

圧縮を受ける長方形鋼板の終局強度

ULTIMATE STRENGTH OF RECTANGULAR STEEL PLATES
IN EDGE COMPRESSION

岡村 宏一*・吉田 公憲**

By Hirokazu Okamura and Kiminori Yoshida

1. ま え が き

周辺を支持され、かつ、一つの対辺で圧縮を受ける長方形鋼板は、板厚、あるいは、降伏応力の強さなどによって崩壊の様相が異なる。特に、受圧幅に対し板厚の小さい場合は、弾性座屈後もなお耐荷力を保有することが、いわゆる後座屈現象として知られており、構造物の断面の大型化、薄肉化、あるいは、高張力鋼を使用する傾向の著しい昨今にあって、終局強度の判定について関心の持たれる問題となっている。ところで、この種の板については、ごく最近にいたるまで数多くの研究例が見られるが、理論解析の面からいえば、なお資料不足の感があり、解析手法上にも問題点が残されているように思われる。まず、それらのほとんどを占める弾性解析に基づく研究例では、計算の簡略化のために、変位関数として、弾性座屈時、またはそれに近い形のものを探り、さらに、正方形板の結果をもって最小荷重と見なすなどの方法を使ったものが多い。しかし、これらの仮定は、後座屈現象が顕著になるに従って実状と合わないものがあり、議論の範囲に限られる感がある。さらに、終局強度の判定に関して、板の塑性化開始の時点より崩壊機構の形成にいたる過程の追跡（弾塑性解析）が、目下のところ十分に行なわれておらず、したがって、降伏条件、ならびに終局状態を定義するための理論的根拠を欠くうらみがある。

一方、実験的研究もいくつか見られるが、それらの結果にはかなりのばらつきがあり、前述のような理論的データの不足もあって、その評価もまちまちなものがある。

本研究は、以上の見地にたつて、この種の板に関する広範囲の解析を行なったものである。以下にまず、既往

研究について略述し、あわせて本文の内容についてその概要を述べる。

さて、この種の問題に関する既往の研究例として、まず、弾性たわみ理論に基づく多くの解析例が見られる。しかし、それらは非線形解析における数値計算上の繁雑さを避けるために、変位関数に含まれる自由度の数を小さく押えている。たとえば、Th. von Kármán¹⁾、H.L. Cox²⁾、K. Marguerre³⁾、S. Timoshenko⁴⁾らは、たわみ関数として、弾性座屈時の1次の波形を用いており、したがって、それらの解析値は、弾性座屈直後で初期たわみの影響がなければ正しいものを与えるが、たわみが増大し、後座屈現象が顕著になる場合には、その変位の仮定は実際の形状からはずれてくるので、弾性座屈後のいわゆる有効剛性の減少する傾向を十分に評価できず、有効幅の値なども、一般に過大なものを与える結果になっている。たとえば、単純支持板を扱ったKármán、Timoshenkoらも、その解析値が実験値よりも大きくなることを認めている。次に、このような精度上の難点の改良を試みたものに、3~4項の級数解を用いたJ.M. Coan⁵⁾、N. Yamaki^{6),7)}、M. Stein⁸⁾らの研究があり、たわみに関して精度の向上が見られる⁶⁾。また、R.G. Dawson、A.C. Walkerらが最近発表した論文⁹⁾は、初期たわみの影響を主として論じているが、手法的には前述のものと同類である。しかしながら、これらの解析においても、応力の精度、ならびに、以下に述べるような終局強度の判定に関して、理論的に十分究明されたとはいいがたいものがある。

ところで、以上の解析例では、終局強度の決定条件として、周辺の応力が降伏応力に達した場合、あるいは、周辺のひずみがある一定値に達した場合などの一点塑性化の条件が与えられているが、この方法についても、板の塑性域が広がり、崩壊機構を形成するにいたる過程の解析（弾塑性解析）が厳密に行なわれて、はじめて理論的にその妥当性が立証できるといえよう。あわせて、降

* 正会員 大阪工業大学助教授 土木工学教室

** 正会員 東洋技研コンサルタント(株)研究室

伏条件として、膜応力のみを考慮した Tresca の条件などが用いられているが、たわみが増大した場合の崩壊機構を追跡するには曲げの影響も考慮されねばならない。また、これらの解析では、正方形板の解析によって、終局強度の最小値を与えているが、座屈の様相が弾性座屈のそれと異なる場合、あるいは、側辺における膜応力の拘束条件によっては理論的に不明確なものが含まれる。なお、Kármán らの導入した、板の崩壊時における板幅中央部分の荷重負担を無視する仮定も、板厚比、辺長比、ならびに降伏応力の大きさによってこの部分の荷重負担の割合に差異があるので一般性に欠けるうらみがある。

次に、崩壊の様相を忠実に評価できる弾塑性解析の例であるが、最近になって、変形、ならびにつり合い条件の充足に関して簡単な仮定を容認した A.T. Ractliffe の解析^{10),11)}、あるいは、変形を若干項の級数で仮定し、エネルギー法を適用した G. Smith, K.E. Moxham らの解析例^{10),11)}が見られる。しかし、それらも、与えたデータの範囲に限られ、また、解析値も、後座屈挙動の効果が大きくなるに従って実験値と合わなくなっており、精度上の問題点を残しているように思われる。

一方、単純支持板に関する実験的研究も現在までにくつがちなわられている。ただ、それらの結果には、かなりのばらつきがあり、板厚についても各実験によって扱われている範囲が異なる。J.D. Harrison, J.B. Dwight, A.T. Ractliffe, K.E. Moxham らの実験^{10),11)}は、厚い板から中間的な厚さのものを扱っており、吉識¹²⁾は、正方形より幅の広い範囲の比較的薄い板について実験し、辺長比が終局強度におよぼす影響を調べた。また、L. Schuman¹³⁾ らの行なった実験は、板の材料、幅厚比が多様であり、辺長比についても、吉識のものとは逆に正方形より幅の狭いところで広範囲にわたっているが、航空機構造に使用されるような非常に薄い板を用いており、材料の特性、実験値の双方ともばらつきが大きい。一方、前述のような理論的データの不足もあって、これらの実験値に対する評価も、目下のところまちまちなものがある。

さて、筆者はすでに、大たわみを伴う長方形鋼板、およびリブ付き板の、横荷重による弾塑性曲げ問題の 1 解法を発表した¹⁴⁾。この解法では、非線形のつり合い、ならびに適合条件式の取扱いに関して、大たわみ、および塑性変形に対応する物理量は、板内点を囲む比較的小さい有限領域で平均値を持つもののみとし、変形、応力を十分な精度を持つ連続解で与えた。精度については、若干の例題で、弾性大たわみの解析、塑性解析、実験などの既往のデータとの比較、解析全般にわたる解の収束性の検討など、多面的な照査を行なって良好な結果を得て

いる。

ところで、この解法は、選点法を併用しており、板の境界条件、あるいはリブとの連続条件などにも適応性を持っている。本文は、この解法を、板の弾塑性座屈の問題にも一貫して応用することを目的に行なっている研究の一つの基本的な成果を提示するもので、長方形板の耐荷力に関する基本的な問題である一対辺に圧縮を受ける単一板の場合について論じたものである。

さて、本文の解析では、板厚比、辺長比、降伏応力、初期たわみ、側辺の拘束条件などをさまざまに変化させて広範囲のデータを示した。特に、弾塑性域から崩壊にいたる過程を詳細に追跡し、崩壊機構を明らかにすると同時に、終局強度の判定に関して理論的な根拠を与えた。また、このようにして定めた終局強度の値を、広範囲にわたって既往の実験値と比較し、その有用性を確かめた。なお、この事実に基づき、この種の板の終局強度に関し従来提案されている諸公式の適用性について吟味し、かつ、それらを整理するとともに、一つの理論式を提案した。

2. 解 法

1. で述べたように、本文の解法は、前論文¹⁴⁾で提示した解法を弾塑性座屈の問題の解析にも適応させたものである。したがって、紙数の都合もあり、この問題に特有な部分の記述を主体とし、共通部分については要点のみを記述する。

(1) 基本的仮定

- 板は弾完全塑性体とし、応力とひずみの関係は、Plandtle-Reuss の方程式に支配されるものとする。
- 板の断面に対し、平面保持の仮定を容認し、その塑性化は fully plastic を意味するものとする。
- 曲げと膜作用の共存する板内の塑性化した点の降伏曲面として、曲げ、および膜作用の各 response を分離する近似降伏曲面を採用する。

(2) 板の基礎式

図-1 に板の座標系、および辺長を示し、ここで圧縮を受ける対辺を、 $x=0$, $x=a$ の 2 辺とする。一方、板のたわみを w 、初期たわみを w_0 、曲げモーメント、および軸力の分値を M_x , M_y , M_{xy} , N_x , N_y , N_{xy} で表わすとき、板は次の基礎式に支配される。

$$\Delta \Delta w = \frac{h}{D} \Pi(x, y) - \frac{4}{h} \sum_L \{ \psi(x, y) \}_L \dots \dots \dots (1)$$

注：その後、文献 14) の照査を追加する意味で、全面等分布荷重を受ける正方形薄板の弾塑性曲げに関する実験を行ない、同様に好結果を得た¹⁵⁾。

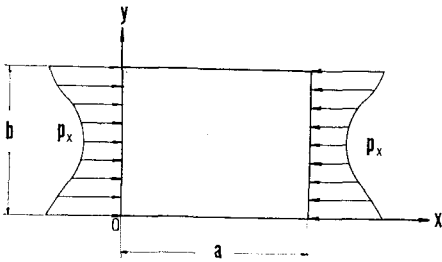


図-1 板の座標および圧縮力の分布

$$\Delta\phi = E[A_{(x,y)} - \sum \frac{\Gamma_{(x,y)}}{L}] \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 D ：板の曲げ剛度 $= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 、 E ：弾性係数、 ν ：ポアソン比、 h ：板厚である。なお、 ϕ は応力関数で、

$$N_x = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, N_y = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (3)$$

さらに、式中、 $\Pi_{(x,y)}$ 、 $A_{(x,y)}$ は面内力に関する非線形関数で、

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{(x,y)} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial y^2} \\ A_{(x,y)} &= \left\{ \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

また、 $\psi_{(x,y)}$ 、 $\Gamma_{(x,y)}$ は荷重段階 (L) に対応し、塑性変形に従属する非線形関数で、

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(x,y)} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu' x') \\ &\quad + 6(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu m_{xy}) \\ \Gamma_{(x,y)} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu \omega) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu' \omega') \\ &\quad - 6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu n_{xy}) \\ \chi &= (2-\nu)m_x - (1-2\nu)m_y, \\ \chi' &= (2-\nu)m_y - (1-2\nu)m_x, \\ \omega &= 2n_x - n_y, \omega' = 2n_y - n_x \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

ここで、 $m_x = M_x/M_p$ 、 $m_y = M_y/M_p$ 、 $m_{xy} = M_{xy}/M_p$ 、 $n_x = N_x/N_p$ 、 $n_y = N_y/N_p$ 、 $n_{xy} = N_{xy}/N_p$ 、 $M_p = \frac{1}{4} \sigma_p h^2$ 、 $N_p = \sigma_p h$ 、 σ_p ：降伏応力、なお、 μ は塑性変形中変化するスカラー量である。

ところで、式 (5) の $\psi_{(x,y)}$ 、 $\Gamma_{(x,y)}$ は、(1) の仮定 c) を用い、塑性ポテンシャル f に関連して、次の近似降伏面を採用することにより得られるものである¹⁹⁾。

$$f_{(m,n)} = f_m + f_n = 1 \quad]$$

$$\left. \begin{aligned} f_m &= m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3 m_{xy}^2 \\ f_n &= n_x^2 + n_y^2 - n_x n_y + 3 n_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

(3) 境界条件

本文中扱う長方形板は、図-1を参照して、 x 方向の対辺に強度 p_x の圧縮力を受け、曲げに対して単純支持、シャイベ作用については、周辺のせん断力による拘束がなく、 y 方向の対辺に直角な方向の拘束条件が異なる2種類のものである。すなわち、

Case 1:

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0, x=a} &= (w)_{y=0, y=b} = 0 \\ (u)_{x=0, x=a} &= \text{一定} \\ (M_x, N_{xy})_{x=0, x=a} &= 0 \\ (M_y, N_{xy}, N_y)_{y=0, y=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

Case 2:

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0, x=a} &= (w)_{y=0, y=b} = 0 \\ (u)_{x=0, x=a} &= \text{一定} \\ (v)_{y=0, y=b} &= 0 \\ (M_x, N_{xy})_{x=0, x=a} &= 0 \\ (M_y, N_{xy})_{y=0, y=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 u 、 v はそれぞれ x 、 y 各方向の水平変位である。Case 1 は、荷重を受けない対辺 ($y=0$ 、 $y=b$) に直角な方向の変位を拘束しない場合であり、Case 2 はそれを拘束するものである。

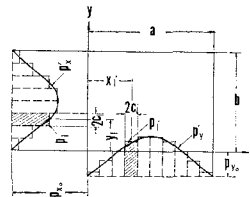


図-2 (a) 周辺調整力 p'_x 、 p'_y と、その分布の近似

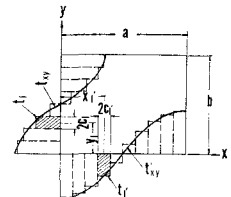


図-2 (b) 周辺調整力 t_{xy} 、 t'_{xy} と、その分布の近似

次に、解析の便宜上、図-1に示した圧縮力の分布 p_x 、および、Case 2 の対応する側辺の拘束力の分布 p_y を図-2 (a) に示すような力の組み合わせによって与える。ここで p'_x 、 p'_y は調整力としての意味を持ち、その分布は図のように周辺上に採った小さい区間 ($2C_l$ 、 $2C'_l$) では一定の平均値 p_l 、 p'_l を持つ近似分布を採る。さらに、周辺のせん断力 N_{xy} を消去するため、図-2 (b) に示すように分布を持つ強度 t_{xy} 、 t'_{xy} のせん断力を加える。これらも p'_x 、 p'_y の場合と同様の区間で一定の平均値 t_l 、 t'_l を与える。

(4) 板の解式

非線形方程式 (1)、(2) の解は、すでに前論文¹⁴⁾で述べた解法上の操作に基づき、高精度の連続解として得られる。ただ、ここでは、板の隅点が可動であること、な

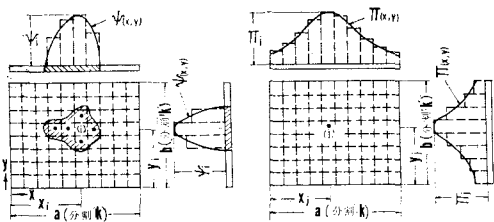


図-3 (a) 塑性域と塑性変形の従属関数 $\psi(x,y)$ の近似 ($\Gamma(x,y)$ も同様に近似される)

図-3 (b) 膜作用の従属関数 $\Pi(x,y)$ の近似 ($A(x,y)$ も同様に近似される)

らびに (2) で述べた調整力を加えられる解を見出すことが要点である。

まず、両式中の諸関数 w, Π, ψ, A, Γ ならびに ϕ の特解 ϕ_P をそれぞれ、下に示す形の Fourier 2重 sin 級数に展開する。

$$\sum_m \sum_n R_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

ただし、 $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ である。

ここで、図-3 (a), (b) を参照して、前論文¹⁴⁾と同様に、塑性化した i 点を囲む比較的小さい有限領域 (この場合、小さい長方形領域 i) において、塑性変形の従属関数 $\psi(x,y)$, $\Gamma(x,y)$ は、それぞれ平均値 ψ_i, Γ_i で表わされるとする。また、内点の、面内力による作用に従属する関数 $\Pi(x,y)$, $A(x,y)$ についても同様の近似分布を与える。

以上の操作により、式 (1), (2) より、前述の諸関数 w, Π, \dots, ϕ_P のそれぞれに対応する Fourier 係数 R_{mn} が定まり、 w, ϕ_P は連続解の形で得られる。

一方、シャイブ作用に関する境界条件を満たすために、応力関数の特解 ϕ_P に、式 (2) の同次方程式

$$\Delta \phi = 0 \dots\dots\dots (9)$$

の解を補足解として加える。すなわち、

$$\phi = \phi_P + \phi_{(p_{x_0})} + \phi_{(p_{y_0})} + \phi_{(p_x)} + \phi_{(p_y)} + \phi_{(t_{xy})} + \phi_{(t_{xy'})} \dots\dots\dots (10)$$

まず、 $\phi_{(p_{x_0})}, \phi_{(p_{y_0})}$ として x, y 各方向に一定の応力場を考え、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{(p_{x_0})} &= -\frac{p_{x_0}}{2} y^2 \\ \phi_{(p_{y_0})} &= -\frac{p_{y_0}}{2} x^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

次に、本文の場合、シャイブ応力の分布は正対称であることを考慮し、式 (9) の解として¹⁷⁾、

$$\begin{aligned} \phi_{(p_x')} &= \sum_n \{ (\sinh \beta_n x - \gamma_n \cosh \beta_n x) A_n \\ &\quad + (\beta_n x \sinh \beta_n x - \delta_n \beta_n x \cosh \beta_n x \\ &\quad - \kappa_n \cosh \beta_n x) C_n \} \sin \beta_n y \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\phi_{(p_y')} = \sum_m \{ (\sinh \alpha_m y - \tau_m \cosh \alpha_m y) A_m$$

$$+ (\alpha_m y \sinh \alpha_m y - \delta_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y - \kappa_m \cosh \alpha_m y) C_m \} \sin \alpha_m x \dots\dots\dots (13)$$

式中、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_n &= \coth \lambda n \pi + \operatorname{cosech} \lambda n \pi \\ \delta_n &= \coth \lambda n \pi - \operatorname{cosech} \lambda n \pi \\ \kappa_n &= \lambda n \pi \operatorname{cosech} \lambda n \pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $\lambda = a/b$ 、また、 $\gamma_m, \delta_m, \kappa_m$ は式 (14) において、 n を m に、 λ を λ^{-1} に入れ換えて得られる。

さて、式 (12), (13) に含まれる積分定数、 A_n, C_n, A_m, C_m は、以下に示す、 $y=0, x=0$ の各辺の条件から定まる。

$$\left. \begin{aligned} A_n, C_n : (\sigma_x)_{x=0} &= p_x' \\ (\sigma_y)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_m, C_m : (\sigma_x)_{y=0} &= 0 \\ (\sigma_y)_{y=0} &= p_y' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 p_x', p_y' に図-2 (a) に示す近似分布を与える。すなわち、式 (12), (13) は p_i, p_i' の多項式となる。

ところで、周辺のせん断力を消去するための補足解 $\phi_{(t_{xy})}, \phi_{(t_{xy'})}$ もそれぞれ、式 (12)、および式 (13) と同形に与えられる。この場合の各積分定数は次の条件から定まる。

$$\left. \begin{aligned} A_n, C_n : (\tau_{xy})_{x=0} &= t_{xy} \\ (\sigma_x)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} A_m, C_m : (\tau_{xy})_{y=0} &= t_{xy'} \\ (\sigma_y)_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $t_{xy}, t_{xy'}$ は図-2 (b) に示す近似分布を持ち、これらの補足解は t_i, t_i' の多項式として求まる。

結局、 w, ϕ の解は、次の形の連続解で得られる。

$$w = \frac{16}{\pi^2} \left\{ \frac{h}{D} \sum_j \Pi_j F_j - \frac{4}{h} \sum_i \sum_L (\psi_i)_L F_i \right\} \dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{16E}{\pi^2} \left\{ \sum_j A_j F_j - \sum_i \sum_L (\Gamma_i)_L F_i \right\} \\ &\quad + \frac{4}{\pi} \{ (1+\nu) (\sum_i p_i G_i + \sum_{i'} p_{i'} \bar{G}_{i'}) \} \\ &\quad + 2 \left(\sum_i t_i H_i + \sum_{i'} t_{i'} \bar{H}_{i'} \right) - \frac{1}{2} (p_{x_0} y^2 + p_{y_0} x^2) \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式中、

$$\left. \begin{aligned} F_j &= \sum_m \sum_n \{ mn (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^{-1} \sin \alpha_m x_j \sin \frac{m\pi}{2k} \cdot \\ &\quad \cdot \sin \beta_n y_j \sin \frac{n\pi}{2k'} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \} \\ G_l &= \sum_n \frac{1}{n \beta_n^2} \left\{ \xi_n(x) - \frac{2}{1+\nu} \eta_n(x) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \sin \beta_n y_l \sin \beta_n C_l \sin \beta_n y \\ H_l &= \sum_n \frac{1}{n \beta_n^2} \cdot \frac{\xi_n(x)}{\zeta_n} \cos \beta_n y_l \sin \beta_n C_l \sin \beta_n y \\ \xi_n(x) &= -\frac{\kappa_n}{\tau_n} \sinh \beta_n x + \beta_n x (\sinh \beta_n x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &-\delta_n \cosh \beta_n x \\ \eta_n(x) &= \cosh \beta_n x - \delta_n \sinh \beta_n x \\ \zeta_n &= \frac{\kappa_n}{\gamma_n} + \delta_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

F_i は、 F_j において座標 (x_j, y_j) を (x_i, y_i) に入れ換えて得られ、また、 G_i, H_i において、 n, b, l, x, y をそれぞれ、 m, a, l', y, x に入れ換えると \bar{G}_i', \bar{H}_i' が得られる。

ここで、式 (21) の諸係数は、前述の有限領域の位置と大きさを定めれば、板の任意点に対する影響係数として、準備計算の段階で前もって与えられ、総和公式を併用して、それぞれ独自に十分な収束値が求まる。

さて、曲げモーメント、ならびに中央面のひずみは、

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{4D}{h} \sum_L (\mu x) L \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{4D}{h} \sum_L (\mu x') L \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{12D}{h} \cdot \\ &\quad \cdot (1-\nu) \sum_L (\mu m_{xy}) L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) + \sum_L (\mu \omega) L \\ \epsilon_y &= \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) + \sum_L (\mu \omega') L \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{Eh} (1+\nu) N_{xy} + 6 \sum_L (\mu n_{xy}) L \end{aligned} \right\} \dots\dots(23)$$

なお、シャイベ応力は式 (3) によって与えられている。また、周辺の変位は、

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= \int_0^{a/2} \left[\frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(w+w_0)}{\partial x} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \sum_L (\mu \omega) L \right] dx \\ (v)_{y=0} &= \int_0^{b/2} \left[\frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(w+w_0)}{\partial y} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \sum_L (\mu \omega') L \right] dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ここで、式 (24) に含まれる非線形項の積分は和分に置換して処理される。

ところで、式 (19), (20) の w, ϕ における ψ_i, Γ_i は、それぞれ、式 (5) に示されるように、未定係数 μ 、およびその時点での断面力の 2 次微分を陰関数として含んでいる。

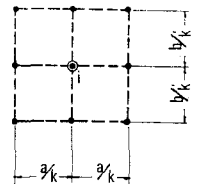


図-4 i 点を囲む 8 個の点の指標

これらを線形化するために、すでに前論文¹⁴⁾で述べたように、図-4 のような塑性化した i 点、ならびに周囲の 8 点を結ぶネットを用いた差分表示を与える。すなわち、逐次計算のある過程で、これ

らの各点の断面力の近似値が与えられたとすれば、 ψ_i, Γ_i は、この時点における各点の μ の 1 次関数となる。結局、式 (19), (20) の w, ϕ は μ を 1 次で含む連続解の形となり、式 (3), (22) の断面力、式 (24) の末端変位も同様な形となる。

再び、式 (7), (8) の境界条件にたち帰れば、Case 1 について、式 (19) の w は曲げに関するすべての条件を満足しており、対称性を考慮したことにより次の条件が残る。

$$\begin{aligned} (N_{xy})_{x=0, y=0} &= 0 \dots\dots\dots(25 \cdot a) \\ (u)_{x=0} &= \text{一定} \dots\dots\dots(25 \cdot b) \\ p_i' &= 0 \dots\dots\dots(25 \cdot c) \end{aligned}$$

解に含まれる未知量、 p_i, t_i, t_i' および p_{x_0} は境界上に採った分割区間 ($2C_i, 2C_i'$) のそれぞれの中点である選点で式 (25・a) を、圧縮を受ける辺 ($x=0$) 上の偶点を含む各選点で式 (25・b) を要求し、さらに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_x &= p_{x_0} + \frac{2}{b} \sum_L C_i p_i \\ \bar{p}_x &: \text{圧縮力の強度 } p_x \text{ の平均値} \end{aligned} \right\} \dots\dots(25 \cdot d)$$

を付加条件とする連立方程式の解として定められる。一方、Case 2 では、式 (25) において、式 (25・c) の代りに

$$(v)_{y=0} = 0 \dots\dots\dots(25 \cdot e)$$

を入れ換えればよい。解に含まれる未知量、 p_i, p_i', t_i, t_i' および p_{x_0}, p_{y_0} は、各分割区間の中点である選点で、式 (25・a)、偶点を含む各選点で式 (25・b)、(25・e) さらに式 (25・d) を満足するように定められる。

なお、弾塑性解析を行なうための逐次計算の方法、ならびに、塑性化した各点における各時点の μ を定めるための降伏条件の扱いについては前論文¹⁴⁾で詳述した。ここで、それらを重ねて述べることは、本文の主旨でないので割愛する。

3. 計算データと照査

本章では、この種の板に関する広汎な計算データが示される。また、解析結果の精度について、数値計算上の照査とともに、既往の理論解、ならびに実験データとの広範囲にわたる比較検討を行なった。さらに、従来提案されている終局強度に関する諸公式のそれぞれについての吟味を行ない、それらを整理するとともに、特に、後座屈現象が顕著になる範囲において、より正確な評価を与え得ると思われる一つの新しい公式を提示する。

まず、図-5 は、本文の解法の基本的な照査の一つを示すものである。2. で述べたことから、解析結果の精度を左右するものに、周辺に作用する力の分布、ならびに板内の有限領域の分割の粗密がある。図で見るよう

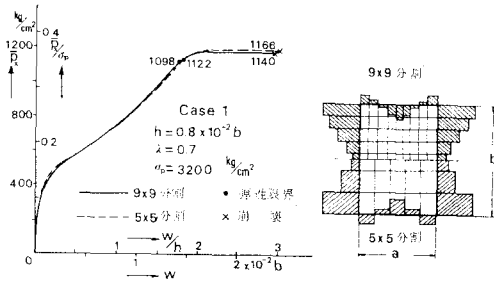


図-5 弾塑性解析における有限領域の分割の精度

に、終局強度の判定にかかわる最大たわみについて、5×5、および9×9分割の結果を比較すると、前者で十分な精度を得ることがわかる。これは、前論文¹⁴⁾で述べた、横荷重を受ける板の曲げ問題の場合と同等である。以上を考察の上、本文のデータの解析は、有限領域を5×5分割、周辺拘束力の分布を5分割として行なったものである。

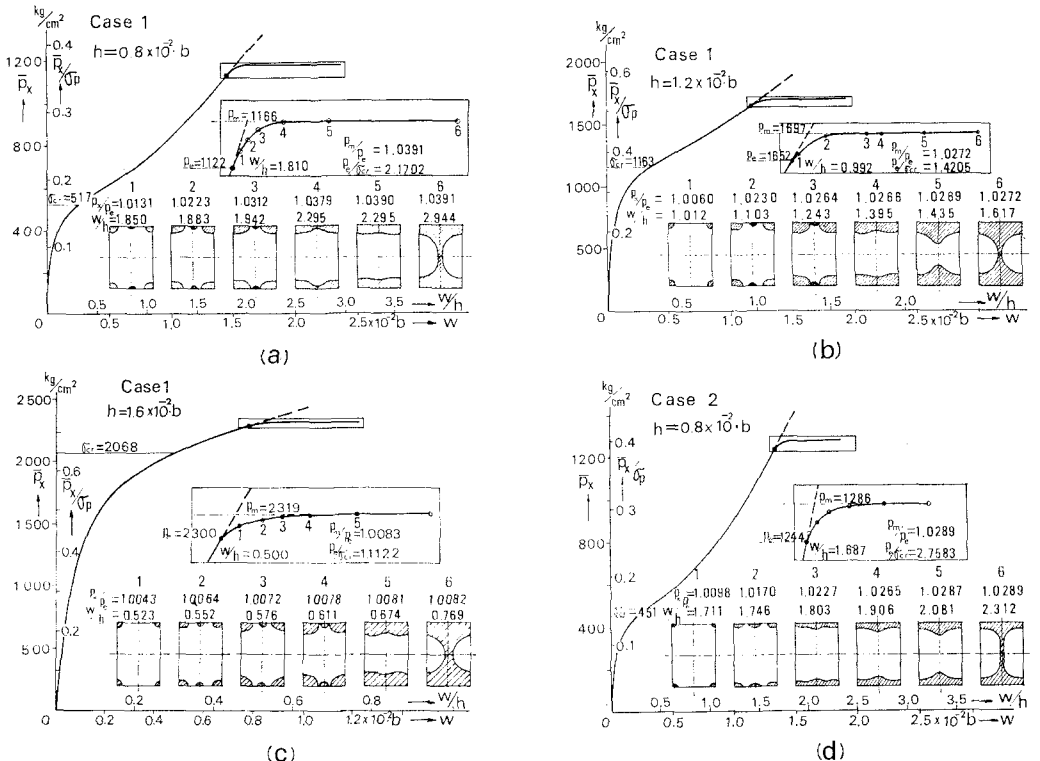
次に、代表的な若干の板を選び、特に、板の塑性化開始「弾性限界」から崩壊、すなわち snap action を生ずるに至る過程を詳細に追跡した。この解析の目的は2つあり、その一つは、崩壊機構を明らかにし、特に、終局強度と弾性限界応力との差異を調べ、終局強度の評価についての理論的な根拠を与えることであり、他の一つ

は、荷重漸増法に基づく本解法が、座屈問題のような、崩壊時に急速な変位の増大を生ずる場合に適応性を持つかということである。

図-6 (a)~(d) はその例であって、板厚、ならびに側面の拘束条件の変化に着目して選んだ4枚の板のデータである。これらより崩壊機構の形成される状況がよくわかり、また、当然のことながら、 p_e/σ_{cr} の値に見るように、板厚が薄くなるほど後座屈現象が顕著である。さらに、 p_m/p_e の値を見ると、弾性限界から崩壊に至るまでの荷重の増加率は、板が比較的厚い場合で1%以下、薄い場合でも3~4%である。なお、降伏応力を変えて試算した例でも同様な結果を得ている。以上の事実は、この種の板の場合、終局強度として弾性限界応力を代用できる十分な理論的根拠を与える。

以上の計算において、崩壊に近づくと、わずかな荷重増分に対しても、たわみが鋭敏に変化するが、この時点において荷重の増分を十分に小さく採れば、図に示すような snap action を生ずる崩壊機構が形成されるまでは繰返し計算において収束値が得られる。なお、それ以後では解の収束は得られないが、これは、たわみの流れ方から見て崩壊を意味するものであり、実用範囲外になる。

図-7 は、図-6 (a)~(c) に示した3つの板について



(p_m : 終局強度, p_e : 弾性限界応力, σ_{cr} : 弾性座屈値, 降伏応力 $\sigma_p = 3200 \text{ kg/cm}^2$, $\lambda = 0.7$, $\nu = 0.3$)

図-6 崩壊にいたる過程における塑性域と最大たわみの変化

て、 x 方向の縮み量 (δ) と、荷重との関係を示すものである。もし、Amsler machine を用いた実験において、崩壊と同時に荷重の降下 (矢印) を生ずるならば、図の板厚比の範囲では、板厚が大きいほど、鋭いピークを画くことになり、Ractliffeらの行なった実験¹⁰⁾ と類似の傾向を示すことになる。

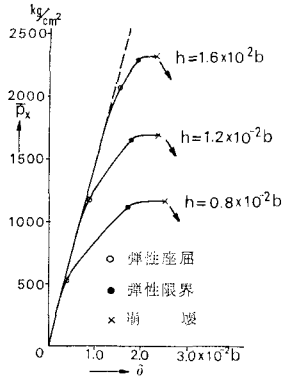


図-7 荷重と x 方向縮み量 (δ) との関係

図-8 は、図-6 (a) ~

(d) に示した各板の圧縮線における応力分布を示したものであり、側辺が拘束される Case 2 については、その拘束応力の分布もあわせて与えてある。圧縮線における崩壊時の応力分布について見ると、板厚が薄い場合、板幅中央部分の応力は急激に減少するが、板が厚くなると、その減少の割合は緩慢になる。このように、板厚比により板幅中央部分の荷重負担の割合に大差があり、Kármán¹⁾ らの導入した、板の崩壊時における板幅中央部分の荷重負担を無視する仮定も、一般性に乏しいからいのあることがわかる。

さて、図-9 は、辺長比、板厚比、降伏応力の変化に対応させた終局強度の値と、座屈のモード (m : 半波の数) との相関性を与えるもので、Case 1 と Case 2 のそれぞれについて示されている。なお、前述の弾塑性解

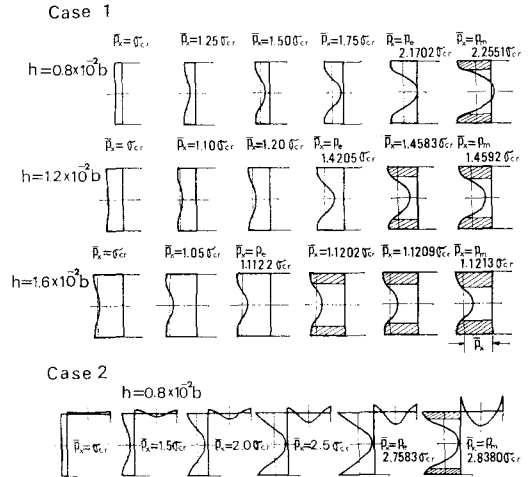


図-8 圧縮線の応力、および側辺における拘束力 (Case 2) の分布

析によって得られた理論的な根拠に基づき、終局強度 p_m の値として、弾性限界応力 p_e が代用されている。図で見るように、後座屈現象が顕著になる板においても、弾性座屈の場合と同様に、辺長比 λ の値が小さい範囲では、終局強度の変化が大きく、その傾向は、側辺に拘束のない Case 1 よりも、拘束のある Case 2 の方が著しい。また、 λ の値が大きくなれば、その変化はなだらかになる。なお、 $m=1$ の場合の最小値を与える λ の値について見れば、後座屈現象が顕著になる板ほど、弾性座屈の場合のそれよりも小さくなる傾向を示し、この傾向も Case 2 の方が著しい。

次に図-10, 11 は、弾性域における変形の性質を調べ

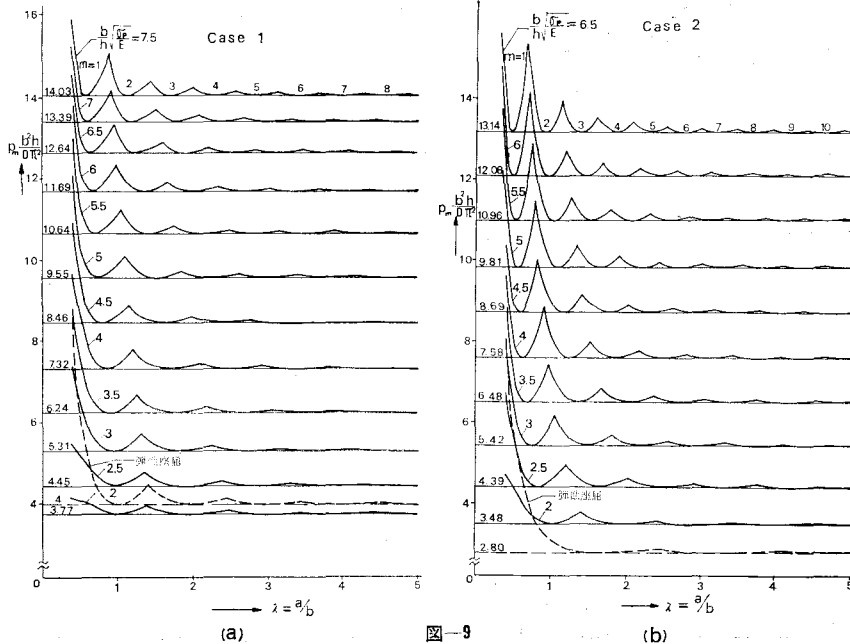


図-9

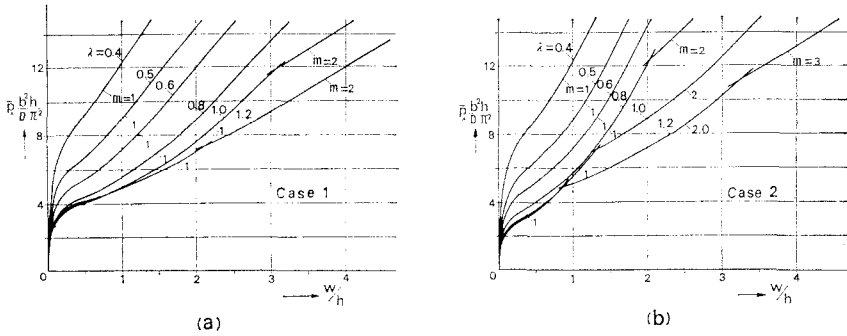


図-10 圧縮荷重と最大弾性たわみの関係

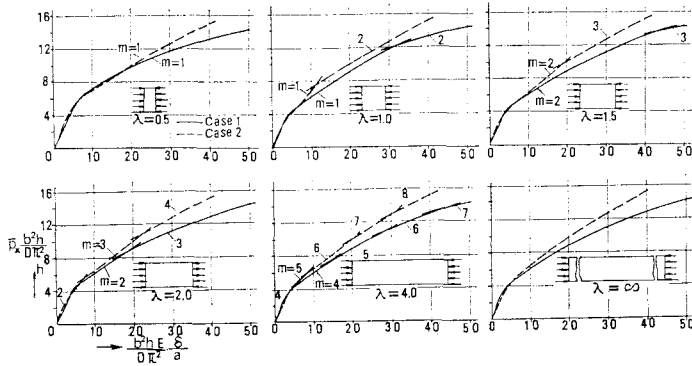


図-11 圧縮荷重と x 方向弾性縮み量の関係

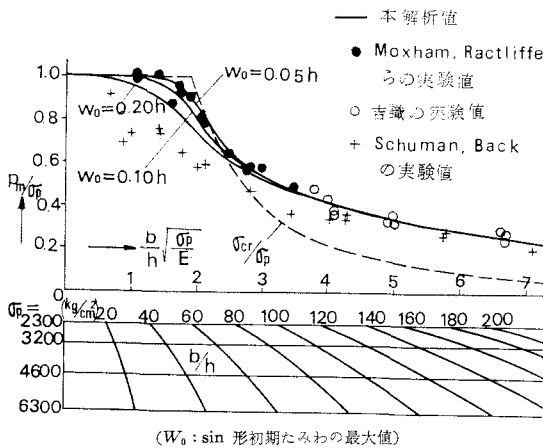


図-12 既往の実験値と本解析の結果の比較

たもので、前者は、圧縮荷重と最大たわみの関係を、後者は、同じく x 方向縮み量との関係を示したものである。

ところで、図-12 は、終局強度について、既往の実験値と本解析 (Case 1) の結果を比較したもので、実験は非溶接板について行なわれたものである。なお、以下の説明で κ と呼ぶものは、次のものである。

$$\kappa = \frac{b}{h} \sqrt{\frac{\sigma_p}{E}}$$

さて、実験値のうち、 κ の値が比較的小さい範囲 ($\kappa < 3.4$) の一群は Dwight, Harrison, Moxham, Ractliffe

らの実験値^{10), 11)}であり、この領域では、理論的にも初期たわみ (w_0) の影響を受ける。これらの実験における w_0 のデータは不明であるが、本解析の結果では、図示の3種類の条件の範囲で実験値を包絡しており、また、 w_0 の影響の僅少なものと実験値の上界との間には良好な一致が見られる。なお、他の一群は Schuman, Back らの実験値¹³⁾のうち、鋼材に類似した材料の特性を持ち、かつ、ばらつきの比較的小さい duralumin 板のデータをプロットしたものであるが、それらは、かなり低い値を示している。これは、Schuman らの実験が、航空機構造に使用されるような非常に薄い板を対象にしているので、初期たわみの板厚に対する比率が大きくなったものと思われる。

次に、 κ の値が大きくなれば、後座屈現象が顕著になるが、この範囲の実験値の一つは吉識¹²⁾のものであり、他の一つは Schuman¹³⁾らのものである。吉識は、正方形より幅の広い板について実験し、辺長比が終局強度に及ぼす影響を調べているが、図に示すものはその最小値である。図に見るように、それらと本解析の結果はよく一致している。なお、この範囲では、終局強度に及ぼす初期たわみの影響は理論的にもほとんど無視できるが注、Schuman らの実験値が解析値に近接しているのも

注：本文のデータは非溶接板に関するものであり、溶接による残留応力の影響は含まれていない。

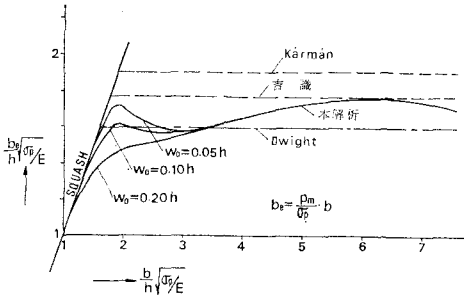


図-13 既往の公式 (Kármán, Dwight, 吉識) の値と本解析の比較

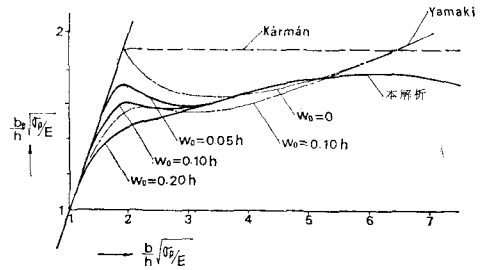


図-14 既往の解析値 (Yamaki) と本解析値の比較

そのためであろう。以上の結果によれば、本解析の結果は、土木、あるいは船舶構造に用いられるような剛性を持つ板を対象にした、比較的ばらつきの少ない Dwight, 吉識らの実験結果と広範囲にわたってよく一致する。また、特殊な板を対象にした Schuman らの実験値のうち、材料のばらつきが少なく、かつ初期不整の影響が小さくなる範囲のものは、本解析値に近接する傾向を持つ。

ところで、従来、種々の理論解析、あるいは実験の結果に基づき、この種の板の終局強度に関する、いくつかの公式が提案されている。そこで、それらの値と本解析値を比較検討し、その適用性について論証する。

まず、図-13 は、Kármán の理論式、ならびに、Dwight, 吉識らが、前述の、それぞれの範囲の実験データに基づいて提案した公式による値と、本解析値を比較したものである。ここで

$$\frac{\hat{p}_m}{\sigma_p} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1.90}{\kappa} : (\text{Kármán}) \\ \frac{1.77}{\kappa} : (\text{吉識; 最小値}) \text{注} \\ \frac{1.60}{\kappa} : (\text{Dwight}) \end{array} \right\} \dots\dots (26)$$

Dwight の式は、初期たわみが小さければ、その実験データの範囲 ($\kappa < 3.4$) で妥当なものである。また、吉識の式は、 $\kappa = 5 \sim 7$ の範囲でよい近似を持つ。しかしながら、図に見るように、これらの公式は、それぞれのデータの範囲を越えると近似度が低下する。なお、Kármán の理論値は全般に過大である。また、図示していないが、Timoshenko の理論値⁹⁾は Kármán のものよりさらに大きくなる。

図-14 は、Yamaki の理論値¹⁰⁾と本解析値を比較したものである。Yamaki の解の精度は、Kármán らのものに比べてかなりよい。しかし、 κ の値が大きくなると、その値は Kármán のものよりも高くなる傾向を持つ。これは、変位関数に含まれる自由度の数を制限しているための誤差も含まれようが、 κ の値のいかにかわら

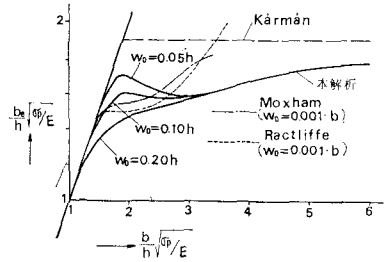


図-15 既往の解析値 (Ractliffe, Moxham) と本解析値の比較

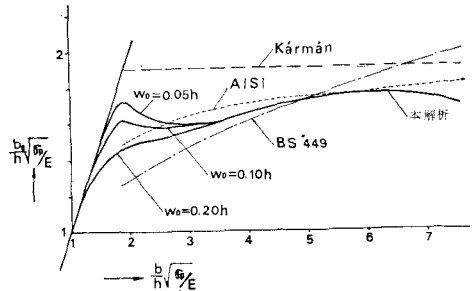


図-16 既往の実験公式 [BS 449 (1959), AISI (1962)] の値と、本解析値の比較

ず、終局状態における座屈形を 1 次の波形に仮定したことによるものと考えられる。なお、最近発表された Dawson, Walker⁹⁾ らの解析の結果も、Yamaki のものと同様の傾向を持っている。

次に、図-15 は、弾塑性解析を行なった Ractliffe^{10), 11)}, Moxham¹²⁾ らの理論値と本解析の結果を比較したものであるが、図に見るように、前者の値は、後座屈の効果が現われるに従って急増し、実験の結果とも合致しない。Moxham の解はエネルギー法を用いて求めたものであるが、精度上の問題点を残しているようである。また、Ractliffe の解は弾性座屈時の 1 次の波形を用いており、つり合い条件の充足に関して簡単な仮定を容認し、側辺の条件も特殊なものになっている。

さらに、図-16 は、イギリスならびにアメリカのそれぞれの設計示方書に規定された実験公式の値と、本解析の結果を比較したものである。図によれば、イギリスの式 [BS 449 (1959)]¹⁸⁾ を κ の値の大きな部分で用い

注：吉識の式は、 $\lambda > 1$ の領域では意味を持たない。

ると近似性を失うことがわかる。また、アメリカの式 [AISI(1962)]⁹⁾ は、後座屈現象が顕著になる領域においても、その近似度はかなりよい。ただ、この式は、 κ の値の増大とともに、Kármán の値に接近するように作られているが、理論的な根拠に乏しい。

さて、本研究は、この種の板の終局強度に関する基本的な問題である弾性座屈応力、あるいは降伏応力以下での崩壊、ならびに後座屈領域での崩壊の双方について一貫した解析を行なったものである。

図-13 に見るように、前者の場合は初期たわみの影響が顕著である。Dwight は最近の論文において、多くの実験データに基づき、 $\rho_m < \sigma_p$ 、かつ、 $\kappa \leq 3.4$ の範囲で、非溶接板の基本的な終局強度を示す式として、前述の式 (26) 中の

$$\frac{\rho_m}{\sigma_p} = \frac{1.60}{\kappa}$$

を与えた。これは 図-13 に見るように初期たわみの影響が比較的小さい場合に相当し、既述のように基本値として妥当なものと考えられる。また、この場合 $\kappa > 2.0$ となると後座屈現象が生じる。

ところで、幅厚比についてみれば、図-12 に見るように、 $b/h < 40$ の範囲では、弾性座屈応力、あるいは降伏応力以下で崩壊する。しかしながら、 b/h が 60 になれば、 $\sigma_p = 2300 \text{ kg/cm}^2$ の場合は、ほぼ弾性座屈応力で崩壊するが、 $\sigma_p = 6300 \text{ kg/cm}^2$ の場合は、終局強度が弾性座屈応力の約 1.5 倍に達し、後座屈現象が顕著になることがわかる。

さて、Dwight の式は、 $\kappa = 3.4$ において、本解析値とよく一致している。そこで、本解析の結果をもとに、 $3.4 \leq \kappa \leq 7.5$ の範囲において、基本的な終局強度を与える理論式を作ると次のようになる。

$$\frac{\rho_m}{\sigma_p} = \frac{1.76}{\kappa} \left\{ 1 - \frac{1.16}{100} (\kappa - 6.2)^2 \right\} \quad (3.4 \leq \kappa \leq 7.5)$$

.....(27)

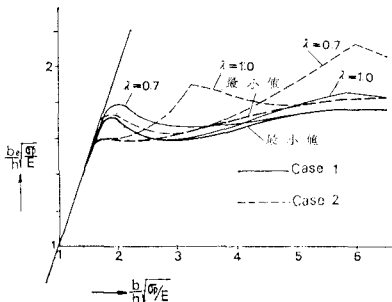


図-17 辺長比 (λ) が終局強度におよぼす影響

おわりに、図-17 は辺長比 (λ) が終局強度におよぼす影響を調べたものである。図に示すように、側辺の面内拘束のない Case 1 では、その影響は比較的小さい。

しかし、面内変位が拘束される Case 2 では影響が大きく、座屈モードの評価が十分でない解析を行なうと大差を生ずる結果となる。ただ、それらの最小値の差異は少ない。

4. む す び

本文は、周辺を単純支持され、かつ、1対辺に圧縮を受ける長方形鋼板について、後座屈領域の挙動も含めた広範囲の解析を行なったものであるが、得られた成果を要約すれば次のとおりである。

(1) 従来、理論的に十分な扱いがなされていない弾塑性状態より崩壊にいたる挙動について、高精度を持つとみなされる弾塑性解析を行ない、崩壊機構を明らかにすると同時に、終局強度の判定に関して理論的な根拠を与えた。一方、横荷重を受ける板に対して与えた前論文¹⁴⁾の解法が、座屈問題のような、崩壊時に急速な変位の増大を生ずる場合にも適応性を持つことがわかり、その一貫した応用の可能性を見出した。

(2) 従来、資料不足の感のあるこの種の板に対し、板厚比、辺長比、降伏応力、初期たわみ、側辺の拘束条件などをさまざまに変化させて終局強度に関する広範囲のデータを作成し、その特性を明らかにした。また、その値を、既往の実験値と比較し、その有用性を確かめた。

(3) 以上の事実に基づき、従来提案されている終局強度の理論式、および実験式の適用性を吟味し、後座屈領域における終局強度の基本値を与える一つの理論式、式 (27) を提示した。

本文の所論には、溶接による残留応力の影響は含まれていないが、その影響を論ずる場合にも、本解析の結果は一つの基本的な成果として利用できよう。

記 号

- a : 板の長さ
- b : 板の幅
- D : 板の剛度 $= E \cdot h^3 / 12(1-\nu^2)$
- E : 弾性係数
- f : 塑性ポテンシャル
- h : 板の厚さ
- M_x, M_y, M_{xy} : 曲げモーメント
- M_p : 降伏モーメント
- N_x, N_y, N_{xy} : 軸力
- N_p : 降伏軸力
- ρ_e : 弾性限界応力
- ρ_m : 終局強度
- $\rho_l : \rho_{x'}$ の $y=y_l$ における近似値
- $\rho_{l'} : \rho_{y'}$ の $x=x_{l'}$ における近似値

p_x : x 方向対辺の荷重強度
 p_{x_0} : 隅点の荷重強度
 \bar{p}_x : p_x の平均値
 p_x' : x 方向対辺の垂直方向調整力の強さ
 p_y : y 方向対辺の拘束応力
 p_{y_0} : 隅点の y 方向の拘束力
 p_y' : y 方向対辺の垂直方向調整力の強さ
 t_l : t_{xy} の $y=y_l$ における近似値
 t_l' : t_{xy}' の $x=x_l$ における近似値
 t_{xy} : x 方向対辺の接線方向調整力の強さ
 t_{xy}' : y 方向対辺の接線方向調整力の強さ
 u, v, w : x, y, z 各方向の変位
 w_0 : 初期たわみ
 W_0 : 初期たわみの最大値
 x, y, z : 板の座標軸
 $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$: 板内の有限領域の中心座標
 y_l : x 方向対辺の分割点の中心座標
 x_l' : y 方向対辺の分割点の中心座標
 $\Gamma_{(x,y)}$: 適合条件式における膜作用の従属関数
 Γ_i : 各有限領域における $\Gamma_{(x,y)}$ の平均値
 δ : x 方向の縮み量
 $\kappa = \frac{b}{h} \cdot \sqrt{\sigma_p/E}$
 λ : 辺長比 $= a/b$
 $A_{(x,y)}$: 適合条件式における塑性変形の従属関数
 A_j : 各有限領域における $A_{(x,y)}$ の平均値
 μ : 塑性変形中変化するスカラー量
 ν : ポアソン比
 $\Pi_{(x,y)}$: つりあい条件式における膜作用の従属関数
 π_j : 各有限領域における $\Pi_{(x,y)}$ の平均値
 σ_{cr} : 弾性座屈値
 σ_p : 降伏応力
 ϕ : 応力関数
 $\psi_{(x,y)}$: つりあい条件式における塑性変形の従属関数
 ψ_i : 各有限領域における $\psi_{(x,y)}$ の平均値

参 考 文 献

1) Kármán, Th. V., E.E. Sechler and L.H. Donnell : The strength of thin plates in compression, Trans. A.S.M.E., Vol. 54, pp. 53~56, 1932.

2) Cox, H.L. : The Buckling of Thin Plates in Compression, A.R.C. R & M., No. 1554, 1933.
 3) Marguerre, K. and E. Trefftz : Über die tragfähigkeit limes längsbelasteten plattenstreifens nach überschreiten der beullast, Z.A.M.M., Bd. 17, pp. 85~100, 1937.
 4) Timoshenko, S. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1936.
 5) Coan, J.M. : Large deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Appl. Mech., Vol. 18, pp. 143~151, 1951.
 6) Yamaki, N. : Post-buckling behaviour of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Appl. Mech., Vol. 26, pp. 407~414, 1959.
 7) Yamaki, N. : ditto (continued), Vol. 27, pp. 335~342, 1960.
 8) Stein, M. : Loads and Deformations of Buckled Rectangular Plates, Tech. Report R-40./ Langley Research Center, N.A.S.A., 1959.
 9) Dawson, R.G. and A.C. Walker : Post-buckling of geometrically imperfect plates, Proc. of A.S.C.E., Vol. 98, ST 1, pp. 75~94, 1972.
 10) Dwight, J.B. and K.E. Moxham : Welded steel plates in compression, Structural Eng., Vol. 47, No. 2, pp. 49~66, 1969.
 11) Dwight, J.B. : Collapse of steel compression panels, Development in Bridge and Construction, Crosby Lockwood & Son Ltd., London, pp. 519~539, 1971.
 12) 吉識雅夫 : 圧縮を受ける 船体構造部分の座屈, ならびに 圧壊強度の研究, 造船協会会報, No. 75, pp. 85~109, 1953.
 13) Schuman, L. and G. Back : Strength of rectangular flat plates under edge compression, Tech. Report. N.A.C.A., No. 356, 1930.
 14) 岡村宏一・吉田公憲 : 大たわみ, およびリブの補剛を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析, 土木学会 論文報告集, No. 196, pp. 29~43, 1971.
 15) 岡村宏一・吉田公憲・小川 清 : 正方形薄板の弾塑性曲げの実験, 土木学会 関西支部 講演概要, pp. 1-5-1~2, 1972.
 16) Massonet, Ch. : General theory of elasto-plastic membrane plates, Engineering Plasticity, Cambridge Univ., pp. 443~472, 1968.
 17) 岡村宏一・吉田公憲・他 2 名 : 構造物の一つの弾性立体解析法とその系統的応用, 土木学会論文報告集, No. 190, pp. 61~74, 1971.
 18) British Standards Institution : Specification for the Use of Cold Formed Steel Sections in Buildings, Addendum No. 1, 1961, to BS 449.
 19) American Iron and Steel Institute : Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members, 1968.

(1972. 5. 17. 受付)