

構造物における衝撃現象の数値解析

MATRIX METHODS IN ANALYSIS OF IMPACT PHENOMENA ON STRUCTURES

青 柳 史 郎*

By Shiro Aoyagi

1. ま え が き

構造物の振動問題の解法では、有限個の質点に質量が集中しているとみなして構造物をモデル化し、振動方程式をマトリックス形式で表現する方法が一般的である。またその解は多く振動モードを素解とする重ね合せで得られる。強制外力をうける構造物の非定常振動問題などもこの方法で解かれている。非定常解の厳密性についてはまだ十分には吟味されていないのが現状のようである。非定常振動の問題は、これを厳密に考察するとき応力波の伝播現象を伴ういわゆる初期値問題に帰着される。具体的には構造物の一点に衝撃力が作用する問題、構造物の境界が強制変位をうける問題、構造物が他の構造物に衝突する問題等において波動伝播現象がみられる。

先に報告した長大吊橋の地震応答に関する論文¹⁾においても、吊橋の境界が強制変位をうける場合の波動伝播現象を論じたが、長大吊橋では対象とする構造系が複雑であるため、解を直接的に検証することが困難であった。そこで本論文ではごく単純な構造系に例をとって、衝撃力をうける問題、構造物間の衝突の問題のマトリックス解を求め、解の信頼性を検証することとする。

すなわち、棒の縦衝撃問題およびはりの横衝撃問題を例にとる。これらの問題は従来偏微分方程式で表わされた波動方程式を解析的に解くという方法によってきた。特に棒の縦衝撃の解はよく知られており、実験的にも十分検証されている²⁾。はりの横衝撃については、せん断変形と断面の回転慣性とを無視した通常の Bernoulli-Euler のはり方程式をもとに小坪・原田³⁾も解を求めているが、せん断変形と回転慣性の無視のために波頭を持たない変則的な解となる。また別に、より厳密な Timoshenko のはり方程式から、はりを伝わる応力波の伝播

速度は有限で $C_0 = \sqrt{E/\rho}$, $C_s = C_0 \sqrt{\eta^* G/E}$ (ただし, E : ヤング率, G : せん断弾性係数, ρ : 密度, η^* : せん断変形に対する補正係数) の2種類があり^{4), 5)}, C_0 で伝わる成分は小さいということが知られている。衝撃点の近傍では無限長はりに対する Bernoulli-Euler のはり方程式の解も十分実験事実を説明し得ることがわかっているが、有限の範囲に境界条件が与えられる場合の解についてはまだ十分には吟味されていない。はりの横衝撃問題に関しては筆者も別の機会に論じたことがあり⁶⁾, ここにその概要を紹介する。特に無限長はりに半無限長の棒が衝突する問題について行なった解析の概要を述べる。また解析解を検証する意味で行なった実験結果の一部を紹介する。

次に衝撃問題をマトリックスを用いて代数的に解く方法について述べる。マトリックス解法では境界条件を処理した状態で問題を設定できるので、任意の構造系に同一方法を適用することが可能である。数値解析例は解析解の知られているものについて行ない、解を比較することによってマトリックス解法の妥当性を検討する。

上記2解法の中間の手法として、与えられた境界条件のもとで振動モードを解析的に無限級数の形で求め、その有限項の和で解を近似することが考えられる。この方法については小坪・原田³⁾も論じているが、ここで衝撃力をうける単純ばかりにこの解法を適用し、他の解法による解と比較してみる。またこの解法は構造物の衝突問題にも適用可能であるが、一般には解析的に振動モードを求めることが煩雑であるので適用しにくい。ただ棒と棒とが衝突する場合には振動モードも比較的容易に求まるので解を求めておく。

最後にマトリックス解法の応用例として、単純な門型ラーメンの一点に1自由度のばね質量系が衝突する問題を取上げる。これは、たとえば海洋構造物に船舶等の浮遊物が衝突する場合を想定したものであるが、衝突時に生じる衝撃力および応力伝播の問題を解く手がかりとな

* 正会員 工修 (株)長大橋設計センター

り得よう。

2. はりの横衝撃—解析解と実験⁶⁾

(1) 集中外力をうける無限長はり

はり断面の回軸慣性とせん断変形を無視するとき、はりの変位 y は次の Bernoulli-Euler の方程式に従う。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{r}{g} A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 E ：ヤング率、 I ：断面2次モーメント、 A ：断面積、 r ：単位体積重量、 g ：重力加速度。また p は分布荷重であるが、いま集中荷重をうける問題を考えているので

$$p=0 \dots\dots\dots(2)$$

とできる。境界条件ははりが無限に長いことから

$$x = \pm \infty : y = \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

また座標の原点 $x=0$ に衝撃力 P が作用するとして、次の連続条件式が成り立つ。

$$x=0 : \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\frac{P}{EI} \dots\dots\dots(4)$$

一方、初期条件は、はりが $t \leq 0$ で静止していたとして

$$t=0 : y = \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

式(1)を式(3),(4),(5)のもとで解けばよい。具体的にはラプラス変換を用いて解くことになるが、いまの場合ラプラスの逆変換が知られている⁷⁾ので解も比較的容易に求まる。ここに最終的な解のみを示すと次のごとくである。

$$y = \frac{g}{r A a} \int_0^t P(t-\tau) \left\{ \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \left(\sin \frac{x^2}{4a^2\tau} + \cos \frac{x^2}{4a^2\tau} \right) + \frac{|x|}{2a} \left[S \left(\frac{|x|}{a\sqrt{2\pi\tau}} \right) - C \left(\frac{|x|}{a\sqrt{2\pi\tau}} \right) \right] \right\} d\tau \dots\dots\dots(6)$$

ただし、

$$a = \sqrt{\frac{EIg}{rA}}, \quad S(x) = \int_0^x \frac{\sin(\frac{\pi}{2}t^2)}{\cos(\frac{\pi}{2}t^2)} dt : \text{フレネー関数}$$

また曲げモーメント M は式(6)を微分して得られる。

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t P(t-\tau) \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot \left(\sin \frac{x^2}{4a^2\tau} - \cos \frac{x^2}{4a^2\tau} \right) d\tau \dots\dots\dots(7)$$

特に衝撃点 $x=0$ における解は次式で表わせる。

$$x=0 : y=y_0 = \frac{g}{\sqrt{2\pi} r A a} \int_0^t P(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau \left. \begin{aligned} M=M_0 = \frac{a}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{P(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

衝撃力 P が具体的に与えられるとき、式(6)~(8)の

積分は実施できる。たとえば、衝撃力が δ 関数で与えられるとき、またその積分である H (スラップ) 関数で与えられるとき、解は次のごとくとなる。

$$P = P_t \delta(t) :$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{P_t g}{\rho A a} \left\{ \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \left(\sin \frac{x^2}{4a^2 t} + \cos \frac{x^2}{4a^2 t} \right) + \frac{|x|}{2a} \left[S \left(\frac{|x|}{a\sqrt{2\pi t}} \right) - C \left(\frac{|x|}{a\sqrt{2\pi t}} \right) \right] \right\} \\ M &= -\frac{a P_t}{2\sqrt{2\pi} t} \left(\sin \frac{x^2}{4a^2 t} - \cos \frac{x^2}{4a^2 t} \right) \\ y_0 &= \frac{g P_t}{r A a} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \\ M_0 &= \frac{a P_t}{2\sqrt{2\pi} t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

$$P = P_H H(t) :$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{2g P_H}{3r A a} t^{3/2} \left\{ \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} \right)^3 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{x^2}{4a^2 t} + 1 \right) \sin \frac{x^2}{4a^2 t} - \left(\frac{x^2}{4a^2 t} - 1 \right) \cos \frac{x^2}{4a^2 t} \right] - \frac{|x|}{2a\sqrt{t}} \left[\left(\frac{x^2}{4a^2 t} - \frac{3}{2} \right) S \left(\frac{|x|}{a\sqrt{2\pi t}} \right) + \left(\frac{x^2}{4a^2 t} + \frac{3}{2} \right) C \left(\frac{|x|}{a\sqrt{2\pi t}} \right) \right] \right\} \\ M &= P_H \left\{ a\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \left(\cos \frac{x^2}{4a^2 t} - \sin \frac{x^2}{4a^2 t} \right) - \frac{|x|}{2} \left[1 - S \left(\frac{|x|}{a\sqrt{2\pi t}} \right) - C \left(\frac{|x|}{a\sqrt{2\pi t}} \right) \right] \right\} \\ y_0 &= \frac{g P_H}{3r A a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{3/2} \\ M_0 &= a P_H \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここに得られた解は波頭を持たない点で波動伝播現象を十分には説明していない。また $|x| \rightarrow \infty$ として解が0に収れんしないので境界条件式(3)を満足していない。これは式(1)がせん断剛性を無限大として導かれているために、衝撃力の一部が瞬間的に無限遠方にまで伝達されてしまい、それが無限遠方に変位を生じせしめたものと解釈される。すなわち、問題の設定が厳密に正しくはなく、Bernoulli-Euler の方程式も厳密には波動方程式ではないといえる。しかし、ここに得られた解も座標 x に対して時間 t が比較的大きい範囲ではりの運動をよく表わしているとみなせる⁵⁾。

(2) 半無限長棒による無限長はりの横衝撃

棒の縦衝撃の理論によれば、初速度 v_0 で運動している均一断面半無限長棒の端に衝撃力 P が作用するとき、端の変位 u_0 は次式で与えられる。

$$u_0 = v_0 t - \frac{g}{r A r C_r} \int_0^t P(\tau) d\tau \dots\dots\dots(11)$$

ただし、 r_r ：棒単位体積重量、 A_r ：棒断面積、 $C_r = \sqrt{E_r g / r_r}$ ：棒を伝わる波動の伝播速度、 E_r ：棒のヤング率。なお、棒中の波動は分散性を持たないので、端を原点とする座標 x での変位 u および軸力 N は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u=N=0 \quad 0 \leq t \leq \frac{x}{C_r} \\ u(t, x) = u_0 \left(t - \frac{x}{C_r} \right) \\ N(t, x) = P \left(t - \frac{x}{C_r} \right) \end{aligned} \right\} \frac{x}{C_r} < t \quad \dots\dots(12)$$

もし棒が有限で境界条件が与えられている場合、また断面変化点をもつ場合、そこでの条件を満足するような反射波が生じる。そのとき解は進行波と後退波との和で表わされる。

衝撃点 P が棒とはりとの衝突によって生じる場合を考えると、 P は衝撃点でのはりの変位式 (8) と棒の変位式 (11) とを等置して求まる。ここでは両式のラプラス変換を等置するとして次式が得られる。

$$\frac{v_0}{s^2} - \frac{g}{r_r A_r C_r} \frac{\bar{P}}{s} = \frac{g}{2\sqrt{2} A a} \frac{\bar{P}}{s\sqrt{s}} \quad \therefore \bar{P} = \frac{v_0}{C_r} \frac{E_r A_r}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \beta)} \quad \dots\dots(13)$$

ただし、

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{r_r A_r C_r}{\tau A a}$$

また s はラプラスの演算子であり \bar{P} は P のラプラス変換を意味する。式 (13) の逆変換によって衝撃力 P は求まる。またこれを式 (6)~(8) に代入して解が決定される。ここでは衝撃力と衝撃点 $x=0$ での解だけを示しておく。

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{v_0}{C_r} E_r A_r e^{\beta^2 t} E_{rfc}(\beta\sqrt{t}) \\ x=0 : y_0 &= v_0 \left\{ t - \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{1}{\beta^2} [1 - e^{\beta^2 t} E_{rfc}(\beta\sqrt{t})] \right\} \\ M_0 &= v_0 \frac{\tau A a^2}{g} [1 - e^{\beta^2 t} E_{rfc}(\beta\sqrt{t})] \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

ただし、 $E_{rfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ ：ガウスの余誤差関数。

式 (14) から、衝撃力 P は初期値 ($v_0 E_r A_r / C_r$) すなわち棒が剛体に衝突するときの衝撃力ととり、時間とともに 0 にまで単調減少することがわかる。また衝撃点の曲げモーメント M_0 ははりの定数からだけできる値に収れんする単調増加関数である。収れんの速度ははりと棒との剛比を意味する β に依存している。

なお式 (14) は衝撃点に局部変形を生じないという仮定のもとで得られた解である。現実の衝撃現象では接触

点に局部変形が認められるので、これを考慮することによって解は改善される。たとえば、棒の先端に曲率半径 r があるとして Hertz の弾性接触理論を適用すると、衝撃点での棒とはりとの相対変位 Δu と衝撃力 P との間に次式が成り立つ。

$$\Delta u = \left(\frac{P}{k} \right)^{2/3} \quad \dots\dots(15)$$

$$k = \frac{2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{r}$$

ただし $E = E_r$ とした。 ν はポアソン比である。このとき衝撃力 P は次の積分方程式を解いて得られる。

$$\left(\frac{P}{k} \right)^{2/3} = v_0 t - \frac{g}{r_r A_r C_r} \int_0^t P(\tau) d\tau - \frac{g}{\sqrt{2\pi} \tau A a} \int_0^t P(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau \quad \dots\dots(16)$$

式 (16) およびその解を用いる式 (6)~(8) の解は数値積分によって求まる。

(3) 実験との比較

実験は次の条件のもとで行なった。

- 衝撃速度： $v_0 = 150$ cm
- はり寸法： 1.6 cm \times 1.6 cm \times 200 cm (材質 SS 41, 両端自由)
- 棒寸法： 0.635 cm ϕ \times 100 cm (材質 SS 41)

また計算には次の数値を用いた。

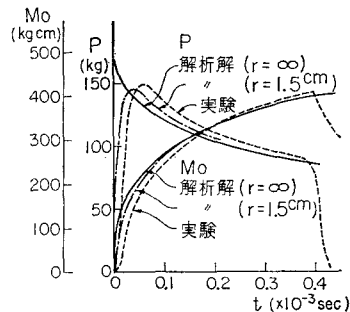
- ヤング率： $E = E_r = 2.1 \times 10^6$ kg/cm²
- 単位体積重量： $r = r_r = 7.85 \times 10^{-3}$ kg/cm³
- 重力加速度： $g = 980$ cm/sec²

接触変形を考慮する式 (16) の計算では次の数値も用いた。

- ポアソン比： $\nu = 0.3$
- 積分間隔： $\Delta t = 0.01$ m/sec
- 曲率半径： $r = 1.5$ cm

なお、曲率半径 $r = 1.5$ cm は実験に用いた棒先端の仕上げ寸法である。

図一に計算の結果と実験結果との比較を示す。解析解はよく実験結果に一致している。ただ曲率半径 $r = 1.5$



図一 はりと棒の衝突 (実験との比較)

cm としても実験結果は約 0.015 m/sec の遅れを示している。この遅れを $v_0=150$ cm/sec として移動量に直すとして約 2×10^{-3} cm となる。この移動量はほぼ供試体の表面あらさ ($\nabla\nabla$) のオーダーである。また解析解は実験値に比べてやや低目に得られているが、これは理論の不備によるものとするより、実験精度、特に衝撃速度の測定精度にその原因があったと考えられる。

なお、実験結果は $t=0.4$ m/sec 付近で P, M_0 ともに急速に減少しているが、これは長さ 100 cm の棒の自由端からの反射波が衝撃点にまで到着したことを意味するもので、その直後にはりと棒とは接触を終る。棒中での縦波の伝播速度は $C_r=5.1 \times 10^5$ cm/sec であり、100 cm の棒を 1 往復するのに約 0.39 m/sec を要する。解析解には反射波の影響が考慮されていないので、その後の現象は比較の対象とならない。

3. 構造物の衝撃—マトリックス解

(1) 衝撃力を受ける場合

記述を容易にするために平面骨組構造物に例をとって論ずることとする。

外力 p をうける構造物の運動方程式は減衰項を無視して次式で表わされる。

$$M\ddot{x} + Kx = p \dots\dots\dots(17)$$

ただし M : 質量マトリックス, K : 剛性マトリックス, x : 変位ベクトル, また \dot{x} は x の時間に関する 2 階微分を意味する。

今かりに点 j に衝撃力 P_j が作用するとすれば P_j を X, Y の 2 座標成分に分けて p は次の内容となる。

$$p = (00\dots0 P_{jX} P_{jY} 0\dots00)^T \dots\dots\dots(18)$$

ただし、右肩の T は転置することを意味する。

式 (17) の解を固有モード系に変換して求める。すなわち、

$$x = \Phi y \dots\dots\dots(19)$$

とおく。ただし、固有モード Φ に関して次の関係式が成り立つとする。

$$\left. \begin{aligned} \Phi^T M \Phi &= E \\ \Phi^T K \Phi &= \Omega^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

E : 単位マトリックス, Ω : 固有円振動数 ω_i を対角要素とする対角マトリックス。

構造物の境界条件はすでに式 (17) に考慮されているので、初期条件のみを次式でおく。

$$t=0: x = \dot{x} = 0 \dots\dots\dots(21)$$

式 (21) のもとの式 (17) の解、すなわち式 (19) の一般化座標 y はよく知られており、 i 次成分 y_i について次式となる。

$$y_i = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t [\phi_{jiX} P_{jX}(\tau) + \phi_{jiY} P_{jY}(\tau)] \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \dots\dots\dots(22)$$

ただし、 ϕ_{jiX} : Φ の i 次モードに対応する個有ベクトルの点 j の X 方向成分, ϕ_{jiY} : 同じく Y 方向成分。

特に衝撃力 P_j が δ 関数または H 関数で与えられるとき、式 (22) は次式となる。

$$P_j = P_j \delta(t): y_i = \frac{P_j}{\omega_i} \sin \omega_i t \dots\dots\dots(23)$$

$$p_i = \phi_{jiX} P_{jX} + \phi_{jiY} P_{jY}$$

$$P_j = P_H H(t): y_i = \frac{P_j}{\omega_i^2} (1 - \cos \omega_i t) \dots\dots\dots(24)$$

$$p_i = \phi_{jiX} P_{jX} + \phi_{jiY} P_{jY}$$

式 (22) または式 (23), (24) を式 (19) に代入して解は決定される。また応力その他の任意着目量 q についても

$$q = Qx \dots\dots\dots(25)$$

で表わされるマトリックス Q が求まっていれば、その解も式 (19) から得られる。

$$q = Q \Phi y = \Phi_q y \dots\dots\dots(26)$$

ただし $\Phi_q = Q \Phi$, この Φ_q も一種の振動モードである。

(2) 構造物が衝突する場合

いま構造系 I に構造系 II が初速度 v_0 で衝突する問題を考える。衝突した瞬間 $t=0$ において構造系 I と II とは合わさって一つの構造系を構成するので、その状態で式 (17) の運動方程式を得ることができる。式 (17) の各項は構造系 I と II とを含み、また構造系 II は絶対座標 X, Y および回転方向 θ の各成分をもつ。すなわち、次の表示が許される。

$$M = \begin{bmatrix} M_I &amp & 0 \\ & M_{II X} & \\ 0 & & M_{II Y} \\ & & & M_{II \theta} \end{bmatrix}, x = (x_I \ x_{II X} \ x_{II Y} \ x_{II \theta})^T \dots\dots\dots(27)$$

剛性マトリックス K も式 (27) に準ずる配列をとるとする。また式 (17) の外力 p については

$$p = 0 \dots\dots\dots(28)$$

としてよい。一方、初期条件は $t=0$ において構造系 I が静止しており、構造系 II が初速度 $v_0(v_{0X}, v_{0Y})$ をもつことから次式となる。

$$\left. \begin{aligned} t=0: x &= 0 \\ \dot{x}_I &= 0, \dot{x}_{II X} = v_{0X} e, \dot{x}_{II Y} = v_{0Y} e, \dot{x}_{II \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

ただし、 e : 単位ベクトル, また構造系 II は回転運動の成分を持っていないとした。

式 (17) に式 (19) を代入し、式 (28), (29) を考慮するとき、次のラプラス変換式が得られる。

$$s^2 M \Phi \bar{y} + K \Phi \bar{y} = M \dot{x}_{t=0} = M \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 x e \\ v_0 y e \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (30)$$

ただし、 $\bar{y} : y$ のラプラス変換、 s : ラプラス演算子。式 (20) の直交性を利用して式 (30) を変形すると次式となる。

$$[s^2 E + \Omega^2] \bar{y} = r \dots (31)$$

$$r = \Phi^T M \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 x e \\ v_0 y e \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ここに定義した r は刺激関数のベクトルである。式 (31) は各次モードの項に分離されており、 i 次モードについて r の成分を r_i として次式で書ける。

$$\bar{y}_i = \frac{r_i}{s^2 + \omega_i^2} \dots (32)$$

これを逆変換して一般化座標 y_i が決定される。

$$y_i = \frac{r_i}{\omega_i} \sin \omega_i t \dots (33)$$

式 (22) を式 (33) と置換えることによって衝突時の解は得られたことになる。

ただし、構造物間の衝突では一般に接触圧が負にはなり得ない。したがって、衝撃点での圧縮力が負になる瞬間に衝突を終り、構造系 I と II は互いに独立に運動を行なう。もし構造系 II の運動量が衝突前とその符号を換えていれば、いったん衝突を終えて再び衝突することはないが、同符号であれば 2 度以上の衝突を繰り返すこともある。この場合の解も各構造系の運動を忠実に追跡することによって求めることが可能であるが、解析が煩雑になることは避けられない。

4. 構造物の衝撃一級数解

(1) はりの横衝撃

単純ばりに衝撃力が作用する問題を固有関数を用いて解く。単純ばりの中央に集中荷重が作用するとき、はり方程式として式 (1) がそのまま成り立つ。また荷重項 p も式 (2) でよいが、ここでは便宜上次式でおく。

$$p = P(t) \delta(x) \dots (34)$$

境界条件ははり長を l として次式で与えられる。

$$x = \pm \frac{l}{2} : y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \dots (35)$$

初期条件としては式 (5) がそのまま成り立つ。

固有円振動数および固有関数は $p=0$ として、式 (35) のもとで式 (1) を解いて得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{固有円振動数} \quad \omega_i &= \left(i \frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EIg}{\tau A}} \\ \text{固有関数} \quad \phi_i &= \sin \frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2} \right) \end{aligned} \right\} i=1, 2, 3, \dots, \infty \dots (36)$$

いま解が固有関数の重ね合せで表現できると仮定して次式をおく。

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i T_i \dots (37)$$

T_i は新しく導入した一般化座標である。式 (37) を式 (1) に代入し、式 (5) を考慮することによって T_i はきまる。

$$\left. \begin{aligned} T_i &= (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{2g}{\tau Al \omega_i} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i=1, 3, 5, \dots \\ i=2, 4, 6, \dots \end{array} \dots (38)$$

すなわち、逆対称モードに対応する偶数項の T_i は 0 である。式 (38) を式 (37) に代入して解はきまる。またこれを x で微分することによって曲げモーメント M も求まる。

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{2g}{\tau Al} \sum_{i=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{\phi_i}{\omega_i} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \\ M &= -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2EIg}{\tau Al} \sum_{i=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot \frac{\phi_i''}{\omega_i} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \\ \phi_i'' &= -\left(\frac{i\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

衝撃力 P が具体的に δ 関数または H 関数で与えられるとき式 (6)、(7) または式 (22) におけると同様にして式 (39) の積分を実施すればよい。

(2) 棒の衝突

はりと棒との衝突問題に対しても、マトリックス解法に準じてはりと棒とを一体とする構造系の固有関数を求めて解くことが可能であるが、解析が煩雑であるので、ここでは同じ均一断面をもつ棒同志が衝突する問題の級数解を求めることとする。

一端を固定された長さ l_1 の棒の自由端に長さ l_2 の棒が初速度 v_0 で衝突する問題を考える (図-2 参照)。いずれの棒も同じ断面積 A_r をもつとすれば接触時の運動方程式は

$$E_r A_r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P_r A_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots (40)$$

また境界条件および初期条件は次式で与えられる。

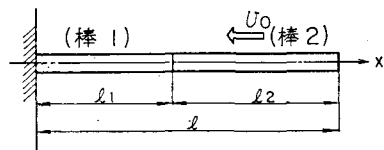


図-2

$$\left. \begin{aligned} x=0: u=0 \\ x=l: \frac{\partial u}{\partial x}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

$$\left. \begin{aligned} t=0: 0 \leq x \leq l_1: \frac{\partial u}{\partial t}=0 \\ l_1 \leq x \leq l: \frac{\partial u}{\partial t}=v_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

固有円振動数と固有関数は式 (41) のもとで式 (40) を解いて次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \text{固有円振動数 } \omega_i &= \left(i - \frac{1}{2}\right) \pi \frac{C_r}{l} \\ \text{固有関数 } \phi_i &= \sin \left(i - \frac{1}{2}\right) \pi \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} i=1, 2, 3, \dots, \infty \dots\dots\dots(43)$$

ただし、

$$C_r = \sqrt{\frac{E_r g}{\tau_r}}$$

問題の解を式 (43) の固有関数を素解とする無限級数で表わせるとして次式をおく。

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i T_i \dots\dots\dots(44)$$

式 (44) を式 (40) に代入し、式 (42) を考慮してラプラス変換すると次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\omega_i^2 + s^2) \sin \frac{\omega_i x}{C_r} \bar{T}_i = 0 \quad 0 \leq x \leq l_1 \dots\dots(45)$$

$$= -v_0 \quad l_1 < x \leq l$$

固有関数の直交性を利用して式 (45) を変形し、ラプラスの逆変換を行なうことによって一般化座標 T_i が得られる。

$$T_i = -\frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right) \pi} \frac{v_0}{\omega_i} \cos \frac{\omega_i l_1}{C_r} \sin \omega_i t \dots\dots(46)$$

式 (46) を式 (44) に代入して解は決定される。また軸力 N も解を x で微分して得られる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{2v_0}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2}\right) \omega_i} \cos \frac{\omega_i l_1}{C_r} \sin \frac{\omega_i x}{C_r} \cdot \left. \begin{aligned} &\cdot \sin \omega_i t \\ N &= -E_r A_r \frac{\partial u}{\partial x} = 2 E_r A_r \frac{v_0}{\pi C_r} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2}\right)} \cdot \left. \begin{aligned} &\cdot \cos \frac{\omega_i l_1}{C_r} \cos \frac{\omega_i x}{C_r} \sin \omega_i t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47) \end{aligned} \right\}$$

5. 数値計算、解の検証

(1) 衝撃力をうけるはりの解

はりの衝撃問題をマトリックス解法と級数解法とで解き解析解と比較する。解析解は無限長はりを対象とするが他の2解法は有限長はりを対象とする。はり長 $l=200$

cm とし、他の諸元は 2.(3) で用いた数値に同じとした。

はりの応答のうち曲げモーメントに着目して、図-3 に δ 関数荷重による応答を、図-4 に H 関数荷重による応答を比較した。なお、図はマトリックス解法で自由

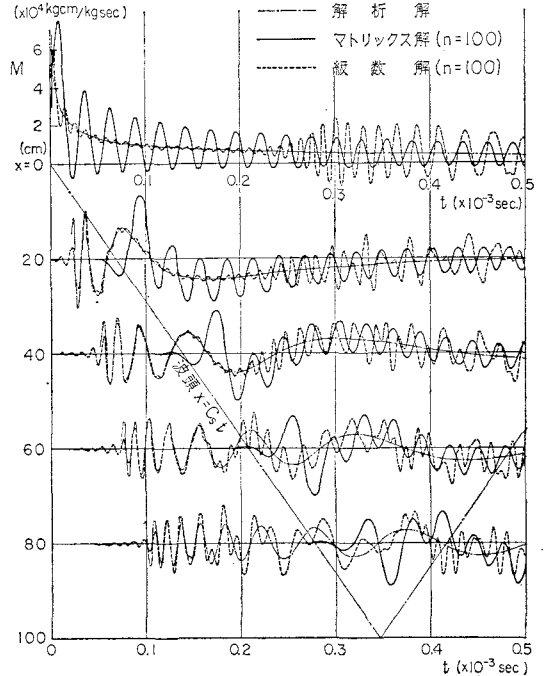


図-3 $P=P_i \delta(t)$ によるはりの曲げモーメント

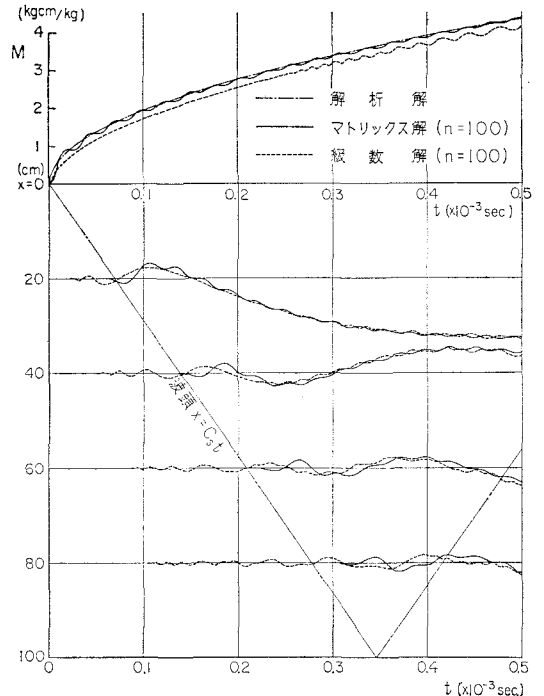


図-4 $P=P_i H(t)$ によるはりの曲げモーメント

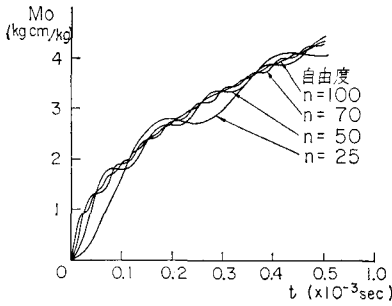


図-5 $P=P_H H(t)$ による衝撃点曲げモーメント (マトリックス解)

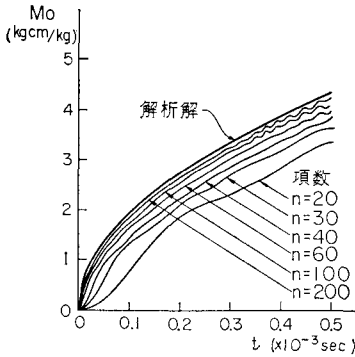


図-6 $P=P_H H(t)$ による衝撃点曲げモーメント (級数解)

度 $n=100$, また級数解で和をとる項数 $n=100$ とした場合の結果である。自由度 n が曲げモーメント応答に与える影響をみるために H 関数荷重に対する衝撃点曲げモーメントのマトリックス解を図-5に、また項数 n の影響をみるために同じく級数解を図-6に示した。

δ 関数荷重に対する解析解式 (9) が $x=0$ 以外の点で、衝撃の初期に無限に速く振動するが、図-3ではこの部分のプロットを省略した。級数解では、そこで振動が増幅されあたかも波動が伝播しているような現象を呈しているが、和をとる項数を増すとこの部分の振動は解析解に近づく。また級数解、マトリックス解では支点からの反射波の影響が加味されるはずである。式の上では各素波の振幅が変化する形で解が表現されているので反射波の考えは入ってこないが、素波の重ね合せで反射波の影響が現われる。図-3で $x=0, t=0.25$ m/sec 付近の級数解にみられる現象が反射波の影響とみなせる。この影響も項数を大きくとるとき早く出現する。

級数解について解の不安定性の原因を考察する。式 (36) の i 次円振動数 ω_i は (l/i) の長さをもつ単純ばりの1次円振動数に等しい。すなわち、高次項ではごく短いはりでも曲げ変形のみを生じると仮定したことになる。そのときの一般化座標 T_i が急速に0に取れんすれば、この仮定も大きな不合理とならない。 δ, H 関数荷

重による曲げモーメントの応答を求めると式 (39) から

$$P=\delta(t): M=-2\sqrt{\frac{EIg}{rA}} \frac{1}{l} \sum_{i=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot \sin \omega_i t \sin \frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)$$

$$P=H(t): M=-\frac{2l}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{1}{i^2} \cdot [\cos \omega_i t - 1] \sin \frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)$$

すなわち δ 関数荷重の場合、各項の振幅は同じである。このとき高次項の妥当性が問題となる。 H 関数荷重に対しては $(1/i^2)$ の存在によって解も比較的的良好であるが、波頭を説明し得ない点ではやはり不合理性が残る。

一方 Timoshenko のはり方程式は $\xi = \sqrt{A/I} x, \tau = \sqrt{A/I} C_0 t$ の変換のもとに

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} - \left(1 + \frac{C_0^2}{C_s^2}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \frac{C_0^2}{C_s^2} \frac{\partial^4 y}{\partial \tau^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0$$

と表わせるが、この式の定常解 $y = ae^{a\xi} \sin \omega t$ を ω が非常に大きいという仮定のもとに求めると最終的に次の形で得られる。

$$y = a_0 \{ \cos[\omega(\xi + \tau) + \theta_0] - \cos[\omega(\xi - \tau) + \theta_0] \}$$

$$+ a_s \left\{ \cos \left[\omega \left(\frac{C_0}{C_s} \xi + \tau \right) + \theta_s \right] - \cos \left[\omega \left(\frac{C_0}{C_s} \xi - \tau \right) + \theta_s \right] \right\}$$

$$\omega(\xi \pm \tau) = \sqrt{\frac{A}{I}} \omega(x \pm C_0 t),$$

$$\omega \left(\frac{C_0}{C_s} \xi \pm \tau \right) = \sqrt{\frac{A}{I}} \frac{C_0}{C_s} \omega(x \pm C_s t)$$

すなわち、定常波の伝播速度は C_0, C_s の2種類に収れんする。これらが ω に無関係なことから非定常波も無限には分散せず C_0, C_s の伝播速度をもつ波頭の存在が推定できる。

このように Timoshenko のはり方程式によれば高次モードが修正され、通常の1次元波動方程式との類推から安定した波動解が得られると考えられる。しかし、図-4にみられるごとく H 関数荷重に対する衝撃点近傍の解は Bernoulli-Euler の式によっても安定した妥当な解が得られる。 δ 関数荷重は仮想的に考えられた最も鋭利な荷重であり、現実の荷重はなんらかの時間的経過をたどる。荷重がある程度のタイムスケールをもてば Bernoulli-Euler の式に基づく解も正解とみなしてよい。

マトリックス解は、級数解が高次項を無視するという形での数学的近似解であるのに対して、質量が有限個の質量にのみ集中しているとみなす力学的近似のもとの解である。衝撃点にも有限の質量を与えているので、 δ 関数荷重が加えられるとき衝撃点には有限の加速度で運動をはじめ。一方、解析解では質量が分布しているといっているので衝撃点加速度は $t=0$ において無限大をと

る。また級数解では高次項を無限するために衝撃点加速度も有限にとどまっている。級数解では衝撃荷重がなす仕事の一部も無視することになる。このちがいが 図-5 と 図-6 とにおける傾向のちがいとして現われたものと考えられる。

(2) 棒の衝突問題の解

まず一端が固定された均一断面棒の自由端に同一諸元の棒が初速 $v_0=1$ cm/sec で衝突する問題の解を 3 種類の解法で求めた。計算に用いた諸元は次のとおりである。

- 棒 長： $l_1=l_2=100$ cm
- 棒断面積： $A=0.316$ cm² (0.635 cm^φ)
- ヤング率： $E=2.1 \times 10^6$ kg/cm²
- 単位体積重量： $\gamma=7.85 \times 10^{-3}$ kg/cm³

マトリックス解法では自由度 $n=40$ (棒 1 および棒 2 でそれぞれ 20 自由度)、級数解法では和をとる項数 $n=40$ として計算し、解析解とあわせて軸力分布を 図-7 に示した。

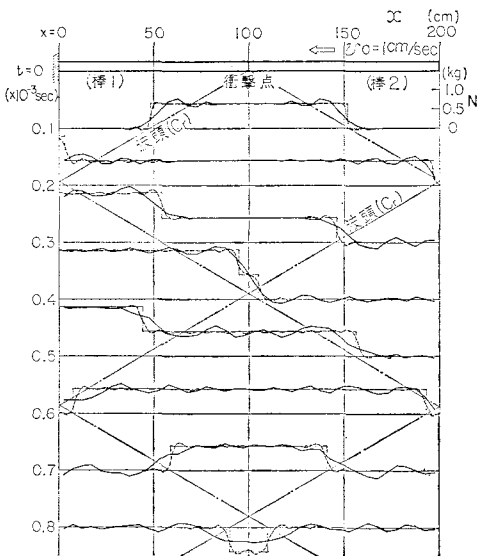
この問題の解析解はよく知られている。軸力は衝撃点から矩形波の形で伝播速度 $C_r = \sqrt{Eg/\gamma} = 5.12 \times 10^3$ cm/sec をもって伝播する。その大きさは $N = \frac{1}{2} v_0 A \sqrt{E\gamma/g} = 0.640$ kg である。自由端では軸力が 0 となるために必要な反射波が発生し、固定端では変位 0 となるための反射波が発生する。その結果、波頭が $l=l_1+l_2$ の距離を 1 往復した後衝撃点の軸力は張力となる。衝撃点で張力に耐えられないとき接触を終り、棒 2 は同一速度 v_0 で逆

方向に飛び去る。図-7 には衝撃点から出発する波頭の位置を縦軸を時間軸とみなして示しておいた。

図-7 からみてマトリックス解、級数解ともに波頭付近をのぞいてよく解析解を近似していることがわかる。マトリックス解と級数解とでは同じ n に対して級数解の方が近似度はよいようである。いずれの解法でも n を大きくすることによって解の精度はよくなる。なお、マトリックス解では格間で軸力は一定値をとり、軸力分布は階段状に得られるが、図では便宜的に格間中央の値を直線で結んで示した。

この計算結果から、運動方程式が正しく得られていればマトリックス解法によっても構造物の衝突問題を十分正しく解くことが可能であるといえよう。

次にはりに棒が衝突する問題をマトリックス解法によって解き、その結果を 図-1 の解析解と比較した。解析解は無限長はりに半無限長棒が衝突する問題の解であるが、マトリックス解は実験条件にあわせてはりの長さを 200 cm、棒の長さを 100 cm とした。衝撃点でのはりの曲げモーメントと衝撃力との比較を 図-8 に示す。解



— 解析解
 - - - マトリックス解 (n=40)
 級数解 (n=40)
 図-7 棒の衝突による軸力

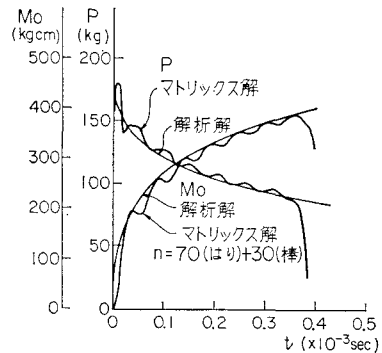


図-8 はりと棒との衝突 (2)

析解は 図-1 の接解変形を無視したときの解である。マトリックス解でははりのもつ自由度を 70、棒のもつ自由度を 30 とした。マトリックス解は高次の振動成分を残しながら解析解を近似している。この振動成分は 70 自由度としたはりの最高次振動モードの周期をもっている。すなわち、計算精度ははりの自由度に支配されており、棒の自由度は比較的少なくとってよいといえる。なお、マトリックス解の衝撃力 P および衝撃点曲げモーメントはともに $t=0.4$ m/sec 付近で急減しているが、この現象は棒の自由端からの反射波の影響が現われたもので、図-1 の実験結果にもみられる妥当な計算結果である。

6. 門型ラーメンにおける衝突問題

構造物の衝撃問題におけるマトリックス解法の応用例

として、ここでは単純な門型ラーメンの水平材に1自由度の緩衝機能をもった質点が衝突する問題を取上げる。構造系の力学モデルを図-9に示す。2本の柱には直径8m、高さ45mの鉄筋コンクリート柱を想定し、そこにおおの8質点をおいた。また水平材は5m×10mの矩形断面をもつ鉄筋コンクリート材とした。水平材には7質点を取り、柱基部および衝撃点を加えて合計26格点の構造系を対象とした。衝突する質点の重量は $W=1000t$ 、緩衝ばね $K=10^4 t/m$ と考えた。現実の問題では衝突物も多自由度系とみなさなければならない場合が多いが、ここでは簡単のために1自由度に限定したものである。各格点に図-9に示す番号を付けておく。

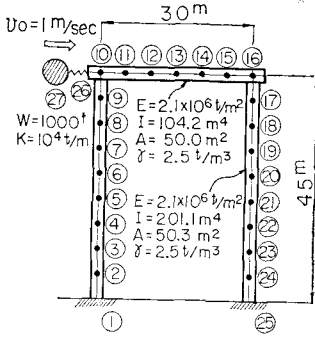


図-9 門型ラーメンのモデル

質点27が初速 $v_0=1\text{ m/sec}$ で衝突するとき生じる衝撃力 P を図-10に示す。衝撃力 P は格間10~27の軸力として得られる。この衝撃力は格間10~11の軸力、格間9~10のせん断力および格点10の質量がもつ慣性力とつり合うが、図にはそれぞれの内訳をも示して

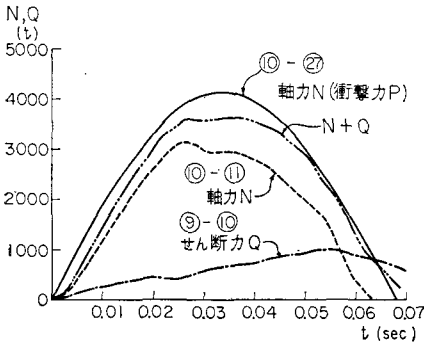


図-10 衝撃力

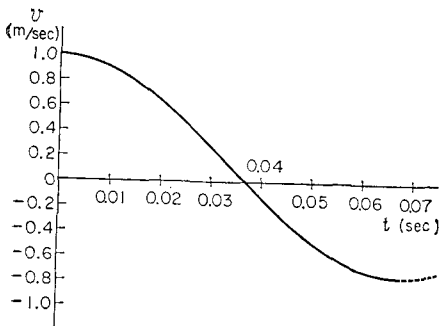


図-11 質点27の速度

おいた。衝撃力 P と $N+Q$ との差が格点10の慣性力である。図からみて衝撃力 P の大半は水平材の軸力としてまず伝えられることがわかる。

衝撃力 P が負になる瞬間に衝突を終るが、その間の質点27の速度の変化を図-11に示す。衝突を終るとき質点は $v=-0.75\text{ m/sec}$ の速度を持つ。このことから対象とした構造系は反発係数約0.75の構造系といえることができる。

衝突後の門型ラーメンの挙動は、ここに得られた衝撃力 P を既知として、あらためてラーメンの応答計算を行なうことによって知ることができる。また衝突の間の応力波をみるとたとえば図-12, 13のごとくである。

図-12は水平材における軸力の伝播現象を示したものであり、また図-13は左の柱の曲げモーメント波の伝播現象を示したものである。これらの図から衝突の初期に生じる各部の応力を知ることができる。衝突後の比

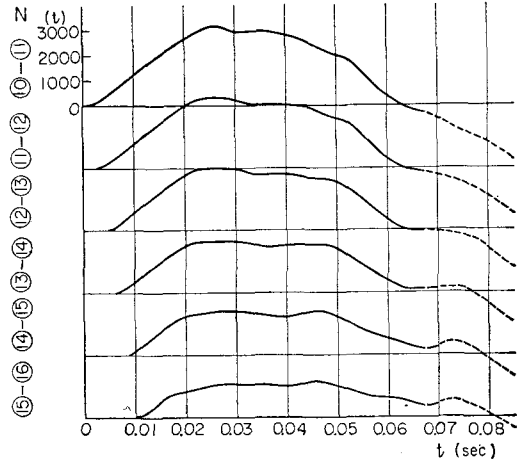


図-12 水平材の格間軸力

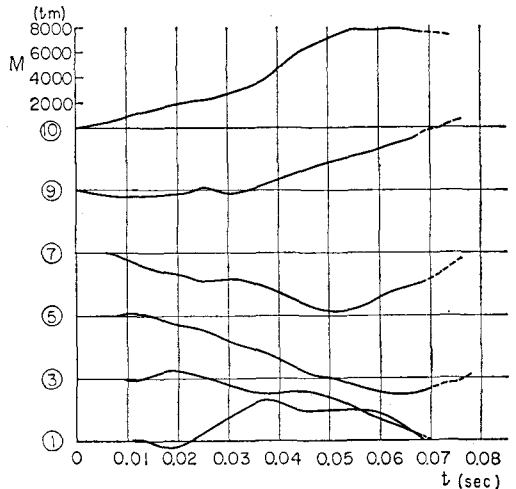


図-13 柱の格点曲げモーメント

較的長いタイムスケールでの応答計算の結果とあわせて衝突荷重に対する設計応力とすることができよう。

これまでの計算では減衰効果の影響を無視してきたが、衝突の間における減衰の影響は一般に小さいと考えてよい。もちろんマトリックス解析では通常の振動解析におけると同様、減衰項を考慮して解を求めることも可能である。

7. あとがき

はりの横衝撃問題および棒の縦衝撃問題に例をとり、その解析解との対比のもとにマトリックス解析によって解を求める方法を導き数値計算を行なった。また解析的解法とマトリックス解法との中間的解法として、構造系の固有関数を無限級数の形で求め、その有限項の和で解を近似する方法についても述べた。

はりの横衝撃問題では、その運動方程式がはり断面の回転慣性とせん断変形とを無視しているために波動の伝播現象を厳密には評価できず、そのマトリックス解も問題によっては妥当な解とならない場合もある。しかし、棒の縦衝撃問題ではマトリックス解析によって十分正しい解が得られることがわかった。このことから運動方程式が正しく得られていれば、マトリックス解析によって構造物に衝撃荷重が作用する問題、また構造物間の衝突の問題も正しく解けるとみてよい。ただし、運動方程式を導くに当たっては問題のタイムスケールに応じて十分の自由度を設定する必要がある。

マトリックス解法の応用例として門型ラーメンに1自由度の質点が衝突する問題を取上げ、そこに発生する衝撃力および応力波の伝播現象をみたが、この解法は衝突荷重に対する設計応力を求める方法として役立つであろうと考えられる。通常の衝突現象では衝撃点が引張り力に耐えられないので、引張りとなる瞬間に衝突を終り、そ

の後2個の独立した構造系となる。衝突後の現象は衝撃力を既知として改めて応答計算を行なうことによって知ることができる。

本論文で対象とした構造系はごく単純な骨組構造であったが、FEMで剛性マトリックスを導けば地中や板での波動伝播現象も解析できる。ただ線形の衝撃問題に限られる。非線形問題には別のアプローチが必要であろう。特に塑性波を生じる問題のマトリックス解法が今後の重要な課題として残されているのではなかろうか。

なお、本研究の一部は筆者が三井造船(株)在職中に実施したものである。ここに発表を許された会社に対して、また懇切なご指導と種々の貴重な助言をいただいた東京大学工学部伊藤学教授に深甚の謝意を表する。

参考文献

- 1) 青柳史郎：地震動の位相差を考慮した長大吊橋の地震応答について，土木学会論文報告集，第190号，1971年6月。
- 2) たとえば，Goldsmith, W. : Impact (Book), Edword Arnold (Publishers) LTD. London, 1960.
- 3) 小坪清真・原田譲二：各支点で異なる地震波をうける橋梁の応答解析，土木学会論文報告集，第175号，1970年3月。
- 4) Goland, M., P.D. Wickersham, M.A. Dengler : Propagation of Elastic Impact in Beams in Bending, J. Appl. Mech. 22 (1955).
- 5) Flügge, W., E.E. Zajac : Bending Impact Waves in Beams, Ingenieur-Archiv, XXVIII, Band 1959.
- 6) 山下庄吾・青柳史郎：梁の横衝撃に関する実験的研究，機械学会前刷集 No. 117, 1964年10月。
山下庄吾・青柳史郎：無限長梁の横衝撃，機械学会前刷集 No. 129, 1965年4月。
佐伯庄吾・青柳史郎：無限長梁の横衝撃一統報，機械学会前刷集 No. 148, 1966年4月。
青柳史郎：はりの横衝撃，三井造船技報第56号，1966年10月。
- 7) Prager, W. : Über die Verwendung Symbolischer Methoden in der Mechanik, Ingenieur-Archiv IV, 1933.

(1972. 5. 30・受付)