau_{*0}}, b_*, (i_b)_0 \right) \dots\dots\dots (43)$$

τ_{*cm} は一般に d_m の関数であるから、 τ_{*0}, b_* および基準点河床の粒度分布が与えられれば、任意地点の動的平衡河床の粒度分布、 d_m および η_* を計算することができる。

次に、これらの関係を用いて実際の計算を行なう場合の手順について説明しよう。計算には式 (37) を変形した

$$i_b = b_*^2 \eta_*^3 \frac{(i_b f_i)_0}{f_i} \dots\dots\dots (44)$$

および

$$1 = b_*^2 \eta_*^3 \int_0^1 \frac{f_{i0}}{f_i} d i_b \dots\dots\dots (45)$$

を用い、次の順序で行なう。

- step 1: d_m および η_* を仮定する。
 - step 2: τ_{*cm}, f_i を計算し、式 (45) により、 η_* を計算する。
 - step 3: step 2 で求めた η_* を式 (44) に代入して i_b を計算する。求められた i_b は $\int_0^1 d i_b = 1$ を満足している。
 - step 4: $\int_0^1 d_i d i_b = d_m$ により d_m を計算する。
- step 1 の d_m と step 4 の d_m が等しくなるまで計

算をくり返す。

(2) 実験値と計算値の比較

動的平衡河床の実験 Run 6 および Run 7 は、水路の中流部に縮流比 1/3 の狭さく部があり、図-11 に示されるような土砂循環装置をもった水路で行なわれた。Run 6 では、初期河床が直線状になっているため、実験開始と同時に、狭さく部の河床に急激に低下し、その後もしだいに低下しながら平衡河床に漸近したのに対し、Run 7 では、狭さく部の初期河床が平衡河床より 3 cm 程度低く作られているため、この部分の河床は、しだいに上昇しながら平衡状態に移行した。

河床高と水位が変動しなくなった後、河床砂を採取して平均粒径を求めたものを図示すると、図-11 のようである。図によると、狭さく部では平均粒径が小さくなっており、静的平衡の場合とは逆の傾向を示している。このことは次の理由により説明される。動的平衡河床においては、各断面で流砂量が等しいので、狭さく部では、より広い断面より単位幅当たりの流砂量 q_B が大きく、したがって掃流力が大きい。一方、流砂量の式 (6) によると、掃流力が大きくなるほど i_b は i_b に近づく。すなわち、掃流力が大きくなるほど流砂の粒度は河床砂のそれに近づき、掃流力が小さくなるにつれて両者の差は大きくなり、流砂は細くなる。動的平衡河床においては、式 (36) より、流砂の粒度分布が一定であるから、河床砂れきの粒度は、掃流力の大きいところほど流砂のそれに近くなる。そのために、狭さく部では広い断面より河床砂れきの粒度が細くなることになる。

次に、水路の下流部では、河床と水面が平行で、等流になっているので、この部分を基準点とし、前述の計算法により動的平衡河床の平均粒径を計算してみると図-11 のようになる。それによると、狭さく部において、Run 7 の実験値は計算値とよく一致しているのに対し、Run 6 の計算値は実験値よりやや小さい値を示している。これは、Run 6 の実験においては、最初、狭さく部の河床が低下する際にとり残された大きい砂れきが、河

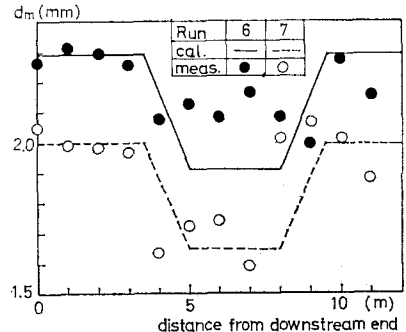


図-11 動的平衡河床の平均粒径 (実験値と計算値)

床の掃流力が小さい ($\tau_{*m}/\tau_{*cm}=1.3$ 程度) ために、河床低下が終了した後もなお河床に残っており、大きい砂れきについては、動的平衡状態になっていないことによるものと思われる。これに対して、Run 7 の実験は、狭さく部の河床が上昇しながら平衡状態に近づいているため、この部分の平均粒径が動的平衡河床のそれより小さくなっている可能性があるが、図-12 からわかるように b_* の小さい範囲では、流砂の粒度と河床砂のそれとの差が小さいため、動的平衡になっていないための誤差はかなり小さいものと思われる。したがって、Run 7 における実験値と計算値の良好な一致は、理論と実験の適合度のよいことを示すものと考えられる。

(3) 動的平衡河床の粒度特性

前述のように、動的平衡河床を規定する parameter は b_* , τ_{*0} および基準点河床の粒度分布である。そこで、これらの parameter の値を種々変化させて、計算を行なってみよう。

まず、図-12 は、基準点河床の粒度分布を対数正規分布とし、その標準偏差 $\sigma_0=3$ とした場合の、 b_* , τ_{*0}/τ_{*cm} および d_m/d_{m0} の関係を、図-13 は、 $b_*=0$ および $b_*=0.5$ とした場合の、 σ_0 , τ_{*0}/τ_{*cm} および d_m/d_{m0} の関係を、それぞれ図示したものである。なお、これらの図において、 $b_*=0$ の場合は、流砂と一致する。図によると、 b_* が 1 より小さくなるにつれて d_m/d_{m0} が小さくなり、その度合は、 τ_{*0}/τ_{*cm} が小さいほど、 σ_0 が大きいほど強いこと、 $b_* < 0.5$ の範囲では、 d_m/d_{m0} に対する

b_* の影響がかなり小さいことなどがわかる。

このように、動的平衡河床の粒度は、狭さく部で細くなるのが明らかであるが、実際の河川においては、狭さく部の河床粒度が他の部分より粗くなっている場合が多い。このことは、実際の河床が静的平衡に近い場合が多いことや、通常見受けられる河床の粒度が、河床砂れきがはげしく流送されている洪水時のそれとは、かなり異なっている可能性のあることを示唆するものであり興味深いことと思われる。

6. ま と め

以上述べたことを要約すると、下記のようにである。

(1) まず、混合砂れき河床変動に関する一般的な計算式 (9)~(14) を提示し、次に、これらの式をもとにして、静的平衡河床および動的平衡河床における計算式を導いた。そして、それらの計算式を、河床幅の変化する armoring の実験、静的平衡河床の実験および動的平衡河床の実験に適用して計算を行ない、計算値と実験値がよく一致することを示した。このように、境界条件の著しく異なる 3 種類の実験に対して、計算値がよい適合性を示したことから、本論文で提示された基礎式が、混合砂れき河床変動の計算式として、かなりの一般性を有するものと考えられる。

(2) 静的平衡河床に対して導かれた計算式により計算を行ない、静的平衡河床の粒度特性について検討した。それによると、parallel degradation の場合には、現象を規定する parameter は初期河床の粒度分布と掃流力であり、 d_{mf}/d_{m0} は τ_{*0} の 30~60 倍程度となる。また、掃流力が時間的に変化する場合には、現象を規定する parameter は h_0/d_{m0} , τ_{*0} , F_0 , φ_* および初期河床の粒度分布であるが、 F_0 と φ_* は、流れの pattern や河床の regime を変えない範囲では、あまり影響がない。 d_{mf}/d_{m0} は、掃流力が変化する場合にはその分だけ parallel degradation の場合より小さくなるが、 h_0/d_{m0} が大きくなるにつれて parallel degradation の場合に近づき、 τ_{*0}/τ_{*cf} の増大とともに d_{mf}/d_{m0} は一定値に漸近するので、parallel degradation からののはなれが大きくなる。

(3) 動的平衡河床においては、狭さく部ほど河床砂れきの粒度が細くなるのが、理論的、実験的に明らかになった。このことは実際河川の河床が、動的平衡河床よりも静的平衡河床に近い場合が多いこと、狭さく部において通常見受けられる河床の粒度が洪水時のそれとはかなり相違している可能性のあることを示唆するものと思われる。

謝辞：本研究を行なうにあたり、九州大学 椿東一郎

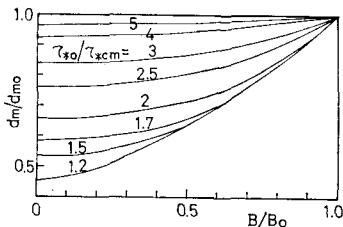


図-12 動的平衡河床の平均粒径 ($\sigma_0=3$)

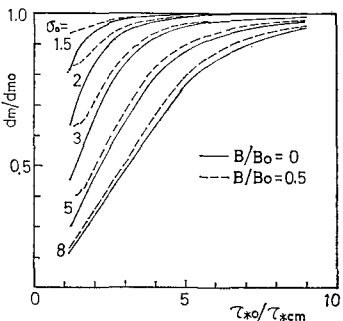


図-13 動的平衡河床の平均粒径

教授に種々有益なご助言を賜わった。また、実験の遂行は、本学学生 古屋慶一氏、技官 藤田和夫氏の労に負うところが大きい。各位に深く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 矢野勝正・土屋義人・道上正規：沖積河川における河床砂れきの特性の変化について，京大防災研年報第12号B（昭44.3）
- 2) Gessler, J. : Self-stabilizing Tendencies of Alluvial Channels, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. WW 2(1970).
- 3) 河村三郎：ダム下流流域における河床変動の研究（昭44.4）.
- 4) 芦田和男・道上正規：混合砂れきの流砂量と河床変動に関する研究，京大防災研年報第14号B（昭46.4）
- 5) 平野宗夫：Armoring をともなう河床低下について，土木学会論文報告集第195号（昭46.11）.
- 6) Egiazaroff, I. V. : Culculation of Non-uniform Sediment Concentration, Proc. of ASCE, Vol. 91, No. HY 4 (1965).
- 7) 芦田和男・道上正規・江頭進治：混合砂れきの移動限界について，土木学会第26回年次学術講演会講演集(昭46.10).
- 8) 河村三郎：Armor Coat の生成に関する研究，第15回水理講演会講演集（昭46.2）.
- 9) 土屋義人：混合砂れきの限界掃流力に関する研究，京大防災研年報第6号（昭38.7）.
- 10) 芦田和男：断面変化部における河床変動に関する研究，京大防災研年報第6号（昭38.7）.

(1972.6.23・受付)