

鉛直方向の速度勾配の大きい流れにおける 水質分散の近似解法

AN APPROXIMATE NUMERICAL SOLUTION OF A POLLUTANT DISPERSION

住 友 恒*
By Hisashi Sumitomo

1. はじめに

水質の伝播解析では国の内外を問わず、古くから Fick の法則を基盤とする拡散方程式を用いることが多い。しかも拡散方程式を取り扱う場合、解析対象独自の水理特性を考慮する必要もある。特に水系では一般に流速分布があるので、解析に当たりこれをいかに考慮するかはきわめて重要である。流速分布は流路における諸抵抗に支配され、流れに伴うエネルギー消費あるいは乱れの強弱など種々の水理特性に密接な関係を持つ。したがって、流速分布を考慮して上記拡散方程式を解くことができれば、実際の汚濁解析にきわめて好都合である。水質の連続条件に加えて、間接的にはあるが、水流の運動条件を考慮することに相当する。ただ、流速分布を考慮して拡散方程式を解くことは必ずしも容易でない。この点については、これまで Taylor¹⁾ や Elder²⁾ を出発点としていくつかすぐれた研究成果があるのみである³⁾。これらの研究によれば、表-1 に示すように、流速分布を考慮

すれば、層流下における分子拡散や乱流下における縦方向拡散の 10² 倍近い拡散効果が流下方向に出現することがすでに指摘されている。この種の総合的な拡散効果は名目上分散と呼ばれ、一応拡散と区別されることも多いが、基礎式としての分散方程式は式型、解法いずれも一般の拡散とまったく同様でよいことも指摘されている。いいかえれば、総合的な分散も拡散と同様に Fick の法則と同型に表示されるのが特徴である。ここで若干問題になるのは、流速分布を考慮して分散の定義が総合的になった段階でもなお分散項を Fick の法則と同型に表示する必然性があるか否かである。特に、大きくかつ複雑な流速分布のある場合など検討の余地があるのではないとも考えうる。そこで本文では、汚濁解析に当たり極力流況特性を考慮することを前提に、上記疑問に立脚しつつ、総合的な水質の分散を少しでも簡単に解析する方法について検討を加えてみることにした。解法を簡略化すれば、当然分散方程式の厳密解とは差異が生ずるけれども、汚濁解析法として有意な誤差を伴わない範囲内で、しかも流況条件を考慮しやすければ実用上好都合と

表-1 流速条件と分散係数の関係

| | 開 水 路 | | 管 水 路 | |
|-----------------------------|--|--|---|--|
| | 乱 流 | 層 流 | 乱 流 | 層 流 |
| 流 速 分 布 | $u = \bar{u} + \frac{u_*}{\kappa} \left(1 + \ln \left(\frac{y}{h} \right) \right)$ | $u = \frac{gI}{r} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right)$ | $u = \bar{u} + \frac{u_*}{\kappa} \left(A + \ln \left(1 - \frac{r}{a} \right) \right)$ | $u = 2\bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ |
| 平 均 流 速 \bar{u} | $\bar{u} = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2}$ | $\bar{u} = \frac{1}{3r} (gh^2 I)$ | $\bar{u} = \sqrt{4ga} \cdot \frac{1}{f} \left(\frac{hf}{l} \right)$ | $\bar{u} = \frac{g}{8r} \left(\frac{hf}{l} \right) a^2$ |
| u_{max} と \bar{u} の 関 係 | $u_{max} = \bar{u} + \frac{1}{\kappa} u_*$ | $u_{max} = \frac{3}{2} \bar{u}$ | $u_{max} = \bar{u} + \frac{A}{\kappa} u_*$ | $u_{max} = 2\bar{u}$ |
| 縦 方 向 乱 流 拡 散 係 数 | $0.068 hu_*$ | D_m | $0.052 au_*$ | D_m |
| 流 下 方 向 分 散 係 数 | $D = 5.9 hu_*$ | $D = \frac{h^2 \bar{u}^2}{52.5 D_m}$ | $D = 10.1 au_*$ | $D = \frac{a^2 \bar{u}^2}{48 D_m}$ |
| 備 考 | $u_* = \sqrt{ghI}$ h = 水深 y = 底面からの距離 κ = カルマン定数 $\cong 0.4$ | D_m = 分子拡散係数 I = エネルギー勾配 | $u_* = \sqrt{\frac{a}{2} g \left(\frac{hf}{l} \right)}$ $A \cong 1.7$ h_f = 損失水頭 | a = 半径 r = 中心からの距離 l = 管長 |

* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部衛生工学教室

いう観点に立って以下考察をすすめた。

2. 分散方程式の近似表示について

(1) 縦方向拡散の近似表示

乱流場では一般に流下方向への水質分散は次式によって表わされる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (m) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 c は水質、 u は流速、 E_x は x 方向分散係数、 x, y は流下方向および鉛直方向距離、 t は時間で、 m は拡散による縦方向物質移動量である。 m の表示法としては、今日もっとも一般に、次の式(2)に示すレイノルズ相似が用いられる。

$$\frac{-m}{\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)} = E_y(y) = \frac{-\overline{u' \cdot v'}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \quad \dots\dots\dots(2)$$

式(2)における型の類似性から、 m は次のようにも表わされる。

$$m = -\overline{v' \cdot c'} \quad \dots\dots\dots(3)$$

なお、ここで、 u', v', c' は x, y 方向の流速 u, v および c の乱れ成分を表わし、 $\overline{u' \cdot v'}$ および $\overline{v' \cdot c'}$ は u', v', c' の時間的な平均値を指す。

一般には式(2)に示すように、 m が Fick の法則と同様、鉛直方向への水質濃度勾配に比例するものと考えた上で式(1)を用いる。ところで、本文では先述のように総合的な分散場を対象とするので、 m は必ずしも水質の濃度勾配のみに支配されず、種々の流況特性にも総合的に支配されるものと考えてみる。したがって、式(2)よりもむしろ式(3)の近似展開に主眼を置くことにする。

いま、距離 dl の2点間に大きな流速差がある乱流場を図-1のように概念的に表示して、ある程度長時間 dt 間の現象に注目してみる。瞬時の現象に注目する場合、式(3)のごとく表わされる現象も、 dt 間の平均値としては近似的に、鉛直方向距離 dl に対し水質 c が見かけの移動速度 V' で移動するものと考えてみる。すなわち、2点間の流速差が大きい流れではある程度長時間 dt を対象にすれば、式(3)を近似的に次式で表わしうるものと考えてみる。

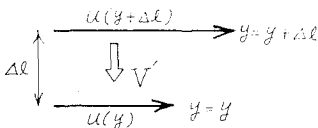


図-1 みかけ対流の概念

$$\overline{m} = V' \cdot c \quad \dots\dots\dots(4)$$

この場合、式(1)上でいえる程度長い時間 dt を時間単位とする時間 t について次のように表わされることになる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (V'c) \quad \dots\dots\dots(1)'$$

式型からいえば、右辺第2項が見かけ速度 V' の鉛直方向移送項、すなわち主流に対する見かけの対流項を表わしているものともいえる。

(2) 分散方程式の近似表示と解法の特性

式(1)'に示す V' は dl 間で考慮した見かけ量であるから、式(1)'は次式のように表わすほうがより妥当であろう。

$$\frac{\partial c_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial c_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x(y) \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{dl} (V'_{y+dt} \cdot c_{y+dt} - V'_y \cdot c_y) \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、サフィックス y は各 x, t での $y=y$ の値を指す。次に、表-1によれば、流下方向の総括的な分散係数は、乱流の場合縦方向乱流拡散係数の一定倍量 (α) として表わされている(開水路の場合、 $\alpha=5.86/0.068$ 、管水路の場合、 $\alpha=10.06/0.052$)。そこで、水質分散方程式の近似式として、さらに次式のごとく総括的なみかけ対流量 (V) を設定し、式(7)のように近似化することも考えられる。

$$V = \alpha \cdot V' \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial c_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial c_y}{\partial x} = \frac{1}{dl} (V_{y+dt} \cdot c_{y+dt} - V_y \cdot c_y) \quad \dots\dots\dots(7)$$

いま、流路断面方向の流速分布を図-2に示すように dl 間隔で段階区分し、ある任意の区分 i に注目すれば上層、下層からのそれぞれの見かけ対流を別個に考慮して次のように考えることができる。流路区分 i と区分 $(i-1)$ の境界で、図-2に示すように $(i-1)$ から i へ流入するものと、 i から $(i-1)$ へ流出するものに区別して、それぞれ $q_{i-1, i}$ と $q_{i, i-1}$ と表わせば、式(7)に代り次式を得る。この場合、水量の連続条件として式(9)を得る。

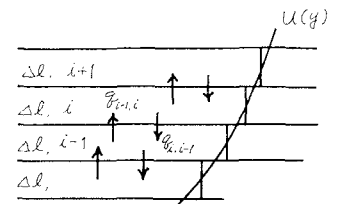


図-2 流路の区分

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{1}{dl} (q_{i-1, i} \cdot c_{i-1} - q_{i, i-1} \cdot c_i + q_{i+1, i} \cdot c_{i+1} - q_{i, i+1} \cdot c_i) \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial(\Delta L)}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\Delta L)}{\partial x} = q_{i-1,i} - q_{i,i-1} + q_{i+1,i} - q_{i,i+1} \dots\dots\dots(9)$$

分散方程式をこのように近似表示する場合、その解法における特徴として、特性曲線法を活用し、比較的容易に解きうる点を指摘しよう。すなわち、次の式(10)を用いて式(8)、(9)を式(11)、(12)のように常微分方程式として解きうる。

$$\frac{dx}{dt} = u_i \dots\dots\dots(10)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{1}{\Delta l} (q_{i-1,i} \cdot c_i - q_{i,i-1} \cdot c_i + q_{i+1,i} \cdot c_{i+1} - q_{i,i+1} \cdot c_i) \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{d(\Delta L)}{dt} = q_{i-1,i} - q_{i,i-1} + q_{i+1,i} - q_{i,i+1} \dots\dots\dots(12)$$

数値計算に当たり、 $q_{i-1,i}$ 、 $q_{i,i-1}$ 、 $q_{i+1,i}$ 、 $q_{i,i+1}$ を設定することができれば、ラグランジュ流のごとく、式(10)によってある流塊の流下に伴う容量変化、質変化をそれぞれ式(12)、式(11)によって求めることができる。各境界でのみかけ対流量が等しい場合 ($q_{i-1,i} = q_{i,i-1}$ 、 $q_{i+1,i} = q_{i,i+1}$)、当然 Δl は一定となり、式(10)により流下する水の質変化を式(11)のみで追跡することができる。

3. 流況の近似表示と解法の実用化

(1) 流路の二層表示による近似化

流路を図-2に示すように多数に区分する場合、解法は一般2次元流の数値計算とあまり変わるところはなく近似解法としての特性に欠ける。また、流路を多数に区分して流況を比較的现象に忠実に表現する場合、みかけ対流量の定義が現象に対応して種々の制約をうけ、総合的な特性を失うことにもなりかねない。いかにえれば、近似解法としての流路区分、みかけ対流量の概念は流路条件を比較的総合的に近似表示するときに限り有意となる。したがって、実用上、流路をあまり細かく区分する必要はなく、かつ区分しすぎることは近似法として必ずしも適切でない。流路を忠実に表示する必要がある場合はいうまでもなく、一般の2次元流あるいは3次元流として厳密解を求めればよい。一方、河川など流水によどみ部が存在する場合、よどみ部分と主流部の間で水量および水質が徐々に交換されてゆくことは経験的にも認めるところである。流下水の一部はランダムによどみ部に流入し、貯留され、再度主流に戻り流下する。結果的に主流での水質伝播に分散効果が現われる。流路中に流速の早い部分と遅い部分考えた場合、流速の遅い部分が早い部分に対し、相対的に上記よどみ部の特性を

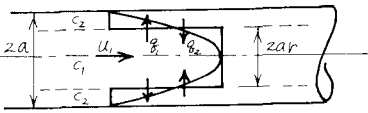
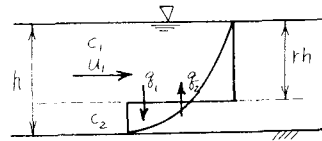


図-3 開水路、管水路の近似区分

持つ点に注目し、本文では近似解法として実用上流路を図-3に示すように、開水路、管水路いずれも最も簡単に二層に区分することを考えてみる。図中サフィックス1が主流を指し、同2がよどみ部あるいは流速の遅い部分を想定する。この場合、開水路では先の式(10)、(11)、(12)がそれぞれ次のように簡単になる⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_1; & \frac{dc_1}{dt} &= \frac{1}{rh} (q_2 \cdot c_2 - q_1 \cdot c_1) \\ & & \frac{drh}{dt} &= q_2 - q_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_2; & \frac{dc_2}{dt} &= \frac{1}{(1-r)h} (q_1 \cdot c_1 - q_2 \cdot c_2) \\ & & \frac{d(1-r)h}{dt} &= q_1 - q_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 r は全断面に対する主流の面積割合を表わし、以下これを流水断面率と呼ぶことにする。またここで、 $q_{2,1}$ を q_2 、 $q_{1,2}$ を q_1 と表わしている。

次に、さらに簡単のために、 $u_2=0$ 、 $u_1=u_{max}$ をととり、 r が一定の場合 ($q_1=q_2=q$)を考えれば、上式は次のようになる。そこで以下、式(15)を最も簡単な近似式と考え、その実用性について主として検討を加えることにする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_{max} = u_r = \frac{\bar{a}}{r} \\ \frac{dc_1}{dt} &= \frac{q}{rh} (c_2 - c_1) \\ \frac{dc_2}{dt} &= \frac{q}{(1-r)h} (c_1 - c_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

ここで、 \bar{a} は流路全断面に対する平均流速で、管水路の場合については式(15)の h を管径で表わせばよい。

(2) 流水断面率 r について

図-3に示すように、流速分布を $u_1 = u_{max}$ 、 $u_2 = 0$ とすることによって流速分布を段階的にモデル表示することには特に確たる必然性はない。取扱いの簡便さを考慮した一つの設定にすぎないので、その設定に伴う諸条件を明確にしておく必要がある。特に流水断面率

$$r(=\bar{u}/u_{\max.})$$

の考察が重要である。ところで、開水路、管水路における規則的な流れではすでに表-1 に示したような流速条件が知られている。層流下ではたとえば管水路の場合次の関係にある。

$$r = \frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(16)$$

乱流下では、開水路の場合カルマンによる流速の対数分布から次の関係を得る。

$$r = \frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{u_*}{\bar{u}}} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{gh}I}{\kappa \bar{u}}} \\ = \frac{1}{1 + \frac{n\sqrt{g}}{\kappa} \cdot h^{-1/6}} \dots\dots\dots(17)$$

ここで、 κ はカルマン定数でほぼ 0.4。

以上から、今後さらに検討を要するが規則的な流速分布を持つ開水路乱流では底面粗度 n と水深から r 値を決定しうる可能性もある。また同様に、平均流速がわかるときは水深とエネルギー勾配（近似的には流路勾配）によって r 値を求めることができよう。一方、管水路の場合、満流下で上式と同様に次式を得る。

$$r = \frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{A}{\kappa} \cdot \frac{u_*}{\bar{u}}} \\ = \frac{1}{1 + \frac{A\sqrt{ga}(h_f/L)/2}{\kappa \cdot \bar{u}}} = \frac{1}{1 + \frac{A\sqrt{f}}{2\sqrt{2}\kappa}} \dots\dots\dots(18)$$

ここで、 A は定数で、カルマンによれば 1.7、ニクラゼによれば 1.6 が与えられており、ほぼ A/κ として 4.25 をとることが多い。 a は管の半径、 h_f は流下距離 L における損失水頭 ($I=h_f/L$)、 f は管壁の摩擦係数で、一般に管路における損失水頭を表わす次式の f である。

$$h_f = f \cdot \left(\frac{L}{2a}\right) \cdot \frac{\bar{u}^2}{2g} \dots\dots\dots(19)$$

一例として平均流速が 1 cm/sec のときの開水路、管水路における r 値を式 (17)、(18) 両式より求め、図-4 に表わす。図からもわかるように、エネルギー勾配値の

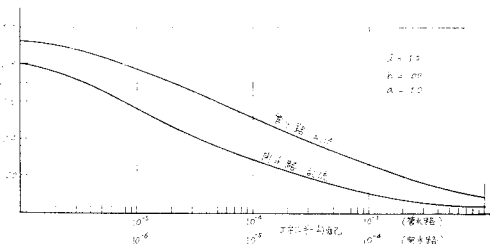


図-4 開水路、管水路における流水断面率 r 、例

オーダー増に対応して r 値は減少する。なお、流速分布が対数法則など規則性がない場合の流れについては、いうまでもなく上記とは別に、実測流速分布から \bar{u} 、 u_{\max} を求め、直接 \bar{u}/u_{\max} として r 値を算定すればよい。また、開水路流れなどで幅方向にも流速分布を持つことが多いが、この場合 r 値は当然式 (17) で求める値よりさらに小さくなる。

4. 近似解法の特性について

(1) 近似式の解析解

本近似解法では非定常な水質応答を特性曲線法を用いて比較的容易に追跡しうることを一つの特徴としている。特に、この数値解法は分散方程式を直接差分表示する数値解法と対比して、解の安定条件を Δx のみでコントロールしうるところから計算がきわめて容易である。また、実用に当たり、初期条件、境界条件を無理に整備して解析解を用いるよりはむしろ数値解法を用いるほうが好都合なことも多い。したがって、一つの解法を示すという意味ではなく、あくまで近似解法自体の特性を調べる目的で一つの解析解を以下に求めておく。

まず、式 (15) の第 2、第 3 両式より次の関係を得る。

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{-r}{(1-r)} \cdot \frac{dc_1}{dt} \dots\dots\dots(20)$$

図-5 (a) に示すように一定水質 c_0 の連続変化の場合、初期条件として、 $c_1=c_{10}$ 、 $c_2=c_{20}$ を導入して式 (20) から次式を得る。

$$c_1 = c_{10} - \frac{r-1}{r} (c_{20} - c_2) \dots\dots\dots(21)$$

これを式 (15) の第 2 式に代入し、式 (22) の条件が

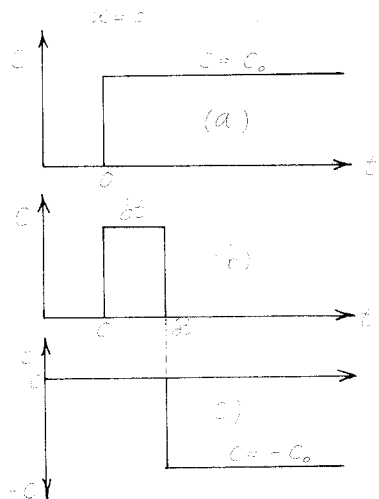


図-5 上流水質の変化のパターン

ら解析解として式 (23) を得る。

$$t=0 \text{ にて } c_1=c_{10}, \quad t=\infty \text{ にて } c_1=c_2, \dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c_0 + (1-r)(c_0 - c_{20}) \cdot \left(e^{\frac{q}{h} \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} \right) t} - 1 \right) \\ c_2 &= c_{20} - r(c_0 - c_{20}) \cdot \left(e^{\frac{q}{h} \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} \right) t} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

いま, c_{20} を一例として, $t=0$ にて $c_{20}=0$ の場合, 次のように時間関数として近似しうる ($\Delta t=1$ をとる)。

$$\begin{aligned} c_{20}(t) &\cong c_2(\Delta t, x, t) \\ &= c_0 \left[1 - \left\{ (1-r) + r \cdot e^{\frac{q}{h} \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} \right) t} \right\} \right] \end{aligned} \dots (24)$$

式 (23), (24) より次の解析解を得る。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \bar{u}/r, \quad t_0 = x/u_r \\ s &= \exp \left\{ \frac{q}{h(r-1)} - \frac{q}{hr} \right\}, \quad m = 1 - r + r \cdot s \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1(x, t) &= c_2(x, t) = 0, \quad (t < t_0 \text{ のとき}) \\ c_1(x, t) &= c_0 \{ 1 + (1-r) \cdot m^{(t-t_0)} \cdot (s^{t_0} - 1) \}, \\ &\hspace{15em} (t \geq t_0 \text{ のとき}) \\ c_2(x, t) &= c_0 \{ 1 - (1-r+r \cdot s^{t_0}) \cdot m^{(t-t_0)} \}, \\ &\hspace{15em} (t \geq t_0 \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

また, 図-5 (b) に示すパルス変化のとき, 図-5 (c) に示すように δt 後の $-c_0$ 変化を考慮し両者を合成して次式を得る。この場合, $t=\delta t$ で $c_{20} \cong 0$ より式 (24) を用いることはできない。 $t=0$ から $t=\delta t$ 間に变化した $c_{20}(x, \delta t)$ を境界条件として考慮し, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} c_1(x, t) &= 2c_0 \cdot (1-r) \cdot m^{(t-t_0)} \cdot (s^{t_0} - 1) \\ &\quad \cdot (1 - m^{-\delta t}), \quad (t \geq t_0 + \delta t \text{ のとき}) \\ c_2(x, t) &= 2c_0 \cdot (1-r+r \cdot s^{t_0}) \cdot m^{(t-t_0)} \\ &\quad \cdot (m^{-\delta t} - 1), \quad (t \geq t_0 + \delta t \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

ただし, $t < t_0 + \delta t$ については式 (25) を用いる。

(2) 近似解法の特徴と適用限界

本近似解法の特徴を定性的に調べるために, 図-5 (b) に示すパルス変化に対する下流水質の応答を式 (25), (26) 両式で算定してみる。

$t=t_0+\delta t$ における上記両式の連続条件によって q/h 値を算定した上で, r の変化に対応する c_1/c_0 を求めたのが図-6 である。同様に, δt の変化に対応する c_1/c_0 を図-7, また水質ピークを統一した場合が図-8 である。

以上の計算結果だけからでも本近似解法の特徴と適用限界をいくつか指摘することができる。まず, 図-6 から明らかのように, 流下方向に移動する物質濃度 c_1 の分散については r が 0.5 以上の場合, きわめて小さい分散能しか表わしえず, 実用上適用範囲外と考えられる。次に, 図-7 から δt が大きくなればなるほど実際の分散パターンに近づくことがわかる (この点については次章でさらにくわしく説明する)。また, 図-6 から図-8 に共通して次のような重要な特性を指摘しうる。

一つは初期分散を表示しえないこと, 他は水質の下降期が常に下に凸の型状を示し, その上昇期に比べ精度がやや低下することである。以上から本近似解法の適用対象をほぼ次のようにまとめることができるようである。

- 1) r が 0.5 以下となる流速分布の大きい流れにおける水質分散。
- 2) δt の比較的大きい, いいかえれば徐々に変化する水質の分散 (特に下降期がゆるやかに変化する場合)。

逆にいえば, 流速分布の小さい流れにおける水

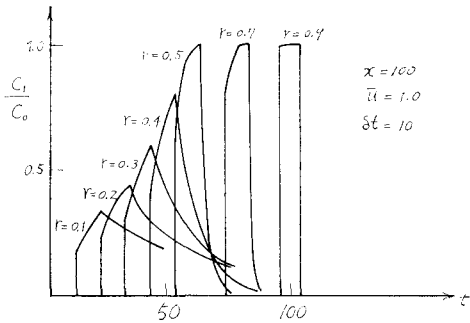


図-6 r の変化に伴う分散水質

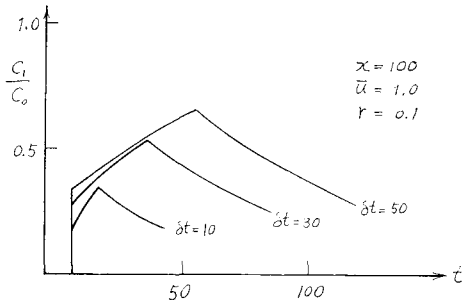


図-7 delta t の変化に伴う分散水質

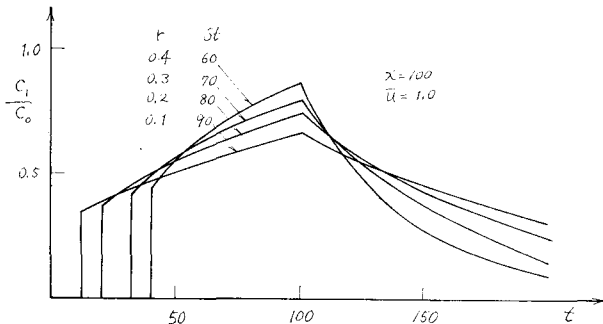


図-8 r, delta t の変化に伴う分散水質

質分散については、従来のように分散方程式で解析する必要がある。ただ、実際の汚濁解析を念頭におく場合、水深方向ばかりでなく幅方向にも流速分布があったり、よどみ部、死水部などが存在する流れは多く、しかも時間単位で変わる緩慢な水質変化もきわめて多い。したがって、本近似解法の適用範囲は実用上比較的広範におよぶものと考えうる。ただ、以上の検討はいずれも定性的で、定量的な検討を今後の問題として残している。

5. 近似解と分散方程式の解との比較検討

(1) 分散方程式の解

本近似解法では流水断面率 r およびみかけ対流量 q という二つの新しいパラメータが導入されている。近似解法の適用範囲内で、これらの両値が従来用いられてきた分散係数といかなる相関を持つかを調べておく必要がある。

そこで、従来一般に用いられてきた分散方程式の解と式 (25), (26) に示す本近似解とを対比することによって、上記相関を調べるとともに、さらに詳しく本近似解法の特性を以下に検討しておく。

一般に、1次元分散方程式は一定流速のとき、次の式 (27) で表わされる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c}{\partial x} \right) \dots\dots\dots(27)$$

ここで、 D は1次元分散係数で、式 (1) の E_x とは厳密には区別される。さて、図-5 (a) に示すような上流水質の一定変化に対する分散水質の厳密解は式 (28) で表わされる³⁾。同様に図-5 (b) のパルス変化の場合、近似的に式 (29) で表わしうる。

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0-ut_s}{2\sqrt{Dt_s}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{-ut_s}{2\sqrt{Dt_s}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0-ut_s}{2\sqrt{Dt_s}}\right)} \dots\dots\dots(28)$$

$(x > ut) \dots\dots\dots(28)$

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-u(t-\delta t)}{2\sqrt{D(t-\delta t)}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{-ut_s}{2\sqrt{Dt_s}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0-ut_s}{2\sqrt{Dt_s}}\right)} \dots\dots\dots(29)$$

$(x > u(t-\delta t)) \dots\dots\dots(29)$

ただし、式 (28) で、 $t=t_s, x=0$ にて $c=c_0, t=t_s, x=x_0$ にて $c=c_0$ である。 t_s としてきわめて小さい値を、 x_0 として大きい値をとればよい。また、 δt は図-5 中に示すとおりパルスの時間間隔で、 $\delta t > t > 0$ について式 (28), $(x/u) + \delta t > t > \delta t$ について式 (29) を用いる。なお、ここで、 erf は誤差関数を指す。

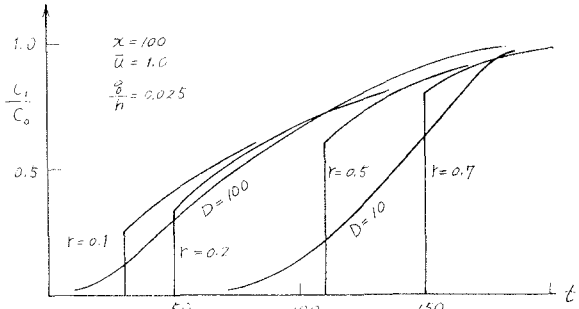


図 9 分散方程式の解と近似解の関係 (その 1)

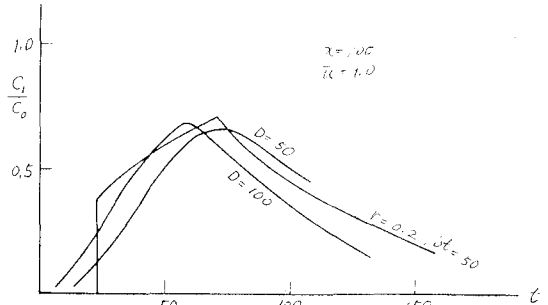


図-10 分散方程式の解と近似解の関係 (その 2)

(2) 流水断面率、見かけ対流量と分散係数の相関

図-5 (a), (b) の応答水質を式 (25), (26) および式 (28), (29) で算定し、例示したのが図-9, 図-10 である。本近似解法の近似の程度を定性的に了解しようとともに、 r, q 両値の設定が分散係数 D に対応していることがわかる。ここで注意すべきは、図-10 に示すように、パルス変化の場合、先にも記したように近似の程

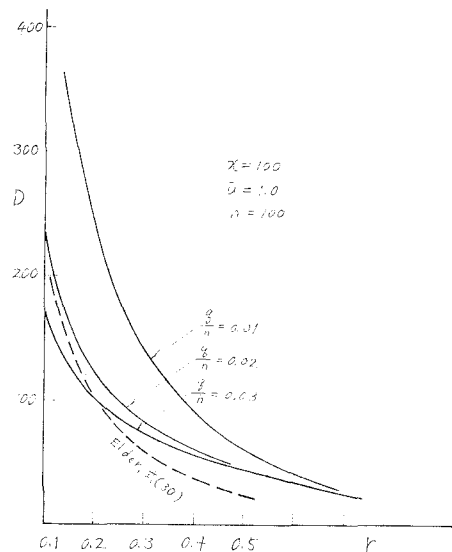
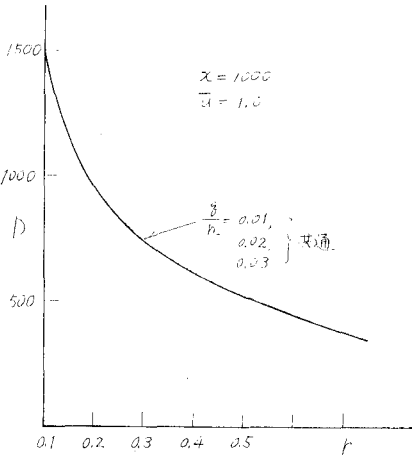


図-11 r, q と分散係数の相関 (その 1)

図—12 r, q と分散係数の相関 (その 2)

度が δt 値によって変化することである。そこでここでは r, q 値と D 値の相関を調べるために、近似精度が最も高い図—9 の場合を取り上げてみる。すなわち、図—5 (a) に示す水質応答で、 $t=t_0$ における式 (25) と式 (28) の両値が一致するという条件から D に等価な r, q を求める。これらの相関関係を結果のみ例示したのが 図—11, 図—12 である (両図の差異については次節で言及する)。

ところで、Elder によれば開水路で流速分布を持つ乱流の場合、分散係数 D は表—1 にも示すように次式で表わされている²⁾。

$$D = 5.9 h \sqrt{ghI} \dots\dots\dots (30)$$

ここで、水面勾配 I を式 (17) によって本文でいう流水断面率 r で表わすことができる。Elder の結果によって r と D の相関を求めたのが 図—11 中に示す破線の関係である。これらの結果から、 r が小さい場合、本近似解法が従来の研究成果にも矛盾しないことがわかる。

(3) 見かけ対流量 q について

本近似解法の示す分散効果はいうまでもなく、流水断面率 r と見かけ対流量 q による総合的な効果によるものである。ただ、図—12 に示したように、流下距離が長く、縦方向混合が十分行なわれるような流れでは分散能は主として r のみに支配される。一方、流下時間が小さく、縦方向混合が卓越しているような流れでは分散能が r, q 両値によって決まる。いいかえれば、流水断面内に水質濃度差がある ($c_1 \neq c_2$) ような縦方向混合が十分発達していない流れにおける水質分散を解析する場合、この見かけ対流量 q 値をいかに決定するかが直接流れ全体の分散能を決定することになる。しかし、本文ではこの見かけ対流量が縦方向拡散や対流などによるあらゆる縦方向への物質移送量を総括的に包含するものと

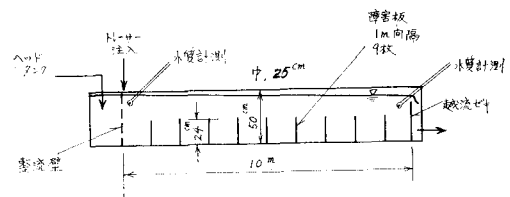
して取り扱い、これらをひとまず一括して対流移送に置換して表示したものである。したがって、現時点でこの q 値を理論的に決定することはできない。原則として、次章に示すように各種の流れにおける q 値をそれぞれ試行錯誤的に算定してゆかざるを得ない。この q 値が各種水理特性にいかんにか支配されているかを究明してゆくことが、本研究の今後の最大の課題となっている。ただ、従来の一次元分散方程式による解法のように、断面内水質分布を重視しない場合、図—12 に示すように、この q 値の決定自体それほど重要ではない。

6. 近似解法の実験による検証

以上の検討過程ですでに本近似解法には適用限界があることを示した。そこでここでは適用範囲内と考える実験条件をあらかじめ検討した上で、以下に示すような実験を行ない、その結果を本近似解法で解析してみることによって、まず解法自体の妥当性を検証しておく。

(1) 底面粗度により大きな流速分布のある流れについての実験⁹⁾

近似解法の適用に特に好都合な流況は、断面流速分布が大きい流れで、水質変化があまり急激でない流れであることがこれまでの検討から明らかになっている。そこでこれらの流況条件を満たす流れとして、図—13 に示すような長さ 10 m の実験水路 (幅 25 cm, 深さ 50 cm) に大きな流速分布を与え、ここでのゆるやかな水質変化を取り上げてみる。まず、水路底面に流下方向に 1 m 間隔で障害板を設置することによって大きな流速分布を与えた上で、上流端に水質トレーサーを徐々に注入し、下流端へのトレーサーの分散を計測する。障害板として長さ 24 cm の板を図—13 中に示すように設置するので流れを複雑にする。そこで、その水理特性として水面勾配を計測することによって総括的に底面粗度として定量化する。水質トレーサーは NaCl で、白金電極によってこれを自動計測、記録する。図—14, 図—15 は結果の一例で、図中の計算値は上流端実測値を式 (15) により追跡計算した水質値である。なお、ここでは q 値を最も簡単に近似的には u_r に比例するものと考え、次式のよう



図—13 実験装置 (その 1)

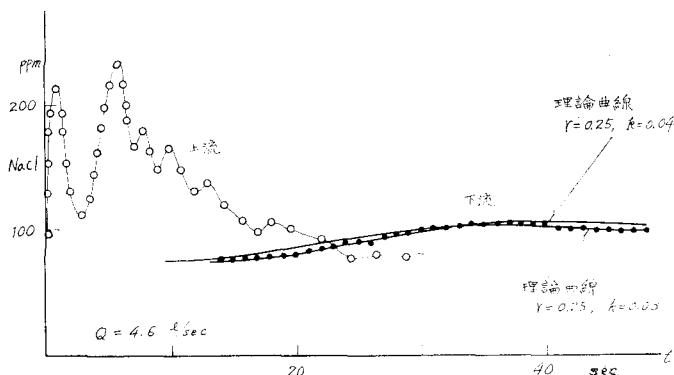


図 14 実験結果の一例 (その 1)

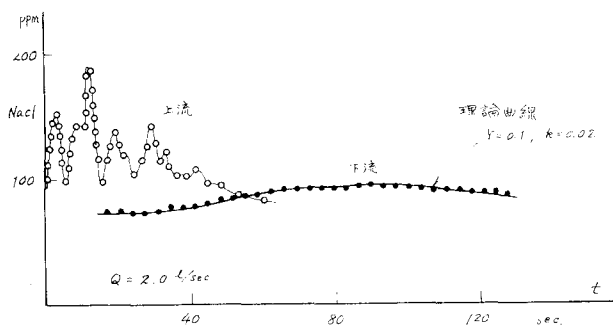


図 15 実験結果の一例 (その 2)

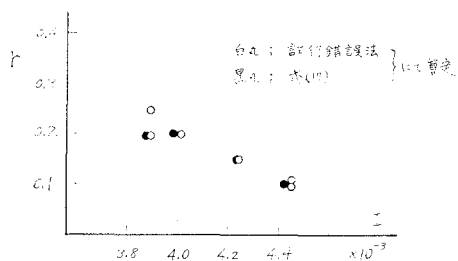


図 16 r に関する実験結果

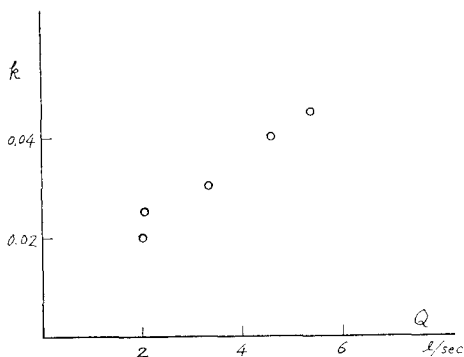


図 17 k に関する実験結果

$$q \cong k \cdot u_r \dots \dots \dots (31)$$

すなわち、 r と k 値を試行錯誤的に種々変化した場合の下流濃度曲線を電子計算機によって求め、それらのうち最も実測値を再現する r, k 値を選定したものである。 r, k 値として適切な値を導入すれば計算値が実測値をほぼ再現しうることがわかり、本近似解法の妥当性をも認めうる。このようにして求めた r, k 値を図示したのが図-16、図-17 である。特に図-16 では r 値を実測水面勾配との関係で表示している。上述のように試行錯誤的に求めた r 値と式 (17) より求めた r 値がほぼ一致していることをも認めうる。すなわち、幅方向の流速分布がほとんどなく、水面勾配が大きく、流速分布の大きな流れでは式 (17) によって r 値を算定しうることがわかる。

(2) 偏流により大きな流速分布のある流れについての実験⁴⁾

次に、大きな流速分布が底面粗度によるものではなく、他の原因による場合を取り上げてみる。そこで、この種の流速分布の例として偏流を取り上げ、ここでは流速が小さく、かつ偏流に基づく流速分布を持つ沈殿池における水質分散について実験を行なってみる。図-18 に示す実験槽では流入側の構造上偏流が生じ、槽の底部特に流入側にいわゆる死水部が発生する。上流

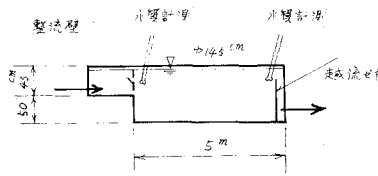


図 18 実験装置 (その 2)

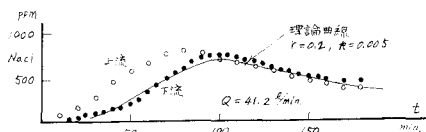


図 19 実験結果の一例 (その 3)

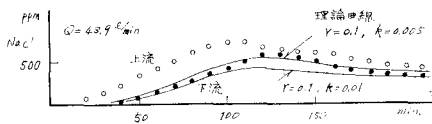


図 20 実験結果の一例 (その 4)

端に先の実験と同様に水質トレーサーを注入し、下流端への水質分散を調べたところ、結果の一例として図—19、図—20を得た。本実験の場合、 r 値について式 (17) を活用することができないので、先述のごとく試行錯誤的に算定せざるを得ない。この r 値の算定結果は同図に示す実験結果以外にも共通して、ほぼ 0.1 から 0.3 程度の小さい値を得た。槽の流入構造から判断して r はほぼ 0.5 あるいはそれ以上の値をとるようにも見うけられるが、結果はさらに小さい。この差から本実験槽では幅方向にも偏流が発生しているものと類推でき、結局、容積効率率は 10~30% 程度に減少しているものとも指摘できる。

以上、6. 章 (1)、(2) に示した実験結果はあくまで本近似解法の適用例を示し、その有用性を示すことを主目的としたもので、 r, q (あるいは k) 値の定量化を目的としたものではない。これらの値を高い精度で定量化したり、解法の適用限界を定量的に明らかにする機会を次にゆずり、以上に示した実験および解析でほぼここの目的は達し得たものと考えたい。

7. ま と め

実際の汚濁解析を行なう場合、水流条件はじめ流況特性を十分考慮する必要があるが、従来汚濁解析に多用される拡散方程式あるいは分散方程式を用いる場合、解法上の制約から流況特性をきわめて総合的あるいは平均的にしか取り上げ得ないことが多い。本文はこれら解法上の制約が Fick の法則を基盤とする分散項の表示法にある点に注目し、この点をさらに近似化して流水断面率 r 、見かけ対流量 q を用いて解法を簡略化することを提言したものである。結局、流速分布がきわめて大きい流れで、水質変化があまり急激でない場合に限り式 (15) に特性曲線法を用いて比較的簡単に水質分散を解析しうることを示し得た。しかし、反面、図—7 にも示したように、水質変化が急激な場合、特にパルス状に短時間に变化する水質の分散に対しては本近似解法はあまり有用とはいえないことを明らかにした。また、流速分布があまりない流れの場合についても、本近似解法が既存の分散

方程式による解法よりすぐれているとはいえないことをも示した。しかし、実際の水系を解析対象とする場合、幅方向の流速分布、死水部、よどみ部の存在など、流水断面に大きな流速分布がある流れは少なくない。また、水質が時間単位で徐々に変化する場合が多い。したがって、実際の汚濁解析で本近似解法を活用しうる場合は決して少なくないものと考え、ここに解法の考え方やおよびその手順を具体的に報告した。ただ、新たに採択した r, q (あるいは式 (31) の k) 値としていかなる値をとればよいかについては今後の研究に待つ点が多く、当面、本文中にも示したように試行錯誤的に算定し、それらの集積によって定量化してゆく必要がある。また、式 (5) の有用性あるいは図—2のごとく流況を二層以上に区分することの有用性などについては、今後さらに検討すべき問題として残している。

最後に、本研究を進めるに当たり、京都大学工学部衛生工学教室 末石富太郎、合田健両教授より多大の助言を得、同 土木工学教室 岩佐義朗教授からも助言を得るとともに実験に便宜を計っていただいた。ここに感謝の意を表わす次第であります。また、6. 章 (1) における実験は主として同、衛生工学教室 和田安彦助手によって実施された。ここにも感謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) Taylor, G.I.: The Dispersion of Matter in Turbulent Flow Through a Pipe, Proceedings, Royal Society of London, Vol. 223 A, May, 1954
- 2) Elder, J.W.: The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent shear Flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5 Part 4, May, 1959
- 3) たとえば, Fischer, H.B.: Discussion of "Numerical Solution to a Dispersion Equation", Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of ASCE, HY 2, March, 1965
- 4) 住友 恒・末石富太郎: 短絡流による沈殿処理能力の弾力性について, 土木学会第 6 回衛生工学研究討論会講演論文集, 1970.1
- 5) 合田 健: 水質の変化とその予報に関する研究 (2), 土木学会第 6 回衛生工学研究討論会講演論文集, 1970.1
- 6) 末石富太郎・住友 恒・和田安彦: 河川における水質伝播に及ぼす流況特性の影響について, 土木学会第 26 回年次学術講演会講演集, 第 2 部, 昭和 46 年 10 月

(1972.3.18・受付)